הרצאה 4

(Khalil) חליל

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + \overbrace{(x_2 + x_1^2)}^{z} \qquad z=0 \Rightarrow x_1 \to 0$$

$V = x_1^2$ כפונקציית Lyapunov

נמצא פונקציה מתאימה ל-$n=1$

$$\dot{z} = (x_2 + x_1^2)^{\cdot} = 2x_1\dot{x}_1 + \dot{x}_2 =$$
$$= 2x_1(x_1^2 - x_1^3 + x_2) + u$$

$$V_1 = x_1^2 + \frac{1}{2}z^2 = x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)^2$$ pos. definite, Radially unbounded

$$\dot{V}_1 = -2x_1^4 + z\dot{z} = -2x_1^4 + z(2x_1(x_1^2 - x_1^3 + x_2) + u)$$

נבחר $u = -2x_1(x_1^2 - x_1^3 + x_2) - z$

$$\boxed{u = -2x_1^3 + 2x_1^4 - 2x_1x_2 - x_1^2 - x_2}$$

$$\dot{V} = -2x_1^4 - z^2 = -2x_1^4 - (x_1^2 + x_2)^2 \quad \text{negative def.}$$

$\Leftarrow$ יציבות אסימפטוטית

פתרון אחר:

$y = x_1 \Rightarrow$ rel. degree $= 2$

Feedback linearization

$$\ddot{x}_1 = \underbrace{(2x_1 - 3x_1^2)\underbrace{(x_1^2 - x_1^3 + x_2)}_{\dot{x}_1}}_{\varphi(x)} + u$$

הסבר בעמ' 41

$$\left.\begin{matrix} \deg x_1 = 3 \\ \deg \dot{x}_1 = 2 \\ \deg \ddot{x}_1 = \deg u = 1 \end{matrix}\right] \Rightarrow u = -\varphi(x) - x_1^{\frac{1}{3}} - |\dot{x}_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign} \dot{x}_1$$

התכנסות תוך זמן סופי

$$\left.\begin{matrix} \deg x_1 = 1 \\ \deg \dot{x}_1 = 2 \\ \deg \ddot{x}_1 = 3 = \deg u \end{matrix}\right] \Rightarrow u = -\varphi(x) - x_1^3 - |\dot{x}_1|^{\frac{3}{2}} \operatorname{sign} \dot{x}_1$$

התכנסות תוך זמן קבוע לגבי כל כיוון

(כללי)

Barbalat Lemma (1959) 41

$\vartheta : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$

$\vartheta \in C^1$, $\exists \lim_{t\to\infty} \vartheta(t)$, $\dot\vartheta$ uniformly continuous

רציפה במידה שווה

(or locally absolutely continuous

רציפה בהחלט מקומית

$$\dot\vartheta(t) = \dot\vartheta(t_1) + \int_{t_1}^{t} \ddot\vartheta(s)\,ds, \quad \underline{\ddot\vartheta \text{ מדידה}}$$

Lebesgue measurable)

3K

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} \dot\vartheta(t) = 0}$$

<u>הוכחה</u>

$\lim_{t\to\infty} \vartheta(t) = \vartheta_0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists t_1 : \forall t>t_1\ |\vartheta(t)-\vartheta_0| < \varepsilon$

$\dot\vartheta$ uniformly continuos

(1) $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall t_1,t_2 : |t_1-t_2|<\delta \Rightarrow |\dot\vartheta(t_1)-\dot\vartheta(t_2)| < \varepsilon$

$\dot\vartheta(t) \to 0$

$\forall \varepsilon>0\ \exists t_1 : \forall t>t_1\ |\dot\vartheta(t)| < \varepsilon$

$\dot\vartheta(t) \not\to 0$ נניח

(2) $\exists \hat\varepsilon_* > 0\ \forall t_1\ \exists t_2>t_1 : |\dot\vartheta(t_2)| > \hat\varepsilon_*$

(3) $\exists \lim \vartheta(t) \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists t_1 : \forall t_*, t_{**} > t_1\ |\vartheta(t_*) - \vartheta(t_{**})| < \varepsilon$ (Cauchy)

(2),(1) $\Rightarrow \exists T>0 : \forall t, t' > T : |\dot\vartheta(t) - \dot\vartheta(t')| < \frac{\hat\varepsilon}{3}$, $|t-t'|<\delta$, $|\dot\vartheta(\xi)| > \hat\varepsilon$

$\Rightarrow |\vartheta(t') - \vartheta(t)| = \left|\int_t^{t'} \dot\vartheta(s)\,ds\right| \geq \frac{2}{3}\hat\varepsilon\,\delta$ סתירה ל-(3) δ מ.ש.ל

Fixed-Time זמן קבוע

זמן לא תלוי בתנאי התחלה,

נניח מתחילים ב $t=0$

$$u = -\varphi(x) + \begin{cases} -x_1^{1/3} - |\dot{x}_1|^{1/2}\,\mathrm{sign}\,\dot{x}_1 & t \notin [0,1] \\ -x_1^{3} - |\dot{x}_1|^{3/2}\,\mathrm{sign}\,\dot{x}_1 & t \in [0,1] \end{cases}$$

נקבל התכנסות תוך זמן קבוע ל-0.

נוכיח רק יציבות אסימפטוטית.

$$\underbrace{\ddot{x}_1 = -x_1^{1/3}}_{\text{Newton חוק}} \underbrace{- |\dot{x}_1|^{1/2}\,\mathrm{sign}\,\dot{x}_1}_{\text{חיכוך}} \quad (*)$$

(מקרה שני דומה)

(מנוגד למהירות $\dot{x}_1$)

$$-x_1^{1/3} = -\frac{d}{dx_1}\left(\frac{3}{4}x_1^{4/3}\right)$$

$$V = \underbrace{\frac{3}{4}x_1^{4/3}}_{\text{אנרגיה פוטנציאלית}} + \underbrace{\frac{1}{2}\dot{x}_1^2}_{\text{אנרגיה קינטית}}$$

$$\dot{V} = x_1^{1/3}\dot{x}_1 + \dot{x}_1\ddot{x}_1 = \dot{x}_1\left(\cancel{x_1^{1/3}} - \cancel{x_1^{1/3}} - |\dot{x}_1|^{1/2}\,\mathrm{sign}\,\dot{x}_1\right) =$$

$$\boxed{\dot{V} = -|\dot{x}_1|^{3/2} \le 0} \qquad \dot{x}_1\,\mathrm{sign}\,\dot{x}_1 = |\dot{x}_1|$$

נשתמש ב- Barbalat lemma (גם מספק)

(Lassale פותר בעיה)

$$\dot{V} \le 0 \Rightarrow \underbrace{V \text{ חסומה}}\quad V(x(t)) \le V(x(0))$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{t\to\infty} V(x(t)) \ge 0$$

כל פתרון אפשר להאריך עד ∞ בזמן

$\dot{V} = -|\dot{x}_1^{3/2}|$ - פונקציה ליפשיצית

$|\cdot|$ - של פונקציה $\dot{x}_1^{3/2}$

$$\left(|\dot{x}_1|^{3/2}\right)^{\cdot} = \frac{3}{2}|\dot{x}_1|^{1/2}\ddot{x}_1\,\mathrm{sign}\,\dot{x}_1$$

חסום

כאשר V חסום

$$\text{Barbalat} \Rightarrow \underset{V \to \text{const}}{\dot{V} \to 0} \Rightarrow \dot{x}_1 \to 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 \to \text{const} \\ \dot{x}_1 \to 0 \end{matrix}$$

$$\ddot{x}_1 = -x_1^{\frac{1}{3}} - |\dot{x}_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign} \dot{x}_1 \qquad (\text{א})$$

43

$x_1(t) \to const$, $\dot{x}_1(t) \to 0$, $|\ddot{x}_1| \leq C_{const}$

$\ddot{x}_{1*}$ $\quad$ נניח $x_{1*} \neq 0$

אז נקבל $\forall t_1 > t_*$ $\quad \ddot{x}_1 \to -x_{1*}^{\frac{1}{3}} \neq 0$

נניח $\varepsilon < \frac{|x_{1*}|}{2}$, $|\dot{x}_1(t_1)| \leq \varepsilon$, $|x_1(t_1) - x_{1*}| \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \dot{x}_1(t_1+\Delta t) = \dot{x}_1(t_1) + \ddot{x}_1(t_1)\Delta t + \cancel{o(\Delta t)}\, R(t,\Delta t)$$

$|R| \leq \frac{1}{2} C \Delta t^2$

~~$|\dot{x}_1(t_1+\Delta t)| \Rightarrow$~~

$$|\ddot{x}(t_1)| \geq \left||x_{1*}| - \varepsilon\right|^{\frac{1}{3}} - \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

$$|\dot{x}_1(t_1+\Delta t)| \geq -\varepsilon + \left(|x_{1*}| - \varepsilon\right)^{\frac{1}{3}} \Delta t - \frac{1}{2} C \Delta t^2$$

ניקח $\Delta t = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$

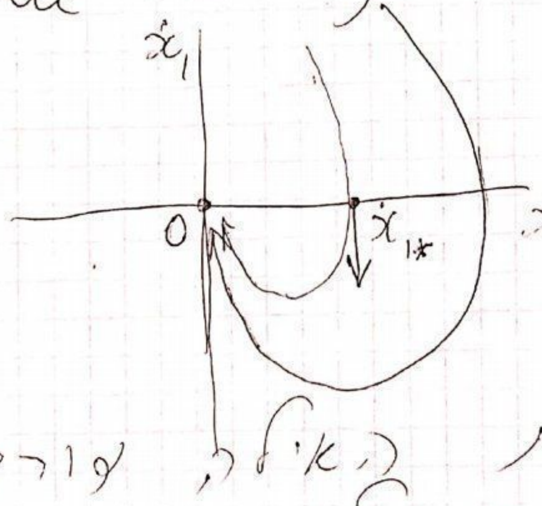
$$\Rightarrow |\dot{x}_1(t_1+\Delta t)| \geq \left(\frac{1}{2}|x_{1*}|\right)^{\frac{1}{3}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \delta(\varepsilon) > \varepsilon$$

$\delta(\varepsilon) = o(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$

עבור ε קטן מספיק δ

$x, \dot{x} \to 0 \Leftarrow$ סתירה

בעצם הוכחנו משפט Lassale ...



כל המסלולים מגיעים לראשית

יש אינסוף מסלולים מצומצמים במהלך

בעצם כל אלה לא (?)

הקרה בתנאי אי-וודאות

פנדמיה: Corona Virus, Covid-19, Wuhan Virus

2020מ

נסתכל במדינה אחת קטנה

P - אוכלוסייה, X - מספר נושאי הנגיף

Z - אנשים שהחלימו

C (cost) - עושר חברתי

d - מירחק חברתי social distancing

$$\begin{cases} \dot{P} = -\underbrace{\mu}_{\text{mortality}} X + \alpha_1 C \cancel{P} + \underbrace{I(t)}_{\text{Immigration}} - \underbrace{E(t)}_{\text{Emigration}} \\ \dot{X} = \frac{\alpha_2}{d}(P-X-Z)X - \underbrace{\mu X - \lambda X}_{\text{החלמה, מוות}} + \alpha_3 I(t) - \frac{X}{P}E(t) \\ \dot{Z} = \lambda X - \frac{Z}{P}E(t) \\ \dot{C} = -\alpha_4 d + \alpha_5 C - \underbrace{\beta x}_{\text{מחיר הטיפול}} \end{cases}$$

אמינות המודל - מאוד מפוקפק, ~~איכותית~~ איכותית בלבד

תחום קיום:

$0 \leq X, Z, \quad X+Z \leq P$

$0 \leq Z, \quad C \geq 0, \quad 0 \leq I \ll P, \quad 0 \leq E \ll P$

בכל מקום אפשר להחליף X ב $X^{1.1}$ למשל

או $\operatorname{arctg} X$ ...

מטרות: P יעלה, ~~$P-X-Z$~~ יעלה (מספר מתים) $\int \mu X dt$

X - מינימום ערך מצטברים

בקר: social distancing

במקום $\frac{1}{d}$ אפשר לקחת פונקציה יורדת אחרת

אפשר לקחת בחשבון קבוצות באוכלוסיה
לפי הגיל ומחלות רקע: $P = P_1 + P_2 + \dots + P_k$
אפשר לקחת בחשבון זמן מחלה,
$X = X_1 + X_2 + \dots + X_{30}$ ...
מכונות הנשמה, מספר הבדיקות יומיות ...
העיקר הוא עדיין d אפשר גם להכניס מסכות
גם לפי חיוניות עבודה, — $d = (d_1, d_2, \dots, d_e)$

מה מנסים לעשות:
לבנות עצם אמין ולבנות סטרטגיה $d(t)$ ידועה מראש
או עם נקודות ביקורת מסויימות
בלי לדעת את X כימעט אי-אפשר לעשות כלום
ידוע רק שכאשר $d = \infty$ $\dot{X} < 0$ ל- $(\lambda + \mu X) \geq I$
היעד: להגיע ל $X = 0$ או $X \approx 0$
לכן הפתרון הוא $d = \infty$ כדי להקטין X
ואחר-כך ניהול המחלה.

נסיון להגיע לעצם מדוייק נעשה
אבל הוא ״שגוי״
בסופו של דבר זה יהיה ניחוש מלומד

מספר מתים מצוין אבל בגלל אי-התאמת העצם
הוא רק מראה על השפעת הבקרה כעבור זמן
מסויים (≈ 24 ימים!)
אבל X ידוע עד טוב אם בדיקות רבות מספיק
סטרטגיה אפשרית:
להחזיק $d \in [d_m, d_M]$, $\dot{X} \leq -\lambda_x X$
~~[illegible]~~ בצמוד הבקרה...

בקרה בתנאי אי-וודאות

Control under Uncertainty conditions

דוגמא

$$\dot{x} = a(t,x) + u$$

$$x, u \in \mathbb{R}$$

$$u = -a(t,x) - x \Rightarrow x \to 0$$

$$u = -a(t,x) - x^{\frac{1}{3}} - x^{3}$$ זמן סופי / [illegible]

מה קורה כאשר a לא ידוע?

נניח $|a| \le 1$

1. High-gain control

$$u = -kx, \quad k \gg 1$$

או יותר טוב:

$$u = \begin{cases} -2\,\mathrm{sign}\,x, & |kx| > 2 \\ -kx, & |kx| \le 2 \end{cases}$$

$$|x| \geq \frac{1}{k} \Rightarrow |u| > |a| \Rightarrow \dot{x}x < 0$$

$-\frac{1}{k} \quad 0 \quad \frac{1}{k}$

נניח $a(t,x) = a(t)$, כל הנגזרות חסומות

a אינו ידוע,

$$\dot{x} = a - kx \qquad \dot{x} = -k\left(x - \frac{1}{k}a\right) \Rightarrow |x| \le \frac{1}{k}$$

$$\boxed{\left|x^{(j)}\right| \le \frac{1}{k}\sup\left|a^{(j)}\right|} \qquad \ddot{x} = -k\left(\dot{x} - \frac{1}{k}\dot{a}\right) \Rightarrow |\dot{x}| \le \frac{1}{k}\sup|\dot{a}|$$

...

עכשיו נניח רעש: מודדים (מזוין!!) $\hat{x} = x(t) + \eta(t)$

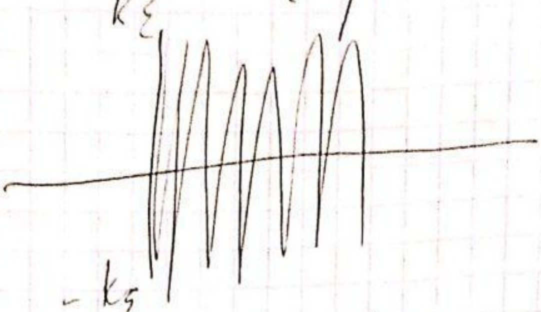
$$|\eta(t)| \le \varepsilon$$

$$\dot{x} = a(t,x) - kx - k\eta(t) \quad \Leftarrow \quad |x| \geq \frac{1}{k} + \varepsilon \Rightarrow x\dot{x} < 0$$

$\frac{1}{k} \qquad \frac{1}{k}$

$-\varepsilon \qquad \varepsilon$

התגובה האמיתית היא הבאה!



$u = -kx - k\eta$

$|k\eta| \le k\varepsilon$

יכול להיות גידול מאוד

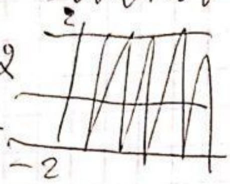
אם ישנה סטייה,

אז

כך נקרא chattering

saturation של u ב ± 2

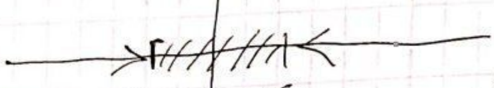
$$u = \begin{cases} 2\,\text{sign}\, x, & |x| \ge 2 \\ -kx, & |x| < 2 \end{cases}$$



2. Sliding Mode Control

מצב החלקה $u = -2\,\text{sign}\, x$

$\dot{x} = a - 2\,\text{sign}(x + \eta)$, $|\eta| \le \varepsilon$



chattering תמיד קיים בעצם

הבעיה:

$a(t,x) = 1 \Rightarrow \dot{x} = 1 - 2\,\text{sign}\, x$

$$\dot{x} = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ 3 & x < 0 \end{cases}$$

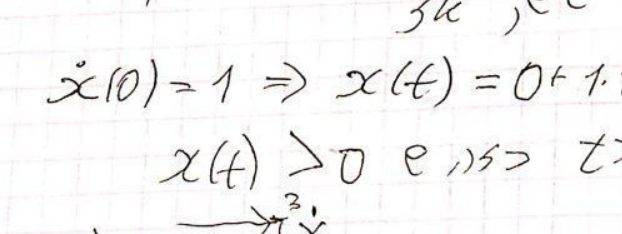
נניח $x(0) = 0 \Leftarrow$ אין פתרון לבעיית Cauchy!

כי נניח שיש, אז

$\dot{x}(0) = 1 \Rightarrow x(t) = 0 + 1 \cdot t + o(t)$, $t \approx 0$

$\Leftarrow$ קיים $t > 0$ כך ש $x(t) > 0$

אבל



אי אפשר להגיע ל$x(t)$ כי $\dot{x} < 0$ כל הדרך

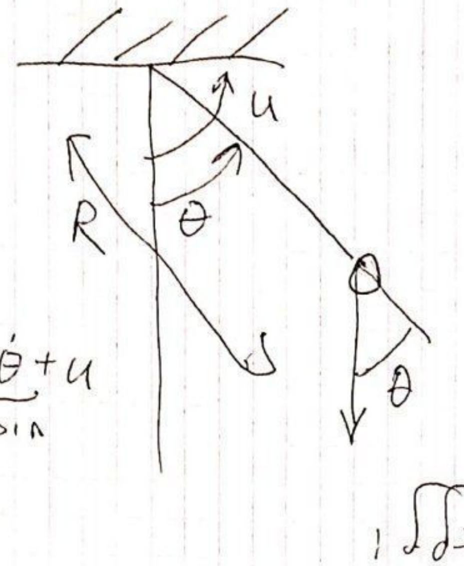
מאחר וערך ביניים $\Leftarrow$ מתקבל ערך $\frac{1}{2}x(t)$ בזמן $t_1 < t$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}x(t) + \int_{t_1}^{t} \dot{x}_1(s)\,ds = \frac{1}{2}x(t) - (t - t_1) < x(t)$$

סתירה!

צריך הגדרה מחדש של המגדיר

דוגמא: מטוטלת Pendulum



$m R^2 \ddot\theta =$
$= -mgR\sin\theta \underbrace{- k\dot\theta}_{\text{חיכוך}} + u$

רצוי: $\theta = \theta_c(t)$

מקרה מוכלל:

$$\ddot x = a(t,x,\dot x) + b(t,x,\dot x)\,u$$
$$|a| \le 1, \qquad b \in [1,2]$$

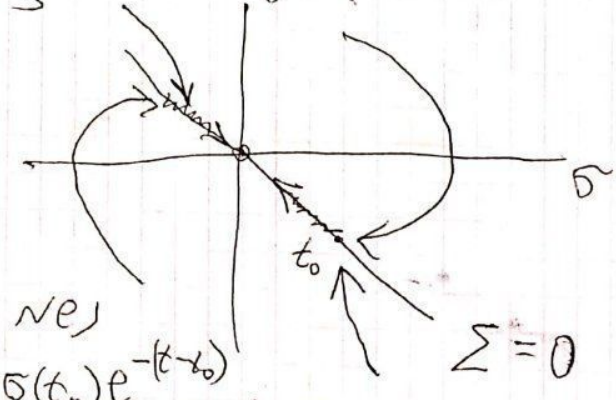
רצוי: $\sigma = x - x_c \to 0$, $|\ddot x_c|, |\dot x_c| \le 1$

שלב 1: $\Sigma = \sigma + \dot\sigma = (x - x_c) + (\dot x - \dot x_c)$

$\dot\Sigma = a + bu - \ddot x_c + \dot x - \dot x_c$

$|a - \ddot x_c - \dot x_c| \le 3$

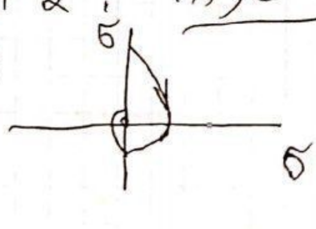
$u = -(4 + |\dot x|)\,\mathrm{sign}\,\Sigma$



נניח ב SM: $\Sigma = 0$
$\Rightarrow \dot\sigma + \sigma = 0 \Rightarrow \sigma = \sigma(t_0)e^{-(t-t_0)}$
$\dot\sigma = \dot\sigma(t_0)\,e^{-(t-t_0)}$

שלב שני: $\ddot\sigma = a - \ddot x_c + bu$, $|a - \ddot x_c| \le 2$

$u = -8\,\mathrm{sign}\,\sigma - 4\,\mathrm{sign}\,\dot\sigma$



התכנסות תוך זמן סופי!

בעיית הגדרה

Utkin ~1967 Equivalent control method .1

$$\dot x = v(t,x,u) = f(t,x) + g(t,x)u$$

$$u = \begin{cases} u_+(t,x) & \sigma(t,x)>0 \\ u_-(t,x) & \sigma(t,x)<0 \end{cases}, \quad \sigma, u \in \mathbb{R}$$

נניח $\sigma = 0$ נוצר ב-SM | rel. degree = 1

$$\sigma \equiv 0 \Rightarrow \dot\sigma \equiv 0 \qquad \dot\sigma = \sigma'_t + \sigma'_x f + \sigma'_x g u = 0$$

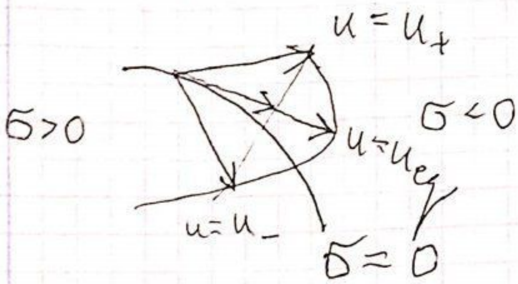
הגדרה: $\Leftarrow \; u_{eq} = -\dfrac{\sigma'_t + \sigma'_x f}{\sigma'_x g}, \quad \sigma'_x g \neq 0$

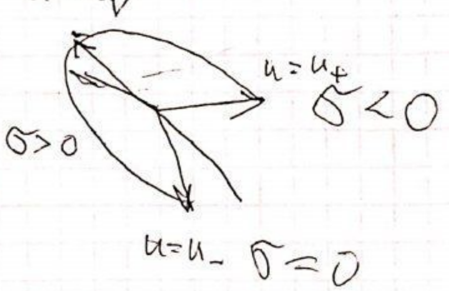
SM motion

$$\begin{cases} \dot x = v(t,x,u_{eq}(t,x)) \\ \sigma(t,x) = 0 \end{cases} \quad \text{(zero dynamics)}$$

מקרה כללי: $\sigma'_t + \sigma'_x v(t,x,u_{eq}) = 0$

$u = u_{eq}$





ההגדרה עובדת כאשר המערכת לינארית עם affine in u

Izosimov, 1976 .2

$$\begin{cases} \dot x_1 = -\operatorname{sign} x_1 \\ \dot x_2 = -\operatorname{sign} x_2 \\ \dot x_3 = \operatorname{sign} x_1 \cdot \operatorname{sign} x_2 \end{cases}$$

Euler integration:

$\tilde x_1(t_{k+1}) = x_1(t_k) + \operatorname{sign} x_1(t_k)\tau$

$\tilde x_2(t_{k+1}) = x_2(t_k) - \operatorname{sign} x_2(t_k)\tau$

$\tilde x_3(t_{k+1}) = x_3(t_k) + \operatorname{sign} x_1(t_k)\operatorname{sign} x_2(t_k)\tau$

$x_1, x_2 \to 0$

ונשארים קרובים ל-0

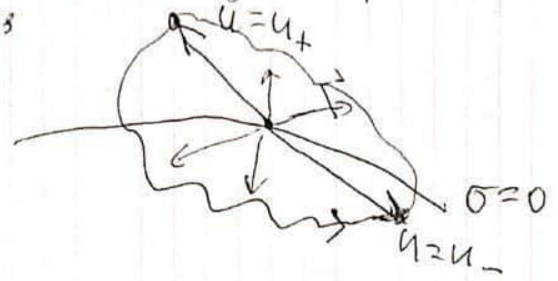
x_3 גדל בכל כיוון

אי אפשר לדעת מראש, תלוי בתנאי התחלה

ב. בעיה אחרת: מיתוג רציף

לוקח זמן לגוש לעבור מ-u_- ל-u_+, זמן קטן כמובן
ובערך הבקר יכול להישאר זמן מה
סביב איזה ערך ביניים.

Hysteresis



התנועה, בגלל כיוון אפשרי

מושגים נוספים

$x: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$

I. פונקציה רציפה בהחלט בקטע $[\alpha,\beta]$

absolutely continuous

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall n\ \sum_{i=1}^{n}|\Delta t_i|<\delta \Rightarrow \sum|\Delta x_i|<\varepsilon$$

כאשר $\Delta t_i = t_{i2}-t_{i1},\quad \Delta x_i = x(t_{i2})-x(t_{i1})$

$[t_{i1},t_{i2}]\subset[\alpha,\beta]$, $i=1,\dots,n$

$i\neq j \Rightarrow [t_{i1},t_{i2}]\cap[t_{j1},t_{j2}]=\emptyset$

פונקציה רציפה בהחלט גזירה ⇐ קיים קטע סביב נקודה

תכונות: $x(t)$ לפשיצית ⇐ רציפה בהחלט

Lipschitz, לפשיץ: $\|x(t_1)-x(t_2)\|\le L|t_1-t_2|$

הוכחה: $\sum|\Delta x_i| \le L\sum|\Delta t_i| \le L\delta$

2. כל פונקציות אלמנטריות (כמעט) לפשיציות
יוצא דופן! $|t|^\alpha,\ 0<\alpha<1$ ב $t=0$

3. f_1, f_2 רציפות בהחלט (סקלריות) ⇐

$f_1+f_2;\ f_1(f_2);\ f_1 f_2;\ f_1/f_2,\ f_2\neq 0$

גם רציפות בהחלט

II Σ-אלגברה (עם יחידה)

זאת מערכת קבוצות Σ

$$A_i \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

$$A \in \Sigma \Rightarrow \neg A \in \Sigma, \quad \emptyset \in \Sigma$$

$$\Rightarrow \bigcap_i A_i = \neg\Big(\bigcup_i \neg A_i\Big) \in \Sigma$$

$A \cup \neg A = E$ יחידה, $E \in \Sigma$

III מידה measure $\mu: \Sigma \to \mathbb{R}$

$$\mu(\emptyset) = 0, \ \forall A_i; \mu(A) \geq 0$$

אם $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$: $\mu\Big(\bigcup_i A_i\Big) = \sum_i \mu(A_i)$

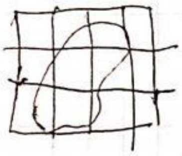
Σ-אלגברה, של קבוצות סגורות ב $\mathbb{R}^n$ (⇐ משלים פתוחות)

נקראות אלגברת Borel, $E = \mathbb{R}^n$

~~[illegible]~~

מידה ב Borel קבוצות – אורך (נפח)

$$\mu(\mathbb{R}^n) = \infty$$



יחידה: נפח

חלוקה של $\mathbb{R}^n$ לריבועים קטנים

IV השלמת לבג Lebesgue

G מדידה measurable, $\mu^*(G) = \inf \mu(A)$, $G \subset A$ מידה חיצונית, $\mu_*(G) = \sup \mu(A)$, $A \subset G$ פנימית

$\mu(G) \stackrel{def}{=} \boxed{\mu_*(G) = \mu^*(G) \text{ כאשר מתקיים}}$ (Jordan) הגדרה!

קבוצת Vitali: $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ נציג אחד מכל מנה

היא לא מדידה,

Banach Tarski! 1924

$B \subset \mathbb{R}^3$ ball כדור $\rightarrow$ {מספר סופי של תת קבוצות} $\rightarrow B_1 \cup B_2$ שני כדורים מאותו נפח

[illegible] ביחד

V פונקציה מדידה לפי Lebesgue

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

מקור של כל קבוצה מדידה לפי Borel
הוא קבוצה מדידה לפי Lebesgue

בצורה סימבולית:

Lebesgue $\to$ Borel

דוגמאות:

$\mathbb{Q}, \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

קו $\subset \mathbb{R}^n$ ישר

מידה 0: $\mu(\mathbb{Q}) = \mu(\mathbb{Z}) = 0$

כל פונקציה אלמנטרית היא מדידה לפי Lebesgue

פונקציה מדידה לפי Borel:

לפי Borel   Borel $\to$ Borel

פונקציה מדידה לפי בורל תמיד מדידה
לפי לבג Lebesgue.

$f_1(f_2)$ $\mathbb{R}^m \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}^k \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^n$

מדידה לפי Lebesgue   Lebesgue   Borel

מדידה לפי בורל $\mathbb{R}^m \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}^k \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^n$
וגם לבג   Borel   Borel

לא תמיד מדידה!! $\mathbb{R}^m \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}^k \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^n$

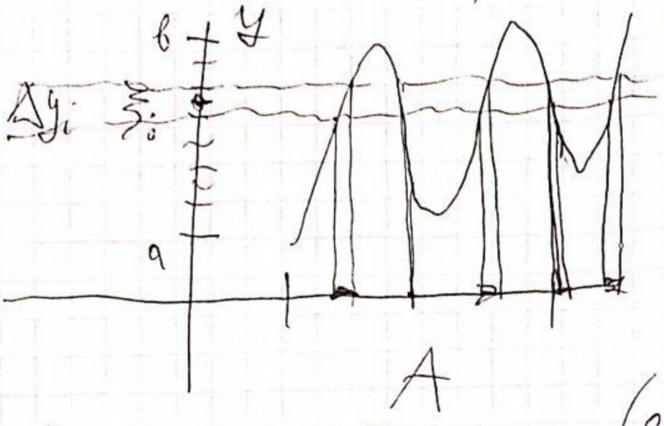
Lebesgue   Lebesgue

Lebesgue אינטגרל VI

מדידה לפי ל.ב.

נניח $f: A \to B \subset [a,b]$ מקרים

$A \in \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}$ מדידה לפי Lebesgue



$$I = \int_A f(x)\,dx$$

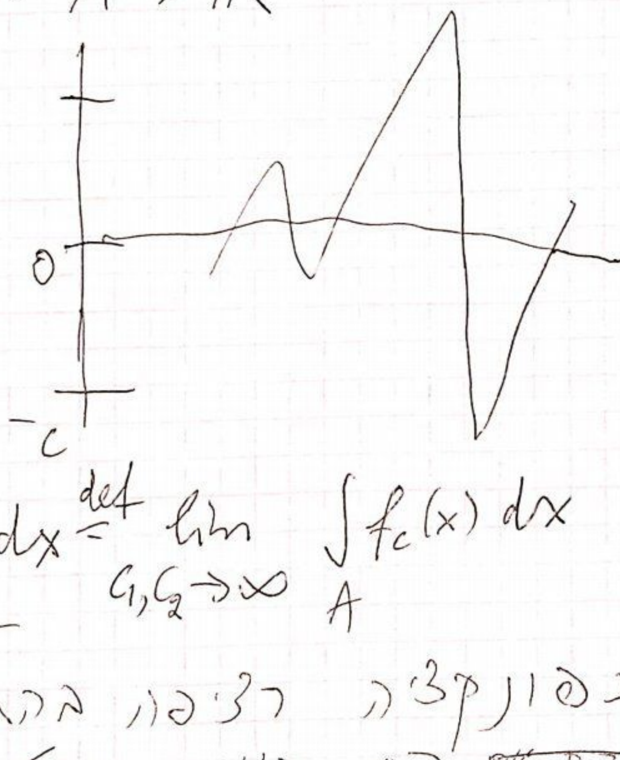
$$I = \lim_{\max|\Delta y_i| \to 0} \sum \xi_i \, \mu\left(f^{-1}(\Delta y_i)\right)$$

חלוקה בציר y

$$f: A \to \mathbb{R}$$

$$f_c = \begin{cases} c_1 & f(x) > c_1 \\ f(x) & |f(x)| \le c \\ -c_2 & f(x) < -c_2 \end{cases}$$

$c_1, c_2 > 0$



$$\int_A f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{c_1, c_2 \to \infty} \int_A f_c(x)\,dx$$

VII

$x(t)$ פונקציה רציפה בהחלט (בקטע) אם ורק אם ~~ורק אם~~ היא גזירה במעט בכל נקודה, הנגזרת אינטגרבילית לפי Lebesgue

$$x(t) = t_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)\,ds$$

-1

בפרט כל פונקציה ליפשיצית
היא רציפה בהחלט ומקיימת את הזהות

למשל $x(t)=|t|$

$$\dot{x}(t)=\begin{cases} 1 & t>0 \\ \text{אין} & t=0 \\ -1 & t<0 \end{cases}$$

$t_0<0,\ t>0$

$$|t| = t_0 + \int_{t_0}^{t} |t|' ds = t_0 + \int_{t_0}^{0}(-1)ds + \int_{0}^{t} 1\, ds =$$

$$= \cancel{t_0} + \cancel{|t_0|} + t = t$$

הכלה דיפרנציאלית

הצורך להגדיר את הפתרון של ODE
עם צד ימין לא רציף עוברת דרך
הכלה דיפרנציאלית Differential Inclusion (DI)

הגדרה $\dot{x} \in F(x) \subset \mathbb{R}^n$
פתרון הוא כל פונקציה $x(t)$ רציפה בהחלט לוקלית
שהיא מקיימת את ההכלה כמעט בכל t

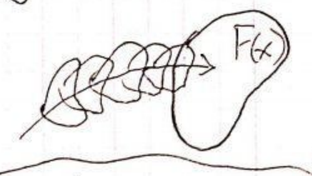
הגדרה הכלה $\dot{x} \in F(x)$ נקראת
הכלת Filippov אם לכל x

1. $F(x)$ לא ריקה, חסומה וסגורה (קומפקטית)
2. קמורה convex
3. חצי-רציפה מלמעלה

upper semicontinuous

נזכיר $\rho(x,y)=\|x-y\|$, $\rho(x,M)=\inf_{y\in M}\rho(x,y)$

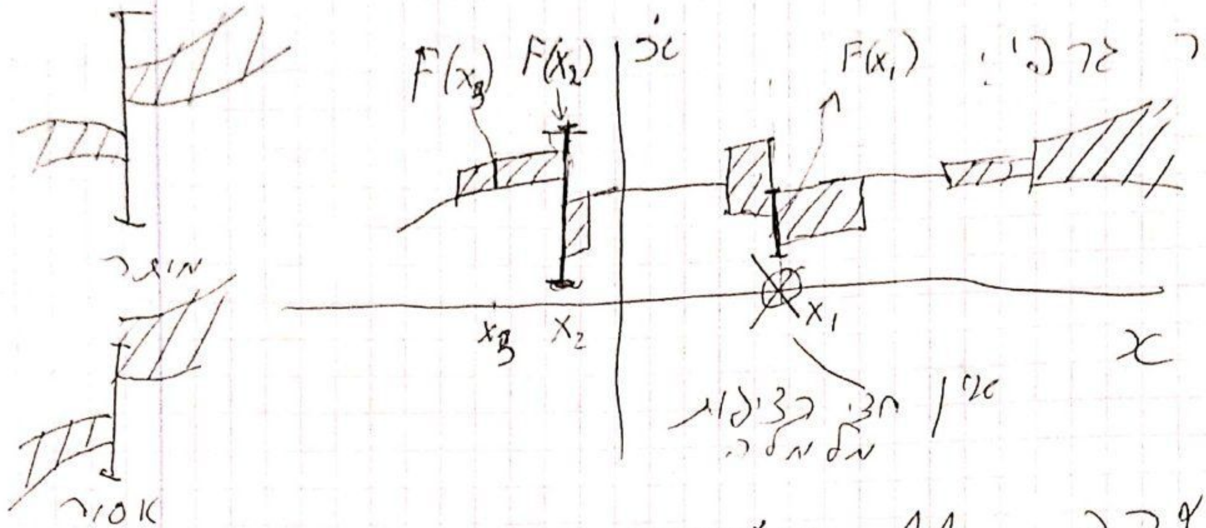
$$\lim_{x'\to x}\ \sup_{y\in F(x')} \rho(y,F(x)) = 0$$



הערה: מרחק Hausdorff

$$\rho(M,N)=\max\left[\sup_{x\in M}\rho(x,N),\ \sup_{y\in N}\rho(y,M)\right]$$

הסבר גרפי:



<u>הגדרה</u> M קמורה,

$$\forall k\ \forall x_1, x_2, \dots, x_k \in M\ \forall \alpha_1 \dots \alpha_k \geq 0,\ \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k = 1$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k \in M$$

צירוף קמור

<u>סימון</u> $\overline{M}$ - הסגור של M, coM קמור M

$\overline{co}M$ - קמור סגור

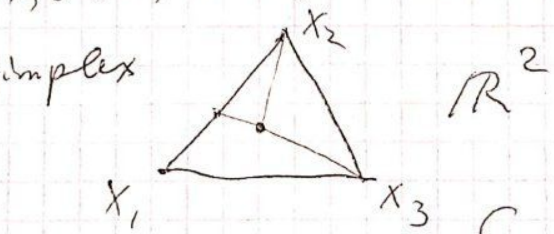
הגדרה: $\overline{co}M$ זאת הקבוצה הקטנה ביותר שהיא קמורה, סגורה, ומכילה M.

<u>משפט Caratheodory</u>

$M \subset \mathbb{R}^n$ חסום, סגור

אז:
$$coM = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \exists k \leq n+1,\ x_1, \dots, x_k \in M : x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i,\ \sum_i \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0 \right\}$$

כלומר: coM סגור (ספרה, את-ספרה, מרכוס)



לM חסום מתקבלים $\overline{co}M = co\overline{M}$

<u>הוכחה:</u> $\overline{M} \subset \overline{co}M \Rightarrow \underbrace{co\overline{M}}_{\text{קמור סגור}} \subset \overline{co}M \Rightarrow co\overline{M} = \overline{co}M$

משפט 1

$x_k : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

רציפות במ[illegible]

$\dot{x}_k \in M$ חסומה M- , $M \in \{x \mid \|x\| \le L\}$

אזי!

$x_k \rightrightarrows x(t) \Rightarrow$ רציפה $x(t)$

במידה שווה במ[illegible]

~~$\dot{x}(t) \in \overline{co} M$~~ ומקיימת

$t \in [a,b]$ ל $\dot{x}(t) \in \overline{co}\, M$

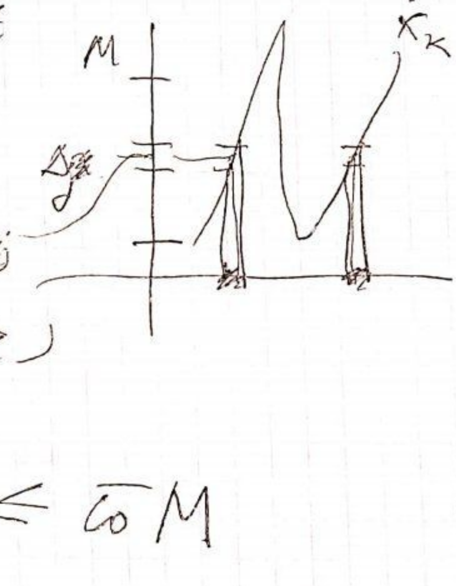
הוכחה:

$$\left|x_k(t') - x_k(t'')\right| \le \left|\int_{t''}^{t'} \dot{x}_k \, dt\right| \le L\,|t'-t''|$$

$\Leftarrow$ רציפות במ[illegible] $k \to \infty$ $|x(t') - x(t'')| \le L|t'-t''|$

$$q_{k,h} = \frac{x_k(t+h) - x_k(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \dot{x}_k(s)\, ds$$

$$= \lim_{\max|\Delta_j| \to 0} \frac{1}{h} \sum \dot{x}_{kj}\, \mu(\dot{x}_k^{-1}(\Delta_j))$$



$$\sum_j \mu\, \dot{x}_k^{-1}(\Delta_j) = h$$

$$\alpha_{kj} = \frac{\mu(\dot{x}_k^{-1}(\Delta_j))}{h}$$ כלומר

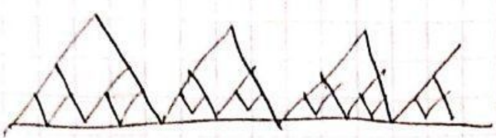
$$q_{k_h} = \lim_{\max|\Delta_j| \to 0} \sum_k \alpha_{kj}\, \dot{x}_{kj} \in \overline{co}\, M$$

$$\lim_{k \to \infty} q_{k_h} = \underbrace{\frac{x(t+h) - x(t)}{h}}_{q_h} \in \overline{co}\, M$$

$$\lim_{h \to 0} q_h = \dot{x}(t) \in \overline{co}\, M$$

כאשר ת"ק   מ.ש.ל.

דוגמא



$$x'_k = \pm 1$$
$$x_k \rightrightarrows 0$$
$$\dot{x} = 0 \in \overline{co}\{-1,1\} = [-1,1]$$

למה

תת-קבוצות של $\mathbb{R}^n$

פונקציה קבוצתית $F:\mathbb{R}^n \to 2^{(\mathbb{R}^n)}$

המקיימת את תנאי Filippov

קומפקטית וחצי-רציפה מלמעלה,

אז $F(x)$ ~~[illegible]~~ חסומה

על כל קומפקט $x \in K \subset \mathbb{R}^n$.

הוכחה: בדיוק כמו במד"ר

לכל נק' x יש סביבה Ω_x

מסויים

כדור המכיל $F(y) \subset F(x)$:$\forall y \in \Omega_x$

$\Leftarrow$ כיסוי סופי של K ... מ.ש.ל.

הגדרה M^ε - ניפוח M ב-ε, $M \subset \mathbb{R}^n$

$$M^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, M) \le \varepsilon\}$$

M חסום $\Leftarrow$ M^ε סגורה $\Leftarrow$ קומפקטי

$$\overline{co}\, M^\varepsilon = co\, M^\varepsilon = (co\, M)^\varepsilon \quad \text{(Filippov)}$$

הגדרה δ - פתרון זה פתרון להכלה

delta

$$\dot{x}_\delta \in [co\, F(x^\delta)]^\delta$$

למה 2.

$\dot{x}_k \in [co F(x^{\delta_k})]^{\delta_k}$, $t\in[\alpha,\beta]$

בקטע $x_k \rightrightarrows x$, $\delta_k \to 0$

אז $x(t)$ רציפה, בהחלט ב-$[\alpha,\beta]$
ומקיימת $\dot{x}\in F(x)$

הוכחה

$\forall t_0 \in [\alpha,\beta]:\ x_0=\lim_{k\to\infty} x_k(t_0)$

$\forall\varepsilon>0$ ניקח סביבת x_0 כך שבה

$F(x)\subset F(x_0)^{\varepsilon}$ (מחצי-רציפות מלמעלה)

$t\in[\alpha_1,\beta_1]\subset[\alpha,\beta]$, $t_0\in$

$\dot{x}_k \in (co F(x^{\delta_k}))^{\delta_k} \subset (co F(x_0)^{\varepsilon})^{\delta_k}$

$= (F(x_0)^{\varepsilon})^{\delta_k} = F(x_0)^{\varepsilon+\delta_k} \subset F(x_0)^{2\varepsilon}$

$\dot{x}_k \in F(x_0)^{2\varepsilon} \Rightarrow \dot{x}\in \overline{co}F(x_0)^{2\varepsilon} = F(x_0)^{2\varepsilon}$ (למה 1)

($x(t)$ - רציפה, בהחלט)

זה נכון לכל $\varepsilon>0$ $\Leftarrow$ $\dot{x}\in F(x_0)$ ב-t_0

אם $x(t)$ גזירה, ב-t_0

$\Leftarrow$ מתקיים $\dot{x}\in F(x)$

כ.ב.מ.

משפט קיום פתרון לוקלי

ה, כלל Filippov $\dot{x}\in F(x)$, $F: G\to 2^{R^n}$

$\exists$ פתרון $x(t_0)=x_0$ $\quad V=\{x \mid \|x-x_0\|\le b\}\subset G$

לתנאי התחלה, $\quad$ כדור

$m=\sup\{\|y\| \mid y\in F(x),\ x\in V\}$, $d=\frac{b}{m}$

$\Leftarrow$ הפתרון קיים ב- $t\in[t_0-d,t_0+d]$
(לא יחיד)

קומה:

תזכורת! משפט Arcela

סדרת פונקציות $x_k(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta$ ש: $\forall t_1,t_2\in[\alpha,\beta]$, $\forall k$ ~~$x_k(t_1)$~~

$$|t_1-t_2|<\delta \Rightarrow \|x_k(t_1)-x_k(t_2)\|<\varepsilon$$

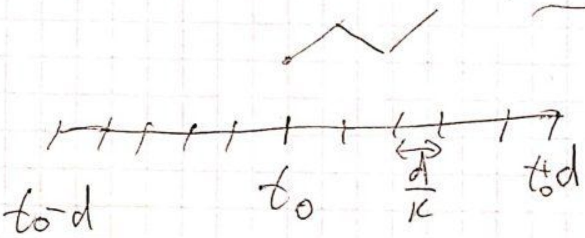
זה נקרא Equicontinuity

אז לסדרה $x_k(\cdot)$ קיימת תת-סדרה

$$x_{k_\ell} \rightrightarrows x_* \quad \ell\to\infty,\ t\in[\alpha,\beta]$$

(x_* – רציפה (ומקיימת אלו תנאי של equicontinuity

הוכחת משפט Filippov



$t\in[t_j,t_{j+1}]$, $\dot x_k(t)\in F(x_k(t_j))^{\frac{dm}{k}}$

Euler Integration $x_k(t_{j+1}) = x_k(t_j)+\dot x_k(t_j)\cdot\frac{d}{k}$, $\dot x_k(t_j)\in F(x_k(t_j))$

$\|\dot x_k(t_j)\|\le m$, $\dot x_k\in \left(\mathrm{co}\,F(x_k^{\frac{dm}{k}})\right)^{\frac{dm}{k}}$ ערך ליפשיץ

⇐ תכונת ליפשיץ ⇐ equicontinuity

⇐ $\exists x_{k_\ell}\rightrightarrows x$

למה 2 ⇐ $\dot x\in F(x)$

מילון.

מקרה פרטי $\dot x=f(x)$, $f\in C$

משפט קיום הפתרון // לא צריך תכונת ליפשיץ של f,