הרצאה 3

Single-link flexible-joint robot

דוגמא

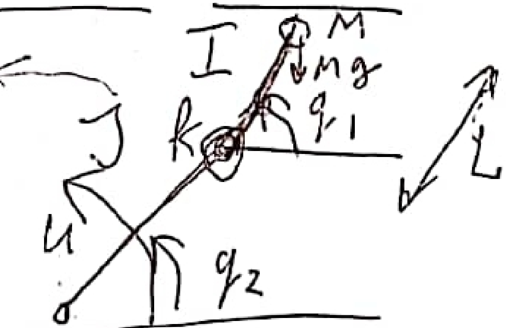
קפיץ עם מקדם גמישות k

q_1, q_2 – זוויות

I, J – מומנט אינרציה

$x = (q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)$ פוזיציות

u – מומנט פיתול



$$\begin{cases} I\ddot{q}_1 + MgL\cos q_1 + k(q_1 - q_2) = 0 \\ J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = u \end{cases}, \quad h = x_1 = q_1$$

המשך

$z_1 = h,\ z_2 = \dot h, \dots$

$z_2 = \dot h = \dot x_1 = x_2 = z_2$

$z_3 = \ddot h = \ddot x_1 = \frac{Mgl}{I}\cos x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) = z_3 = \dots + \frac{k}{I} q_2$

$z_4 = \dddot h = \dddot x_1 = \dddot q_1 = \dots + \frac{k}{I}\dot q_2$

$\dot z_4 = q_1^{IV} = \dots + \frac{k}{I}\ddot q_2 = \dots + \frac{k}{IJ}u$, $\neq 0$, $\boxed{r = 4}$

<u>משפט</u> אם קיים rel. degree אזי $r \le n$

המערכת מקבלת את הצורה

$z_1 = h,\ z_2 = \dot h,\ \dots,\ z_r = h^{(r-1)} = L_f^{r-1} h$ ($\dot h = L_f h$)

$\dot z_1 = z_2$

$\dot z_2 = z_3$

$\vdots$

$\dot z_{r-1} = z_r$

$h^{(r)} = \dot z_r = L_f^r h + L_g L_f^{r-1} h \cdot u$, $\neq 0$

$z_1, \dots, z_r$ - בלתי תלוים במובן ש $\nabla z_1 \dots \nabla z_r$ בלתי תלויים

ואפשר למצוא אותם ג עוד (קואורדינטות) $\xi_1, \dots, \xi_{n-m}$

כך ש — (∇t), $\nabla \xi_1 \dots \nabla \xi_{n-m}$, $\nabla z_1 \dots \nabla z_r$ בלתי תלויים

ומתקיים

$\dot\xi = \psi_1(z, \xi, t) + \psi_2(z, \xi, t) u$

או

$\dot\xi = \psi_1(z, \xi) + \psi_2(z, \xi) u$

ויותר מכך אפשר לקבל $\psi_2 \equiv 0$ (ייחודי למקרה SISO)

אפשר להציג מקרה חשוב

$$\dot z_r = h^{(r)} = \tilde u = \underbrace{L_f^r h}_{\alpha(z)} + \underbrace{L_g L_f^{r-1} h}_{\beta(z)\neq 0} u$$

$\alpha(z,t)$ או $\beta(z,t)$ או

אם $r=n$ אז אין ξ
ומקבלים Feedback linearization

$$\begin{cases} \dot z_1 = z_2 \\ \vdots \\ \dot z_r = \tilde u \end{cases}$$

Brunowski System
Controllability form

$$h^{(r)} = \alpha(x,t) + \beta(x,t)\,u \quad (1)$$

$$u = -\alpha/\beta \Rightarrow$$

הגדרה

הדינמיקה המתאימה ל

$z_1 \equiv z_2 \equiv \dots \equiv z_r \equiv 0$ $z_1 \equiv 0,\ u = -\alpha/\beta$

נקראת Zero dynamics

ב-Sliding mode control קוראים $u_{eq} = -\alpha/\beta$
u equivalent
בקר אקוויוולנטי

משפט (Isidori)

Feedback linearization

לינאריזציה ע"י משוב קיימת $\Leftrightarrow$

קיים $z_1(x)$ כך ש- rel. degree $= n$

transfer function

פונקציית תמסורת   תזכורת

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_0 u$$

a(d/dt) y = b(d/dt) u

$b_m \neq 0,\ m \leq n$

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

$s \sim \frac{d}{dt}$

$$Y = G(s) U(s)$$

transform התמרת Laplace

$y(\cdot) \in a(D)^{-1} u$ a(d/dt) y = u

$y(\cdot) + Y_h = a(D)^{-1} u$

פתרון כללי

איך לממש?   דוגמה:

$$G(s) = \frac{1}{\underbrace{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}_{a(s)}}$$

$y = x_0$

קל לממש!

$\dot{x}_0 = x_1 = \dot{y}$

$\dot{x}_1 = x_2 = \ddot{y}$

$\dot{x}_{n-2} = x_{n-1} = y^{(n-1)}$

$\dot{x}_{n-1} = -a_0 x - \dots - a_{n-1} x_{n-1} + u$

$$G = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \Rightarrow y = b_m x_m + \dots + b_0 x_0$$

$$y = b\left(\frac{d}{dt}\right) x_0$$

$y = b_m x_0^{(m)} + \dots$

$\dot{y} = b_m x_0^{(m+1)} + \dots$

$\boxed{r = n - m}$

$y^{(n-m)} = b_m x^{(n)} + \dots = b_m(\dots + u) + \dots$

מ"ת גלגי ממומש לא ישים

ניקח $u = u_*(t) + \underbrace{\varepsilon\cos(\omega t)}_{\text{רעש}}$

מלינאריות ⟵ $y = y_* + y_{\text{רעש}}$

כאשר $y_{\text{רעש}}$ זה תגובה לרעש

זה חלק ממשי של תגובה ל $y^c_{\text{רעש}} = \varepsilon e^{i\omega t}$

לכן ניקח $u = \varepsilon e^{i\omega t}$, $s = i\omega$

$u = \varepsilon e^{st}$ ונחפש פתרון בצורה

$y = c e^{st}$

אז $k \in \mathbb{N}$: $y^{(k)} = c s^k e^{st}$, $u^{(k)} = \varepsilon s^k e^{st}$

מציבים: $c(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0)e^{st} = \varepsilon(b_m s^m + \dots + b_0)e^{st}$

$$c = \varepsilon \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}, \quad m > n$$

כמובן אין רזוננס ⇐ $|s| = \omega$, $\lim_{|s|\to\infty} c = \infty$

לכן התגובה לרעש קטן אינפיניטזימלי היא גדולה, עד אין סוף

הרעש תמיד קיים ⇐ המערכת לא ישימה.

מקרה פרטי: גוזר אידיאלי מקיים משוואה

$y = \dot{u}$, $G(s) = s$

המערכת כזו לא ישימה,
אבל אפשר לממש פונקציית תמסורת

$$\frac{s}{1 + \varepsilon_0 s^2}, \quad 0 < \varepsilon_0 \ll 1$$

כזו מערכת תייצר קירוב של נגזרת
וגם תסנן רעשים של תדרים גבוהים

אנחנו נבנה גוזר מדויק וגם רובוסטי
אבל הוא לא יהיה מדויק לכל f

דוגמא

המערכת:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3^2 \\ \dot{x}_3 = u \\ y = x_1^3 \end{cases}$$

פלט: $f = \begin{pmatrix} x_2^3 - x_3 \\ x_2 + x_3^2 \\ 0 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$h = x_1^3$

~~[crossed out]~~

$$\dot{y} = 2x_1^3(x_2^3 - x_3) = \dots - 2x_1^3 x_3$$

$$\ddot{y} = \underbrace{\dots}_{L_f^2 y} \underbrace{- 2x_1^3 u}_{L_g L_f y \not\equiv 0}$$

לכן

הסדר היחסי (rel. degree) לא קיים!

כי $L_g L_f h$ לא אפס זהותי

אבל מתאפס בכל נקודות $(0, x_2, x_3)$

ניקח פלט אחר!

$$\hat{y} = y^{\frac{1}{3}} = x_1$$

$$\dot{\hat{y}} = \dots - x_3, \quad \ddot{\hat{y}} = \dots - u, \quad L_g L_f \hat{y} = -1, \quad \boxed{r = 2}$$

Zero dynamics: $z_1 = x_1 = 0, \dot{x}_1 = 0, \Updownarrow$

$\dot{z}_2 = \dot{x}_1 = x_2^3 - x_3 \qquad x_3 = x_2^3$

$\ddot{x}_1 = 0 \Rightarrow \underbrace{3x_2^2(x_2 + x_3^2)}_{u_{eq}} - u = 0$

$\xi = x_2$

קואורדינטות חדשות:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^3 - x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$z_1 = 0 \qquad \dot{z}_1 = z_2 = 0 \qquad \dot{z}_2 = \ddot{z}_1 = 0$

$x_1 = 0, \quad x_3 = x_2^3, \quad u = 3x_2^2(x_2 + x_3^2)$

zero dynamics: $\boxed{\dot{x}_2} = x_2 + x_3^2 = \boxed{x_2 + x_2^6}$

פיצוץ תוך זמן סופי: non-minimum phase

אפשר להוכיח

דוגמא

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = tg\, x_2 - u \\ \dot{x}_2 = u \\ y = x_1 \end{cases}$$

היציאה: לגזור x_1

rel. degree $r = 1$

Zero dynamics: $x_1 = 0,\ \dot{x}_1 = 0 \cdot tg\, x_2 - u = 0$

$\Rightarrow \dot{x}_2 = tg\, x_2$ אין יציבות

~~פתרון (כלל אחד)~~

יש רק פתרון אחד בדינמיקה אפס והוא לא מתכנס

$x_2 \equiv 0$ צריך לשנות אות

פתרון! נגדיר פלט חדש $z_1 = x_1 + x_2$

$\dot{z}_1 = tg\, x_2 - u + u = z_2$

$\dot{z}_2 = \ddot{z}_1 = \frac{1}{\cos^2 x_2}\dot{x}_2 = \frac{1}{\cos^2 x_2} u = \tilde{u}$

Feedback linearization

המערכת הגיעה ל controllable form

נבחר; $\tilde{u} = -z_1 - z_2$

$\dot{z}_2 + z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow \ddot{z}_1 + \dot{z}_1 + z_1 = 0 \quad z_1, \dot{z}_1 \to 0$

$[x_1 + x_2 \Rightarrow 0,\ tg\, x_2 \to 0] \to x_2 \to 0,\ x_1 \to 0$

$u = \cos^2 x_2 \cdot \tilde{u} = \cos^2 x_2(-x_1 - x_2 - tg\, x_2)$

Slotine p.266

Vector relative degree

הגדרה:

MIMO — Multi Input Multi Output

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = f(x) + g_1(x)u_1 + \dots + g_m(x)u_m$$

$$g(x) \in \mathbb{R}^{n\times m},\quad u \in \mathbb{R}^m,\quad x = (\bar{x}, t)^T$$

$$y = h(x),\quad h: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^m \qquad x = \bar{x} \text{ או}$$

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ או}$$

$$\dot{h}_i = \nabla h_i (f + gu) = L_f h_i + L_{g_1} h_i u_1 + \dots + L_{g_m} h_i u_m$$

1. $\forall i\ \exists r_i:\ L_{g_j} L_f^k h_i = 0 \quad k = 0,1,\dots,r_i - 1,\ j = 1,\dots,m$

$$\exists j:\ L_{g_j} L_f^{r_i - 1} h_i \not\equiv 0$$

$r = (r_1, r_2, \dots, r_m)$
total rel. degree $|r| = r_1 + r_2 + \dots + r_m$

$$\begin{pmatrix} h_1^{(r_1)} \\ h_2^{(r_2)} \\ \vdots \\ h_m^{(r_m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_f^{r_1} h_1 \\ L_f^{r_2} h_2 \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1 - 1} h_1, & \dots, & L_{g_m} L_f^{r_1 - 1} h_1 \\ L_{g_1} L_f^{r_2 - 1} h_2, & \dots, & L_{g_m} L_f^{r_2 - 1} h_2 \\ & \dots & \\ L_{g_1} L_f^{r_m - 1} h_m, & \dots, & L_{g_m} L_f^{r_m - 1} h_m \end{pmatrix}}_{G} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

High-Frequency Gain Matrix G

2. דרישה $\det G = \det\left[\left(L_{g_j} L_f^{r_i - 1} h_i\right)\right] \neq 0$

תשובה: אם אפשר להגדיר את הקואורדינטות

$$z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1r_1}, \dots, z_{m1}, \dots, z_{m,r_m}$$

מודל לא t, $z_{ij} = h_i^{(j-1)},\quad j = 1,2,\dots,r_i,\ i = 1,2,\dots,m$

$$\dot{\xi} = \Psi(z, \xi, t) + \Psi_1(z, \xi, t)u,\quad \xi \in \mathbb{R}^{n - r_1 - \dots - r_m}$$

מקדם לא אוטונומי

(35a)

SISO - Single Input Single Output

MIMO - Multi Input Multi Output

Linear MIMO Canonical Controllability form

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + b_1 u_1 + \dots + b_m u_m$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b_j \in \mathbb{R}^n$, $u_j \in \mathbb{R}$, $b_j \neq 0$ [illegible] rank $B = m$

Controllability matrix, criterion:

$$\text{rank}\left[B \; AB \; A^2B \; \dots \; A^{n-1}B\right] = n$$

[illegible]

$$\overbrace{b_1 \; Ab_1 \dots A^{\mu_1-1} b_1}^{\mu_1} \; b_2 \; Ab_2 \dots A^{\mu_2-1} b_2 \dots b_m \; Ab_m \dots A^{\mu_m-1} b_m$$

$A^{\mu_1} b_1 \in \text{Span}\{b_1, \dots, A^{\mu_1-1} b_1\}$ [illegible] $j = 1$

...

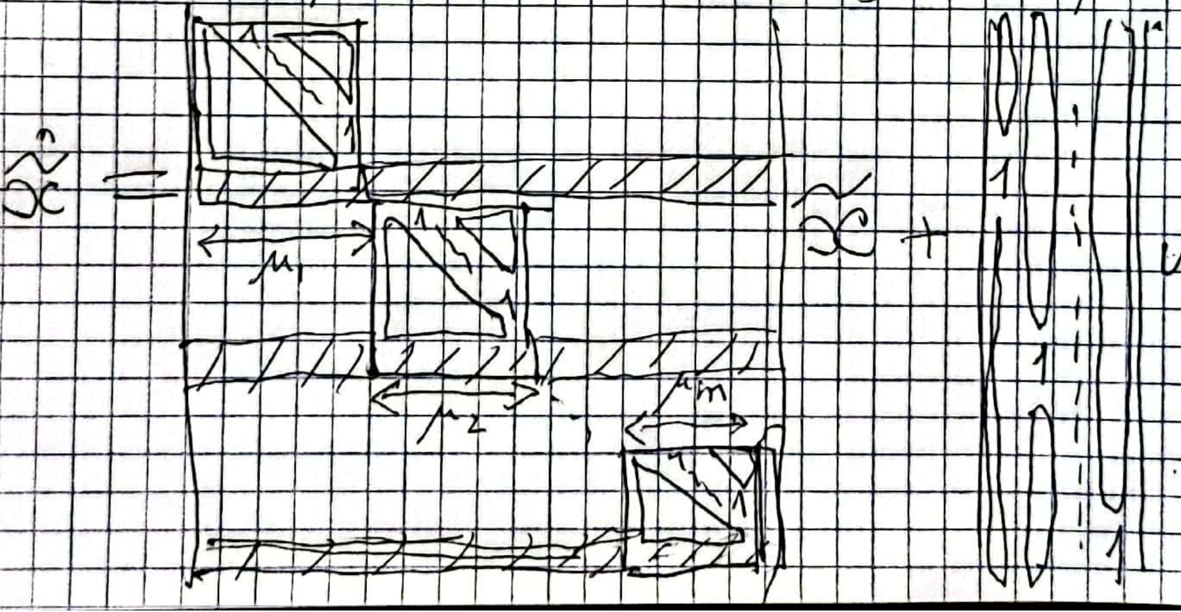
$A^{\mu_j} b_j \in \text{Span}\{b_1 \dots A^{\mu_1-1} b_1 \dots b_j \dots A^{\mu_j-1} b_j\}$, $j = 2, \dots, m$

$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m = n$ controllability indices

nonnegative

$e_{\mu_1} = \tilde{b}_1$, $e_{\mu_1+\mu_2} = \tilde{b}_2$, …, $e_n = \tilde{b}_m$

[illegible]



35b

```
% Example of deriving the canonical form for a MIMO system.
% ME 6210 - Spring 2003 - Mark Minor
A=[1 0 1 0 2 3;0 1 3 1 2 0;0 0 2 3 1 0; 0 0 0 1 4 1; 3 2 1 0 3 2;
1 0 2 1 1 1]
     1     0     1     0     2     3
     0     1     3     1     2     0
     0     0     2     3     1     0
     0     0     0     1     4     1
     3     2     1     0     3     2
     1     0     2     1     1     1
B=[1 0 0 2 0 0;0 1 0 0 0 0;0 0 0 0 0 1]'
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     0
     2     0     0
     0     0     0
     0     0     1
C=[1 0 2 0 0 0;0 0 0 0 0 1]
     1     0     2     0     0     0
     0     0     0     0     0     1

W=ctrb(A,B)
  Columns 1 through 6
     1     0     0     1     0     3
     0     1     0     2     1     0
     0     0     0     6     0     0
     2     0     0     2     0     1
     0     0     0     3     2     2
     0     0     1     3     0     1
  Columns 7 through 12
    22     4    10   162    28    70
    28     5     5   164    35    64
    21     2     5   121    36    57
    17     8    10   150    42    85
    28     8    17   269    52   110
    21     2     7   130    26    54
  Columns 13 through 18
   1211         246         509        9035        1952        3953
   1215         289         540        9458        2111        4222
    961         250         479        7992        1726        3528
   1356         276         579       10317        2088        4344
   2002         398         833       14936        3200        6451
    953         220         433        7444        1640        3312
rank(W)
     6
```

```
for i=1:18
    WR(i)=rank(W(:,1:i));
end;
WR
WR =
  Columns 1 through 13
     1     2     3     4     5     6     6     6     6     6
6     6     6
  Columns 14 through 18
     6     6     6     6     6

% The controllability index is determined by inspection of WR
rho=[2 2 2]
rho =
     2     2     2

% Since the first six columns of W are independent, we select
these for WA
WA=[W(:,1)'; W(:,4)'; W(:,2)'; W(:,5)'; W(:,3)'; W(:,6)']'
     1     1     0     0     0     3
     0     2     1     1     0     0
     0     6     0     0     0     0
     2     2     0     0     0     1
     0     3     0     2     0     2
     0     3     0     0     1     1

% Now for M...
M=inv(WA)
M =
   -0.2000         0   -0.1667    0.6000         0         0
         0         0    0.1667         0         0         0
    0.4000    1.0000   -0.0833   -0.2000   -0.5000         0
   -0.4000         0   -0.2500    0.2000    0.5000         0
   -0.4000         0   -0.5000    0.2000         0    1.0000
    0.4000         0         0   -0.2000         0         0

% Picking the rows out of M...
M1=M(rho(1),:)
M1 =
         0         0    0.1667         0         0         0
M2=M(rho(1)+rho(2),:)
M2 =
   -0.4000         0   -0.2500    0.2000    0.5000         0
M3=M(rho(1)+rho(2)+rho(3),:)
M3 =
    0.4000         0         0   -0.2000         0         0
```


MIMO Controllable Canonical Decomposition
ME EN 6210 – State Space Controls – Spring 2003
3/27/03

```
% Now to form P inverse:
PI=[M1; M1*A; M2; M2*A; M3; M3*A]
PI =
         0         0    0.1667         0         0         0
         0         0    0.3333    0.5000    0.1667         0
   -0.4000         0   -0.2500    0.2000    0.5000         0
    1.1000    1.0000   -0.4000   -0.5500    1.2500   -0.0000
    0.4000         0         0   -0.2000         0         0
    0.4000         0    0.4000   -0.2000         0    1.0000
P=inv(PI)
P =
   -2.5000    1.0000   -0.3333         0    2.1667         0
   -1.3500    0.0000   -2.5000    1.0000   -5.2500    0.0000
    6.0000         0         0         0         0         0
   -5.0000    2.0000   -0.6667   -0.0000   -0.6667   -0.0000
    3.0000         0    2.0000         0    2.0000         0
   -2.4000         0   -0.0000         0   -1.0000    1.0000

% Now the controllable system matrices...
Ac=PI*A*P
Ac =
    0.0000    1.0000   -0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000
    2.3000    3.5000    3.6667    0.3333    3.1667    0.8333
   -0.0000    0.0000    0.0000    1.0000    0.0000    0.0000
   17.6500    3.3500    0.8333    3.5000   -1.9167    5.2500
         0    0.0000    0.0000    0.0000         0    1.0000
    5.1000    5.4000    1.0000   -0.0000    2.5000    2.0000
Bc=PI*B
Bc =
         0         0         0
    1.0000         0         0
         0         0         0
         0    1.0000   -0.0000
         0         0         0
         0         0    1.0000
Cc=C*P
Cc =
    9.5000    1.0000   -0.3333         0    2.1667         0
   -2.4000         0   -0.0000         0   -1.0000    1.0000
```

```
% Example of deriving the canonical form for a MIMO system.
% ME 6210 - Spring 2003 - Mark Minor
A=[1 0 1 0 2 3;0 1 3 1 2 0;0 0 2 3 1 0; 0 0 0 1 4 1; 3 2 1 0 3 2;
1 0 2 1 1 1]
     1     0     1     0     2     3
     0     1     3     1     2     0
     0     0     2     3     1     0
     0     0     0     1     4     1
     3     2     1     0     3     2
     1     0     2     1     1     1
B=[1 0 0 2 0 0;0 1 0 0 0 0;0 0 0 0 0 1]'
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     0
     2     0     0
     0     0     0
     0     0     1
C=[1 0 2 0 0 0;0 0 0 0 0 1]
     1     0     2     0     0     0
     0     0     0     0     0     1

W=ctrb(A,B)
  Columns 1 through 6
     1     0     0     1     0     3
     0     1     0     2     1     0
     0     0     0     6     0     0
     2     0     0     2     0     1
     0     0     0     3     2     2
     0     0     1     3     0     1
  Columns 7 through 12
    22     4    10   162    28    70
    28     5     5   164    35    64
    21     2     5   121    36    57
    17     8    10   150    42    85
    28     8    17   269    52   110
    21     2     7   130    26    54
  Columns 13 through 18
   1211     246     509    9035    1952    3953
   1215     289     540    9458    2111    4222
    961     250     479    7992    1726    3528
   1356     276     579   10317    2088    4344
   2002     398     833   14936    3200    6451
    953     220     433    7444    1640    3312
rank(W)
     6
```

```
for i=1:18
    WR(i)=rank(W(:,1:i));
end;
WR
WR =
  Columns 1 through 13
     1     2     3     4     5     6     6     6     6     6
6     6     6
  Columns 14 through 18
     6     6     6     6     6

% The controllability index is determined by inspection of WR
rho=[2 2 2]
rho =
     2     2     2

% Since the first six columns of W are independent, we select
these for WA
WA=[W(:,1)'; W(:,4)'; W(:,2)'; W(:,5)'; W(:,3)'; W(:,6)']'
     1     1     0     0     0     3
     0     2     1     1     0     0
     0     6     0     0     0     0
     2     2     0     0     0     1
     0     3     0     2     0     2
     0     3     0     0     1     1

% Now for M...
M=inv(WA)
M =
   -0.2000         0   -0.1667    0.6000         0         0
         0         0    0.1667         0         0         0
    0.4000    1.0000   -0.0833   -0.2000   -0.5000         0
   -0.4000         0   -0.2500    0.2000    0.5000         0
   -0.4000         0   -0.5000    0.2000         0    1.0000
    0.4000         0         0   -0.2000         0         0

% Picking the rows out of M...
M1=M(rho(1),:)
M1 =
         0         0    0.1667         0         0         0
M2=M(rho(1)+rho(2),:)
M2 =
   -0.4000         0   -0.2500    0.2000    0.5000         0
M3=M(rho(1)+rho(2)+rho(3),:)
M3 =
    0.4000         0         0   -0.2000         0         0
```

```
% Now to form P inverse:
PI=[M1; M1*A; M2; M2*A; M3; M3*A]
PI =
         0         0    0.1667         0         0         0
         0         0    0.3333    0.5000    0.1667         0
   -0.4000         0   -0.2500    0.2000    0.5000         0
    1.1000    1.0000   -0.4000   -0.5500    1.2500   -0.0000
    0.4000         0         0   -0.2000         0         0
    0.4000         0    0.4000   -0.2000         0    1.0000
P=inv(PI)
P =
   -2.5000    1.0000   -0.3333         0    2.1667         0
   -1.3500    0.0000   -2.5000    1.0000   -5.2500    0.0000
    6.0000         0         0         0         0         0
   -5.0000    2.0000   -0.6667   -0.0000   -0.6667   -0.0000
    3.0000         0    2.0000         0    2.0000         0
   -2.4000         0   -0.0000         0   -1.0000    1.0000

% Now the controllable system matrices...
Ac=PI*A*P
Ac =
    0.0000    1.0000   -0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000
    2.3000    3.5000    3.6667    0.3333    3.1667    0.8333
   -0.0000    0.0000    0.0000    1.0000    0.0000    0.0000
   17.6500    3.3500    0.8333    3.5000   -1.9167    5.2500
         0    0.0000    0.0000    0.0000         0    1.0000
    5.1000    5.4000    1.0000   -0.0000    2.5000    2.0000
Bc=PI*B
Bc =
         0         0         0
    1.0000         0         0
         0         0         0
         0    1.0000   -0.0000
         0         0         0
         0         0    1.0000
Cc=C*P
Cc =
    9.5000    1.0000   -0.3333         0    2.1667         0
   -2.4000         0   -0.0000         0   -1.0000    1.0000
```

(Isidori)

Dynamic Extension

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$
$$y = h(x)$$

נניח מרובים

$y, u \in \mathbb{R}^m$, $x = \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

או $x = (\bar{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$r = (r_1, r_2, \dots, r_m) \in \mathbb{N}^m$ rel. degree של מערכת וקטורי

$$y^{(r)} = h^{(r)} = \begin{pmatrix} h_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ h_m^{(r_m)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} L_f^{r_1} h_1 \\ L_f^{r_k} h_k \\ L_f^{r_m} h_m \end{pmatrix}}_{L_f^r h} + \underbrace{\left(\overset{\leftarrow k \rightarrow}{G_1} \;\middle|\; \overset{m-k}{0} \right)}_{G} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

נסמן G High-Frequency Gain Matrix

אם כך G לא הפיכה, $G \not\equiv 0 \Rightarrow$ אין rel. degree.

נגדיר בקרים וירטואליים חדשים

$\dot{u}_{k+1}, \dots, \dot{u}_k$

כאשר $u_1, u_2, \dots, u_k$ - יהיו קואורדי' נוספות חדשות גם וירטואליים

עכשיו קיבלנו שב $h^{(r)}$ הבקר החדש $\tilde{u} = (\dot{u}_1 \dots \dot{u}_k\, u_{k+1} \dots u_m)^T$ בכלל לא מופיע.

נגזור עוד

$$y^{(r+(1,\dots,1))} = L_f^{r+(1..1)} h + \left(G_1 \,\middle|\, G_2 \right) \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

בקר חדש

כאשר G_2 - זאת מטריצה חדשה

$$G_2 = G_2(x, u_1, \dots, u_k)$$

אם יש לנו מזל $\det[G_1, G_2] \neq 0$

$\Leftarrow$ ~~...~~ הסדר היחסי החדש הוא

$$\tilde{r} = (r_1 + 1, \dots, r_m + 1)$$

$$\begin{cases} \dot x_1 = x_2 + u_1 \\ \dot x_2 = \sin x_2 + x_3 - u_1 \\ \dot x_3 = u_2 + t \\ \dot t = 1 \end{cases} \qquad f = \begin{pmatrix} x_2 \\ \sin x_2 + x_3 \\ \not{0} \\ 1 \end{pmatrix}, \; g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2, x_3, t)^T, \quad \dot t = 1$$

אין לנו relative degree כי

$$y^{((1,1))} = \begin{pmatrix} \dot x_1 \\ \dot x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ \sin x_2 + x_3 \end{pmatrix}}_{L_f^{(1,1)} y} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{G} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

$$\det G = 0, \quad G \neq 0$$

נכניס $\dot u_1$ כמצב חדש, u_1 כי אינטגרטור מצב

$$\dot u_1 = \tilde u_1 \qquad \dot u_1 = \tilde u_1$$

של מערכת

$$\begin{cases} \dot x_1 = x_2 + u_1 \\ \dot x_2 = \sin x_2 + x_3 - u_1 \\ \dot x_3 = u_2 + t \\ \dot u_1 = \tilde u_1 \\ \dot t = 1 \end{cases} \qquad \tilde x = (x_1, x_2, x_3, u_1, t)^T, \quad \tilde f = \begin{pmatrix} x_2 + u_1 \\ \sin x_2 + x_3 - u_1 \\ t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \tilde g = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נגזור (*) ונקבל

$$y^{((2,2))} = \begin{pmatrix} \ddot x_1 \\ \ddot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x_2 + x_3 - u_1 + \dot u_1 \\ \cos x_2 (\sin x_2 + x_3 - u_1) + u_2 + t - \dot u_1 \end{pmatrix}$$

$$y^{((2,2))} = \begin{pmatrix} \ddot x_1 \\ \ddot x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin x_2 + x_3 - u_1 \\ \cos x_2 (\sin x_2 + x_3 - u_1) + t \end{pmatrix}}_{L_{\tilde f}^{(2,2)} h = L_{\tilde f}^2 h} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde G} \begin{pmatrix} \tilde u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde r = (2,2), \quad (\tilde r_1 = \tilde r_2 \text{ כי מקרה}) \qquad \det \tilde G \neq 0$$

Feed Back Back-Stepping

Chapter 14.3, Khalil ספר

$$\begin{cases} \dot{\xi}_* = f(\xi) + g(\xi) z \\ \dot{z} = u \end{cases} \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,\ z, u \in \mathbb{R}$$

נניח $\dot{\xi} = f(\xi)$ יציבה, אסימפטוטית

$\Rightarrow$ נניח ידועה, פונקציית ליאפונוב $\exists\, V(\xi)$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \xi}(\xi) \cdot f(\xi) \le -w(\xi) \le 0$$

w מוגדרת חיובית

כאשר אומרת $z=0$ מייצב את ξ

היעד: לייצב גם יחד ξ, z

פתרון: נבחר

$$V_1 = V(\xi) + \frac{1}{2} z^2$$

$$\dot{V}_1 = \frac{\partial V}{\partial \xi} \cdot f + \frac{\partial V}{\partial \xi} g z + z u$$

$$= \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \xi} f}_{\le -w} + z\left(\frac{\partial V}{\partial \xi} g + u\right)$$

$\Leftarrow$ נבחר $u = -\frac{\partial V}{\partial \xi} g - z$

אז נקבל $\dot{V}_1 \le -w(\xi) - z^2 \le 0$

הצעד הבא!

$$\begin{cases} \dot{\xi} = f(\xi) + g(\xi) z, & z = z_*(\xi),\ g(0) \ne 0 \text{ מייצב את } \xi \\ \dot{z} = f_1(\xi, z) + g_1(\xi, z) u, & g_1 \ne 0 \text{ (לא מתאפס)} \end{cases}$$

מכאן מקבלים $\xi \equiv 0 \Rightarrow z = z_*(0) = 0$ -פתרון

$g(0) \ne 0$ גם כן

נרשום את המערכת בצורה

$$\dot{\xi} = \underbrace{f(\xi) + g(\xi) z_*(\xi)}_{f_0} + g(\xi)\underbrace{\left(z - z_*(\xi)\right)}_{z_1}$$

$V(\xi)$ פ.ל.

$$\dot{z}_1 = \left(z - z_*(\xi)\right)' = f_1(\xi, z) + g_1(\xi, z) u - \frac{\partial z_*}{\partial \xi}\left(f(\xi) + g(\xi) z\right)$$

$$\dot{z}_1 = \tilde{f}_1(\xi, z_1) + \underbrace{\tilde{g}_1(\xi, z_1)}_{g_1(\xi,\, z_1 + z_*(\xi))} u$$

$$V_1 = V(\xi) + \frac{1}{2} z_1^2$$ [illegible]

$$V_1 = V(\xi) + \frac{1}{2}\left(z - z_*(\xi)\right)^2$$

כאשר

$$\begin{cases} \dot{\xi} = f_0(\xi) + g(\xi) z_1 \\ \dot{z}_1 = \tilde{f}_1(\xi, z_1) + \tilde{g}_1(\xi, z_1 + z_*(\xi)) u = \tilde{u} \end{cases}$$

לכן כבר מציע Recursion

Strict Feedback form

$$\dot{x} = f_0(x) + g_0(x) z_1 \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ g_0(0) \neq 0$$

$$\dot{z}_1 = f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1) z_2 \qquad z_1 \in \mathbb{R},\ z_{1*}(\xi)$$

$$\dot{z}_2 = f_2(x, z_1, z_2) + g_2(x, z_1, z_2) z_3$$

מייצב את x

$g(0) \neq 0$: $x(t) \equiv 0 \Longrightarrow z_1 \equiv 0$ גם

$$\dots$$

$g_1, g_2, \dots, g_k \neq 0$

לא מאפסים

$$\dot{z}_k = f_k(x, \underbrace{z_1, \dots, z_k}_{z}) + g_k(x, z) u$$

Kokotovic, Freeman, Krstic 1990s

Khalil

Kokotovic: Joy of feedback, 1990