Controllability form.

הגד': קונטרולביליות

$$\dot x = Ax + bu, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}$$

משפט (Kalman) (A,B) בקר' (controllable)

אז קיימת מערכת קואורדינטות $\tilde x$ שבה מתקיים

$$\dot{\tilde x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \quad 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_n \end{pmatrix}}_{\tilde A} \tilde x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\tilde b} u$$

הערה, אחרת!

$$\dot{\tilde x}_1 = \tilde x_2$$

$$\dot{\tilde x}_{n-1} = \tilde x_n$$

$$\tilde x_1^{(n)} = \dot{\tilde x}_n = \tilde u = -\alpha_0 \tilde x_1 - \dots - \alpha_{n-1} \underbrace{\tilde x_n}_{\tilde x_1^{(n-1)}} + u$$

הוכחה אחר כך

הבחנה: קודם נראה אם $\dot x = Ax + bu$

כך $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$, בסיס e

$e_1, e_2, \dots, e_n$ בחר $\boxed{b = e_n}$ e

לפי משפט Hamilton, Cayley

$$P(\lambda) = (-1)^n \det(A-\lambda I) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0$$

$$\boxed{P(A) = 0}$$

לכן | עתה, בבסיס חדש שבו $e_n = b$

נזכיר שבבסיס חדש

$\underbrace{[e_1, e_2 \dots e_n]}_{E}$, $x = E\tilde{x}$, $\tilde{x} = E^{-1}x$, $e_1 \dots e_n \xrightarrow{E^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

הבסיס החדש בבסיס עצמו: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_n}$,

$$A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \alpha_{n-2}A^{n-2} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$$

נכפיל ב b מימין

$$A^n b + \alpha_{n-1}A^{n-1}b + \alpha_{n-2}A^{n-2}b + \dots + \alpha_1 A b + \alpha_0 b = 0$$

$$\underbrace{A\Big(\underbrace{A\big(\underbrace{A^{n-2}b + \alpha_{n-1}A^{n-3}b + \dots}_{Ae_3} + \alpha_2 b\big)}_{e_2} + \alpha_1 b\Big)}_{e_1} + \alpha_0 \underbrace{b}_{e_n} = 0$$

A עוברת ל $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ -\alpha_0 & \dots & \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \\ & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b} = \tilde{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

נקבל $Ae_1 = -\alpha_0 e_n$ מכאן

$Ae_2 = e_1 - \alpha_1 e_n$

$Ae_3 = e_2 - \alpha_2 e_n$

$\vdots$

$Ae_{n-1} = e_{n-2} - \alpha_{n-2} e_n$

$Ae_n = e_{n-1} - \alpha_{n-1} e_n$

$$A\underbrace{b}_{e_n} + \alpha_{n-1}\underbrace{b}_{e_n} = e_{n-1}$$

קיבלנו את הצורה

$$\dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & \cdots & & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}\hat{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

לא השתמשנו עדיין ב controllability !

איך לבחור את $e_1, e_2, \dots, e_n$ בלתי ת"ל ?

ברור ש $B \neq 0$ אחרת אין control

ננסה כך.

$$e_1 = A^{n-1}B + \alpha_{n-1}A^{n-2}B + \dots + \alpha_2 AB + \alpha_1 B = \cancel{\dots}$$

$$e_2 = A^{n-2}B + \alpha_{n-1}A^{n-3}B + \dots + \alpha_2 B$$

$$e_3 = A^{n-3}B + \alpha_{n-1}A^{n-4}B + \dots + \alpha_3 B$$

$$\vdots$$

$$e_{n-1} = AB + \alpha_{n-1}B$$

$$e_n = B$$

בכתיב e

n איברים

$$e_1 = \underbrace{\left[B \; AB \; \dots \; A^{n-1}B\right]}_{W} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \left[B \; AB \; \dots \; A^{n-1}B\right] \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$e_n = \left[B \; AB \; \dots \; A^{n-1}B\right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

W – controllability matrix

$\det W \neq 0$

$$E = \left[e_1 \; e_2 \dots e_n\right] = W \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & & & \alpha_{n-1} & \\ \vdots & & & & \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}}_{\det \neq 0} \qquad (*)$$

$\det E \neq 0$

מש"ל.

Brunowsky form

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2$$
$$\vdots$$
$$\dot{\tilde{x}}_{n-1} = \tilde{x}_n \qquad \tilde{x}_1^{(n-1)}$$
$$\dot{\tilde{x}}_n = \tilde{u} \quad (= -\alpha_0 \tilde{x}_1 - \dots - \alpha_{n-1} \tilde{x}_n + u)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \tilde{x}_1^{(n)} = \tilde{u}$$

במע"ר מוכיחים את הנוסחה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -\alpha_0 & \dots & & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = (-1)^n (\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0)$$

ראינו את כל עוד הגרם

לכן אפשר לקבל כל פולינום אפיוני ערך למערכת

לשלוט את כל מקדמי הפולינום

$$\tilde{p}(\lambda) = \lambda^n + \tilde{\alpha}_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \tilde{\alpha}_0$$

משוב רצוי

$$u = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})\tilde{x} - (\tilde{\alpha}_0, \dots, \tilde{\alpha}_{n-1})\tilde{x} = \underbrace{[(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) - (\tilde{\alpha}_0, \dots, \tilde{\alpha}_{n-1})]E^{-1}}_{\text{נסמנו } - K, \; K^T \in \mathbb{R}^n} x$$

$$\tilde{x} = E^{-1}x$$

Ackermann

נוסחה

כדי לקבל פולינום אופייני $\tilde{p}(\lambda)$

לכן רצוי

$$u = Kx, \quad \dot{x} = (A + BK)x$$

controllability matrix $\quad W = [B \; AB \; A^2B \; \dots \; A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\tilde{p}(\lambda) = (-1)^n \det(A + BK - \lambda I) \qquad \text{בוחר רצוי}$$

$$\boxed{K = -(0, \dots, 0, 1)W^{-1}\tilde{p}(A)}$$

קוכחה, אלכמרי

טוכמא

17

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W = \left[b, Ab\ A^2 b \right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & -34 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} 0.984 & -0.091 & -1.545 \\ 0.091 & 0.091 & 1.545 \\ -0.045 & -0.045 & -0.273 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{P}(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+5) = \lambda^3+8\lambda^2+17\lambda+10$$ 17a

$$\tilde{P}(A) = A^3+8A^2+17A+10I = \begin{pmatrix} 25 & 0 & -35 \\ -145 & 420 & 315 \\ 35 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

$$K = -(0,0,1)W^{-1}\tilde{P}(A) = (4{,}091, 19{,}091, 19{,}545)$$

$$u = Kx$$ כופר את המע' ה

Observability

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^m \\ y = Cx \end{cases}$$

נתון (מע"ש)

המטרה: לשחזר את $x(t)$ מהמדידות $y(t)$ כאשר אנו יודעים את A, B, C, $u(t)$ ונתונים.

הגדרה: $x_0\in\mathbb{R}^n$ נקרא מצב לא נצפה unobservable

אם $x(0)=x_0$, $u(t)=0\ \forall t\geq 0 \Rightarrow y(t)=0$

הזוג (A,C) נקרא observable אם אין מצבים לא נצפים חוץ מ-0.

תזכורת:
$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)u(s)ds$$

$$Cx(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)u(s)ds$$

נניח $\tilde{x}(0) = x(0) + x_0$

$$C\tilde{x}(t) = Ce^{At}x(0) + \cancel{Ce^{At}x_0} + \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)ds = Cx(t)$$

0

אי אפשר להבחין בין $\tilde{x}(t)$ ל- $x(t)$

הערה: ההגדרה מתאימה למערכות ליניאריות

המשערך המטרה, לשחזר $x(t)$:

שרואים רק $y(t)$, נניח אנו יודעים לגזור y

(במציאות לא יודעים לגזור אז צריך)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$\dot{y} = C\dot{x} = CAx + CBu$$

$$\ddot{y} = C\ddot{x} = CA\dot{x} + CB\dot{u} = CA^2x + \underbrace{CABu + CB\dot{u}}_{F_2 \cdot (u, \dot{u})}$$

$$y^{(n-1)} = CA^{n-2}\dot{x} + (\sim)\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \ddot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$= CA^{n-1}x + \underbrace{(\sim)\begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-2)} \end{pmatrix}}_{\text{ידוע}}$$

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \; \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-2)} \end{pmatrix}}_{\text{ידוע}}$$

ידועים

$$\text{rank}\ \cancel{\det} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \quad \text{אם} \quad \Leftarrow$$

$\Leftarrow$ אפשר לחשב x

מטריצת Observability

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \overset{\text{נגדיר}}{=} Q$$

Observability מטריצת Q

משפט (Kalman)

(A,C) observable $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$

הוכחה:

1, ξ בלתי נצפה $\Rightarrow$ $Ce^{At}\xi \equiv 0$

גוזרים ב $t=0$ ומקבלים

$C\xi = 0,\ CA\xi = 0,\ \dots \qquad Q\xi = 0$

2, נניח $\mathrm{rank}\, Q < n$ $\Rightarrow$ $\exists \xi : Q\xi = 0$

$\Leftarrow$ $Ce^{At}\xi \equiv 0$ (Hamilton משפט)

מ.ש.ל.

ברור ש (A,C) observable $\Leftrightarrow$ (A^T,C^T) controllable

בחירת בסיס ל (A^T,C^T)

שקול לבחירת בסיס של צורות ל (A,C)

אפשר לבחור פולינום אופייני ל $A^T + C^T K$

$\Leftarrow$ אותו פולינום אופייני ל $A + K^T C$

$\Leftarrow$ קיימת מטריצה L $(=K^T)$

כך ש- ל $A+LC$ יש פולינום רצוי:

נקבל

$A + LC = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ 0 & \ddots & 0 & \\ 0 & & 1 & \end{pmatrix}, \quad \tilde{y} = \tilde{x}_n$

מספור הפוך של הקואורדינטות נותן

$\hat{x} = \begin{pmatrix} -\alpha_{n-1} & 1 & & 0 \\ -\alpha_{n-2} & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ -\alpha_0 & & & \end{pmatrix} x, \quad y = \tilde{x}_1$ Observability form

יש גם נוסחת Ackermann לזה

Observer Luenberger (1964)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$
$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y) + Bu$$
$$\dot{\hat{x}} = \cancel{A}\hat{x} + LC(\hat{x} - x) + Bu$$

בוחרים L כך ש $A+LC$ Hurwitz

נסמן $\varepsilon = \hat{x} - x$

נקבל מהפרש המשוואות

$$\dot{\varepsilon} = (A + LC)\varepsilon \Rightarrow \varepsilon \to 0$$

Output feedback control

Hurwitz

$A+BK$	controllable	(A,B)
$A+LC$	observable	(A,C)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

הבקר

כ,13 פו:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\hat{x} & u = K\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y) \end{cases}$$

הפרש

$$\begin{cases} \dot{x} = (A+BK)x + BK\overbrace{(\hat{x} - x)}^{\varepsilon} \\ \dot{\varepsilon} = (A+LC)\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ \varepsilon \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} A+BK & BK \\ \cancel{A+LC} & A+LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

$x \to 0$

$\varepsilon \to 0$

$$P(\lambda) = P_{A+BK}(\lambda) \cdot P_{A+LC}(\lambda)$$ Hurwitz

הערה (ס.ת.ו.) Ackermann for observer

A, C observable $\Leftrightarrow$ rank $\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$

$Q = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$, $Q^T = \left(C^T, A^TC^T, \dots, (A^T)^{n-1}C^T\right)$

מחפשים L כך ש $P\left(A + LC\right)(\lambda I) = \hat{p}(\lambda)$

$P\left(\lambda I - (A^T + C^TL^T)\right) = \hat{p}$

$L^T = -(0,\dots,0,1)(Q^T)^{-1}\hat{p}(A^T) = -\left(\hat{p}(A)Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)^T$

$L = -\hat{p}(A)Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix}$

מקרה פרטי:

$A = \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, $c = (1\ 0 \cdots 0)$, $LC = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix}(1\ 0 \cdots 0) = \begin{pmatrix} \ell_1 & \\ \vdots & \\ \ell_n & \end{pmatrix}$

$A + LC = \begin{pmatrix} \ell_1 & 1 & & \\ \ell_2 & & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \\ \ell_n & & & 1 \end{pmatrix}$, $P(A+LC) = \lambda^n - \ell_1\lambda^{n-1} - \dots - \ell_n\lambda^0$

The normal observability form

כזכור / לאמן

$e^{A\tau} = I + \frac{\tau}{1!}A + \dots + \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1}$ $\quad A^n = A^{n+1} = \dots = 0$

symbolic calculation

$n = 2, 3$ $\quad n=2$, $e^{A\tau} = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$n=3$, $e^{A\tau} = \begin{pmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2} \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

בקרה לא ליניארית

Slotine, Li p. 207, ch. 6

$\dot{x} = f(x) + g(x)u = f(x) + g_1(x)u_1 + \dots + g_m(x)u_m$

$x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$

ברוב המקרים ($m=1$) נסתפק ב

בקרה לא לינארית

Slotine, Li p.207, ch.6

$$\dot{x} = f(x)+g(x)u = f(x)+g_1(x)u_1+\dots+g_m(x)u_m$$

$$x\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^m,\ g_i\in\mathbb{R}^n,\ m\le n$$

כאן הצורה אפינית ב Slotine, Khalil, Isidori

למרות שבעצם צריך להגיד ש $f, g_1, \dots, g_m$ שדות ווקטוריים

כאן אומרת שהם לא סתם פונקציות

$f, g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ לא מעניין

ברוב המקרים נסתפק ב $m=1$

נגזרות Lie

$$a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n \qquad a(x)=\begin{pmatrix}a_1(x)\\ \vdots\\ a_n(x)\end{pmatrix}$$

$$\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

הגדרה

$$L_a\varphi(x) = \nabla\varphi(x)\cdot a(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\cdot a(x)$$

$$\overset{\text{כיוונית}}{=} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)\,a_1(x)+\dots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x)\,a_n(x)$$

כאשר נגזרת של φ בכיוון $a(x)$ בנק' x

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k,\quad f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ \vdots\\ f_k(x)\end{pmatrix},\quad L_af(x)\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}L_af_1(x)\\ \vdots\\ L_af_k(x)\end{pmatrix}$$

תכונות:

$$L_a(\varphi+\psi)=L_a\varphi+L_a\psi$$

$$L_a(\lambda\varphi)=\lambda L_a\varphi,\quad \lambda\in\mathbb{R},\quad \varphi,\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

$$L_a(\varphi\cdot\psi)=(L_a\varphi)\psi+\varphi(L_a\psi)$$

$$L_{\psi a}\varphi=\psi L_a\varphi \qquad \left(L_{\psi a}\varphi=\nabla\varphi(\psi a)=\psi(\nabla\varphi a)\right)$$

<u>הערה</u>

$\left(L_a\varphi\right)(x)$ אינו תלוי בקואורדינטות $x(t)$

<u>וקטור משיק</u> Tangent vector

נניח $a\in\mathbb{R}^n$

ניקח קו $x(t)=x(0)+a_0t+o(t)$

מוגדר בסביבת $a_0=a(x_0)$, $x_0=x(0)$

אז נקבל

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\varphi(x(t))=\varphi'(x(0))\dot{x}(0)=\varphi'(x_0)\cdot a_0=L_a\varphi(x_0)$$

<u>הגדרה</u>

וקטור משיק $a_0\in T_{x_0}\mathbb{R}^n$ זאת קבוצת הקווים החלקים המוגדרים בסביבת $t=0$, ומקיימים $x(0)=x_0$ כך שההפרש של כל שני קווים מהקבוצה הוא $o(t)$

$$\lim_{t\to0}\frac{x_1(t)-x_2(t)}{t}=0$$

ברור שזה יחס שקילות,

קבוצה של כל ~~הקווים~~ וקטורים כאלה בנק' x_0 נקרא מרחב משיק Tangent Space בנק' x_0

$$a_0\in T_{x_0}\mathbb{R}^n$$

ההגדרה נכונה גם ליריעה manifold

קבוצה של כל הווקטורים המשיקים בכל הנקודות נקראת מרחב משיק ליריעה,

Tangent Space
Tangent bundle

$$T\mathbb{R}^n=\bigcup_{x\in\mathbb{R}^n}T_x\mathbb{R}^n$$

manifold גם TM $\Leftarrow$ manifold M

אנחנו מסתפקים ב $M=\mathbb{R}^n$

$$\dim TM=2\dim M$$
$$\dim T_xM=\dim M$$

מרחב לינארי - $T_{x_0}\mathbb{R}^n$ (או $T_{x_0}M$) 24

נניח $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $a,b\in T_{x_0}\mathbb{R}^n$

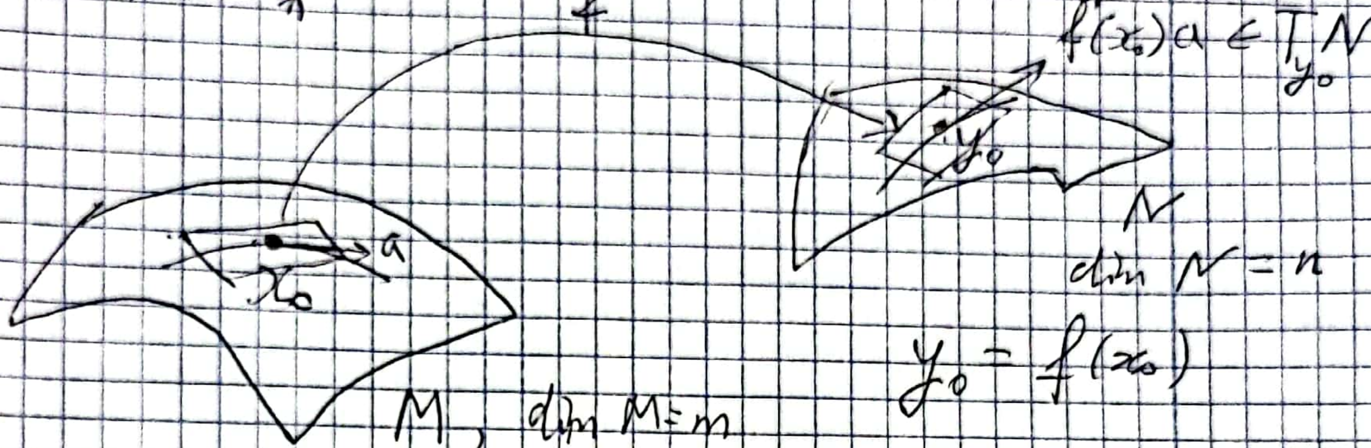
$a_*(t)\in a$, $b_*(t)\in b$

צ"ל:

$a_*(0)=x_0$, $b_*(0)=x_0$ אז

$$x_0+\alpha(a_*(t)-x_0)+\beta(b_*(t)-x_0)\in \alpha a+\beta b\in T_{x_0}\mathbb{R}^n$$

מוגדר היטב לא תלוי בבחירה של a_*, b_*.



$f: M\to N$ $\quad f'(x): T_xM\to T_{f(x)}N$

$f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$

$x(t)$, $x(0)=x_0$, תהי

$$f(x(t))=\underbrace{f(x(0))}_{y_0}+f'(x(0))\dot{x}(0)t+o(t)$$

לכן, לכל עבור

$$x(t)=x_0+\dot{x}(0)t+o(t)$$

החלפות קואורדינטות (25)

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (M דיפאו')

$x_0 \xmapsto{g} y_0 = g(x_0)$ — קואורדינטות חדשות

$a: \mathbb{R}^n \to T_x\mathbb{R}^n$ שדה וקטורי

$x(t) = \underset{x_0}{x(0)} + \underset{a}{\dot{x}(0)}\, t + o(t)$

$y(t) = g(x(t)) = \underset{y_0}{g(x_0)} + \underbrace{\underset{g'(y_0)}{g'(x_0)}\ \underset{a}{\dot{x}(0)}}\ t + o(t)$

וקטור a בקואורדינטות חדשות

$g: x \mapsto y$, $a \mapsto \hat{a}$ שדה וקטורי בקואורדינטות חדשות
קואורדינטות

$$\boxed{\hat{a}(y) = g'(g^{-1}(y))\, a(g^{-1}(y))} = \hat{a}(y)$$

נוסחה

מגדיר פונקציה: $\varphi: x \mapsto \varphi(x)$

$\hat{\varphi}: y \mapsto \varphi(g^{-1}(y)) = \varphi(x)$

לכן נגזרת Lie לא תלויה בקואורדינטות

$g: x_0 \mapsto y_0,\ y_0 = g(x_0)$

$L_a\varphi(x_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0)\cdot a(x_0)$

$L_{\hat{a}}\hat{\varphi}(y_0) = \varphi'(\underset{x_0}{g^{-1}(y_0)})\cdot \underset{(g^{-1})'(y_0)}{\frac{\partial x}{\partial y}(y_0)}\cdot \underset{g'(x_0)}{\frac{\partial y}{\partial x}(g^{-1}(y_0))}\ \underset{a(x_0)}{a(g^{-1}(y_0))}$

$= \varphi'(x_0)\cdot I\cdot a(x_0) = L_a\varphi(x_0)$

מ.ש.ל.

$$x(t) \to y(t)$$

קסנגר אחר!

$$\hat{a}(y_0) = \dot{y}\Big|_{t=0} = \frac{\partial y}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial y}{\partial x}(x_0)\underbrace{\dot{x}(0)}_{a(x_0)} = g'_x\left(g^{-1}(y_0)\right) a\left(g^{-1}(y_0)\right)$$

דוגמא

$$\varphi = tg\,x + x\cos y$$

$$a = \begin{pmatrix} x^2 y \\ \ln x \end{pmatrix}$$

$$L_a \varphi(x,y) = \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \cos y,\ -x\sin y\right)\begin{pmatrix} x^2 y \\ \ln x \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \cos x\right) x^2 y - x\sin y \ln x$$

תכונות:

$$L_f = L_g \Leftrightarrow f = g$$

הוכחה:

$$L_f x_i = \nabla x_i f = f_i$$

Input-State Linearization
(Feedback Linearization) SISO case

Relative degree

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x},t) + \bar{g}(\bar{x},t)u \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$$y = h(\bar{x},t) \qquad u \in \mathbb{R}$$

$$h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$$

מוסיפים קואורדינטה t, $\dot t = 1$

שני מקרים במקום: $x = (\bar{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

הגדרה

r נקרא relative degree
סדר יחסי

בנק' x_0 אם ישנה סביבת x_0 שבה

$$L_g h \equiv L_g L_f h \equiv \dots \equiv L_g L_f^{r-2} h \equiv 0$$

וגם $L_g L_f^{r-1} h(x_0) \neq 0$

מרציפות גם בסביבה

אם $r=const$ בתחום Ω $\forall (t,x) \in \Omega$
או $x \in \Omega$

אז אומרים ש r - system rel. degree

הסבר:

גוזרים h עד ש u מופיע בגזירה, בפעם הראשונה

$$\dot h = \frac{\partial}{\partial x} h\,(f+gu) = L_f h + \cancel{L_g h \cdot u} \qquad L_g h = 0$$

$$\ddot h = \nabla L_f h \cdot \dot x = \nabla L_f h\,(f+gu) = L_f^2 h + \cancel{L_g L_f h\, u}$$

$$L_g L_f h = 0$$

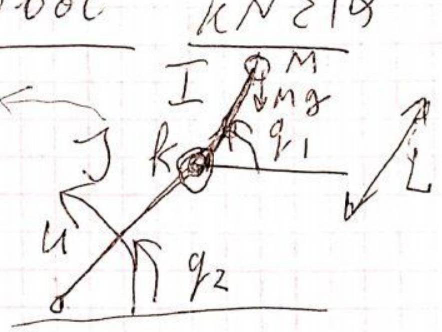
זהותית

...

$$h^{(r)} = L_f^r h + L_g L_f^{r-1} h\, u$$

בשום נק' x_0

Single-link flexible-joint robot **דוגמא**



קפיץ עם מקדם גמישות k ←

q_1, q_2 - זוויות

I, J - מומנט אינרציה

$x = (q_1, \dot q_1, q_2, \dot q_2)$ קואורדי(נ)ות

u - מומנט פיתול

$$\begin{cases} I\ddot q_1 + Mgl\cos q_1 + k(q_1 - q_2) = 0 \\ J\ddot q_2 - k(q_1 - q_2) = u \end{cases}, \quad h = x_1 = q_1$$