משפט רקורסיה נוסח אוניברסלי 130a

$\deg \sigma > 0 \quad p = -q \quad \deg t = p \in \mathbb{R}$

$\deg \dot\sigma = \deg \sigma - \deg t = \deg \sigma - p$

$\deg \sigma^{(k)} = \deg \sigma - kp = \deg \sigma + kq, \; k = 0, \ldots, r$

$\deg \sigma^{(r)} = \deg \sigma + rq > 0$

$AS: \quad \sigma^{(k)} + \varphi_k(\vec\sigma_{k-1}) = 0, \; 1 \le k \le r-1$

$\tilde\varphi_{k+1} : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}, \; \boxed{\tilde\varphi_{k+1} \in QC} \; \varphi_k \in C(\mathbb{R}^k)$

$\tilde\varphi_{k+1} \in QC$ פקודת סימון ל- $\sigma^{(k)} + \varphi_k(\vec\sigma_{k-1})$

$\deg \tilde\varphi_{k+1} = \deg \sigma^{(k+1)}$

אז לכל $\beta > 0$ גדול מספיק

$A,S \quad \sigma^{(k+1)} + \varphi_{k+1}(\vec\sigma_k) = 0, \; \varphi_{k+1} = \beta \tilde\varphi_k$

ולכל $\alpha > 0$ גדול מספיק

$u_{k+1} = -\alpha \tilde\varphi_k(\vec\sigma_k)$

$u_{k+1} = -\alpha \|\vec\sigma_k\|_h^{\deg \sigma^{(k+1)}} \operatorname{sign} \tilde\varphi_k(\vec\sigma_k)$

מייצבים אסימפטוטית

$\sigma^{(k+1)} \in [-C, C] \|\vec\sigma_k\|_h^{\deg \sigma^{(k+1)}} + [K_m, K_M] u_{k+1}$

דוגמא
כללית

131

$\gamma > 0$

$\forall A, B \in \mathbb{R} \quad A + B \overset{\text{sign equivalent}}{\sim} [A]^{\gamma} + [B]^{\gamma}$

$r = 1, q > -1 \qquad \dot{\sigma} + \beta_0 [\sigma]^{1+q} = 0 \quad AS$

$\forall a > 0 \qquad [\dot{\sigma}]^{\frac{a}{1+q}} + \beta_0^{\frac{a}{1+q}} [\sigma]^{\frac{a}{1}}$ sign equivalent

$r = 2, q \overset{\text{ok}}{>} -\frac{1}{2} \qquad \ddot{\sigma} + \beta_1 \left[[\dot{\sigma}]^{\frac{a}{1+q}} + \beta_0 [\sigma]^{\frac{a}{1}} \right]^{\frac{1+2q}{a}} = 0$ חיובי β_0

AS β_1 גדול מספיק

$[\ddot{\sigma}]^{\frac{a}{1+2q}} + \beta_1 [\dot{\sigma}]^{\frac{a}{1+q}} + \beta_0 [\sigma]^{\frac{a}{1}}$ sign equivalent

β_0, β_1 חיוביים

$r = 3, q \overset{\text{ok}}{>} -\frac{1}{3} \qquad \dddot{\sigma} + \beta_2 \left[[\ddot{\sigma}]^{\frac{a}{1+2q}} + \beta_1 [\dot{\sigma}]^{\frac{a}{1+q}} + \beta_0 [\sigma]^{\frac{a}{1}} \right]^{\frac{1+3q}{a}} = 0$

AS ש β_2 גדול מספיק

$[\dddot{\sigma}]^{\frac{a}{1+3q}} + \beta_2 [\ddot{\sigma}]^{\frac{a}{1+2q}} + \beta_1 [\dot{\sigma}]^{\frac{a}{1+q}} + \beta_0 [\sigma]^{\frac{a}{1}}$ sign equivalent, $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ חיוביים

[illegible] לכל r, $a > 0$, $q > -\frac{1}{r-1}$

קיים בקר הומוגני מהצורה

$$u_r = -\alpha \, \|\vec{\sigma}_{r-1}\|_h^{1+rq-a} \left([\sigma^{(r-1)}]^{\frac{a}{1+(r-1)q}} + \beta_{r-2} [\sigma^{(r-2)}]^{\frac{a}{1+(r-2)q}} + \dots + \beta_0 [\sigma]^{\frac{a}{1}} \right)$$

$\deg u_r = \deg \sigma^{(r)} = 1 + rq$

r-SMC מתאים למקרה $1 + rq = 0$, $q = -\frac{1}{r}$

$\deg u_r = 0, \quad u_r = -\alpha \, \|\vec{\sigma}_{r-1}\|_h^{-a} (\dots)$

למשל

$$u_r = -\alpha \frac{[\sigma^{(r-1)}]^{\frac{a}{1+(r-1)q}} + \beta_{r-2} [\sigma^{(r-2)}]^{\frac{a}{1+(r-2)q}} + \dots + \beta_0 [\sigma]^{\frac{a}{1}}}{|\sigma^{(r-1)}|^{\frac{a}{1+(r-1)q}} + \dots + \beta_0 |\sigma_0|^{\frac{a}{1}}}$$

אם $q = -\frac{1}{r}$,

$$\|\vec{\sigma}_{r-1}\|_h = \left(|\sigma^{(r-1)}|^{\frac{a}{1-(r-1)q}} + \beta_{r-2} |\sigma^{(r-2)}|^{\frac{a}{1-(r-2)q}} + \dots + \beta_0 |\sigma|^{\frac{a}{1}} \right)^{\frac{1}{a}}$$

נב' $q = -\frac{1}{r}$ ונקבל

$$u_r(\vec{\sigma}_{r-1}) = -\alpha \frac{[\sigma^{(r-1)}]^{ar} + \beta_{r-2}[\sigma^{(r-2)}]^{\frac{ar}{2}} + \dots + \beta_0 [\sigma]^{\frac{ar}{r}}}{|\sigma^{(r-1)}|^{ar} - - - + \beta_0 |\sigma|^{\frac{ar}{r}}}$$

QC זה

נסמן $ar = b$

$$u_r(\vec{\sigma}_{r-1}) = -\alpha \frac{[\sigma^{(r-1)}]^{\frac{b}{1}} + \beta_{r-2}[\sigma^{(r-2)}]^{\frac{b}{2}} + \dots + \beta_0 [\sigma]^{\frac{b}{r}}}{|\sigma^{(r-1)}|^{\frac{b}{1}} + \beta_{r-2}|\sigma^{(r-2)}|^{\frac{b}{2}} + \dots + \beta_0 |\sigma|^{\frac{b}{r}}}$$

"Simple" r-SMC, Ding, Levant, Li 2015

כאשר $b > 0$ כלל

תכונות QC

למה 1 יהיו $\varphi_1, \varphi_2 \in QC$, $\deg \varphi_1 = \deg \varphi_2 = 0$

$\varphi_1 = 0 \Leftrightarrow \varphi_2 = 0$

אז $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \left\{ \begin{smallmatrix} x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0 \end{smallmatrix} \middle| |\varphi_1(x)| \le \delta \right\} \subset \left\{ \begin{smallmatrix} x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0 \end{smallmatrix} \middle| |\varphi_2(x)| \le \varepsilon \right\}$

הוכחה: אם $\boxed{n = 1}$ אז

$\forall x > 0 \;\; \varphi_1(x) = \text{const}$

$\forall x < 0 \;\; \varphi_1(x) = \text{const}$

גם ל $\varphi_2(x)$ כנ"ל

רק לא (כנראה) ברור לא'

ריקה $\exists \delta : |\varphi_1| \le \delta$ ⇐ ...

$\boxed{n \ge 2}$

$S_{h1} = \{x \mid \|x\|_h = 1\}$ קומפקטית

נניח בשלילה

$\exists \varepsilon > 0 \, \forall \delta > 0 \;\; \exists x_\delta \in S_{h1} : \varphi_1(x_\delta) \le \delta, \; \varphi_2(x_\delta) \ge \varepsilon$

כאשר לא נכון.

$\delta_n \to 0$, $x_{\delta_{n_k}} \to x_*$, $\varphi_1(x_*) = 0$

$x_* \in \{x \mid \varphi_2(x) \ge \varepsilon\}$. $\varphi_2(x_*) = 0$

סתירה, מש"ל.

למה 2

5K

$\theta, A, B \in \mathbb{R}$, $|\theta| \le 1$, $0 \le \xi < 1$
$B \ge 0$, $(A,B) \ne (0,0)$

$$\frac{|A+B\theta|}{|A|+B} \le \xi \implies |A+B\theta| \le \frac{2\xi}{1-\xi} B$$

ברור ש-$B \ne 0$ אחרת $1 = \frac{|A|}{|A|} \le \xi < 1$ סתירה

נחלק ב-B, נסמן $\tilde{A} = \frac{|A|}{B}$, $\tilde{\theta} = \theta \cdot \operatorname{sign} A$

נקבל $\frac{|\tilde{A} + \tilde{\theta}|}{\tilde{A} + 1} \le \xi$, $\tilde{A} \ge 0$, $|\tilde{\theta}| \le 1$

צריך להוכיח $|\tilde{A} + \tilde{\theta}| \le \frac{2\xi}{1-\xi}$

שני מקרים:

(1) $0 \le \tilde{A} \le \frac{1+\xi}{1-\xi}$

$$|\tilde{A} + \tilde{\theta}| \le \xi(\tilde{A}+1) \le \xi\left(\frac{1+\xi}{1-\xi} + 1\right) = \frac{2\xi}{1-\xi}$$

(2) $\tilde{A} > \frac{1+\xi}{1-\xi}$

$$\cancel{|\tilde{A} + \tilde{\theta}| \le \xi(\tilde{A}+1)} \quad \frac{|\tilde{A} + \tilde{\theta}|}{\tilde{A}+1} = \frac{|\tilde{A} + 1 + \tilde{\theta} - 1|}{\tilde{A}+1} \ge 1 - \frac{2}{\tilde{A}+1}$$
$$> 1 - \frac{2}{\frac{1+\xi}{1-\xi} + 1} = 1 - (1-\xi) = \xi$$

סתירה

מקרה (א)

$$u = \pm\alpha \quad \bar{U}_r = -\alpha \|\vec{\sigma}_{r-1}\|^{1+q_r} \underbrace{\left(\varphi_r(\vec{\sigma}_{r-1}) \|\vec{\sigma}_{r-1}\|^{-\deg \varphi_r}\right)}_{\psi(\vec{\sigma}_{r-1})}$$

סימון: $\psi(\vec{\sigma}_{r-1})$, $\psi \in QC$, $\deg \psi = 0$

ψ שקולה בסימון $\sigma^{(r-1)} + \varphi_{r-1}(\vec{\sigma}_{r-2}) \cdot \delta$ ב-$\vec{\sigma}_{r-1} \ne 0$

בגלל הספירה $S_{K,1}$

נורמה הומוגנית אחרת בשימוש $\|x\|_{h1}$

למה 3

$\exists M>0\ \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:$

$$|\psi(\vec\sigma_{r-1})| \le \delta \Rightarrow \left|\sigma^{(r-1)} + \varphi_{r-1}(\vec\sigma_{r-2})\right| \le M\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\|\vec\sigma_{r-2}\|_{h1}^{1+(r-1)q}$$

(כן, נכון לכל נורמה $\|\cdot\|_{h1}$)

הוכחה:

נכון לכל פונקציה $\varphi_{r-1}\in QC,\ \deg\varphi_{r-1} = 1+(r-1)q$:

$$\frac{|\varphi_{r-1}(\vec\sigma_{r-2})|}{\|\vec\sigma_{r-2}\|_{h1}^{1+(r-1)q}} \le M$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \psi \le \delta \Rightarrow \left|\frac{\sigma^{(r-1)}+\varphi_{r-1}(\vec\sigma_{r-2})}{|\sigma^{(r-1)}| + \|\vec\sigma_{r-2}\|_{h1}^{1+(r-1)q}}\right| \le \varepsilon$$

$$\varphi_{r-1}(\vec\sigma_{r-2}) = \theta M\|\vec\sigma_{r-2}\|_{h1}^{1+(r-1)q}$$

למה 2 $\Leftarrow$ (*) $\left|\sigma^{(r-1)} + \varphi_{r-1}(\vec\sigma_{r-2})\right| \le M\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\|\vec\sigma_{r-2}\|_{h1}^{1+(r-1)q}$

מ.ש.ל.

(*) מגדיר הכלה עובר (כי אלה $\cancel{\sigma^{(r-1)}}$ המוגדרים הי' AS כאשר $\varepsilon=0$ לפי תנאי המשפט)

לכן ל-ε קטן מספיק הכלה (*) AS $\mathbb{R}^r$

עפ"י א' ε כבר,

(*) מגדיר תחום Ω_ε ב $\{\vec\sigma_{r-1}\}$

נסתכל במשוואה

למה 4

$$\sigma^{(r)} + \alpha V_r(\vec\sigma_{r-1}) = 0$$

אנו צריכים להוכיח שהמשוואה הזו AS

ל-α גדול מספיק כל הגרונות נכנסים ל-Ω_ε כדי להישאר בו

או יכול להיות ישירות מתכנסים ל-0 תוך זמן אינסופי

למה 4 בעצם מסיימת הוכחה,
לבקר אותו ומשוואה.

הוכחה: נבחר $\|\cdot\|_{h_1}$ חלקה (C^3) ב-$\vec{\sigma}_{r-1}\neq 0$

$$\Omega_\varepsilon=\left\{\vec{\sigma}_{r-1}\ \middle|\ \Phi_-(\vec{\sigma}_{r-2})\le\sigma^{(r-1)}\le\Phi_+(\vec{\sigma}_{r-2})\right\}$$

$$\Phi_\pm=\varphi_{r-1}(\vec{\sigma}_{r-2})\pm M\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\|\vec{\sigma}_{r-2}\|_{h_1}^{1+(r-1)q}$$

צריך קירוב בספירה הומוגנית ~~אם~~

$k_{1+(r-1)q}$ הומוגניות $\hat{\Phi}_+,\hat{\Phi}_-\in C^3$ ב-$\vec{\sigma}_{r-2}\neq 0$

$$\varphi_{r-1}\le\hat{\Phi}_+(\vec{\sigma}_{r-2})<\varphi_{r-1}+M\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\|\vec{\sigma}_{r-2}\|_{h_1}$$

$$\varphi_{r-1}-M\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\|\vec{\sigma}_{r-2}\|^{1+(r-1)q}<\hat{\Phi}_-(\vec{\sigma}_{r-2})\le\varphi_{r-1}(\vec{\sigma}_{r-2})$$

$$\hat{\Omega}_\varepsilon=\left\{\vec{\sigma}_{r-1}\ \middle|\ \hat{\Phi}_-\le\sigma^{(r-1)}\le\hat{\Phi}_+\right\}\subset\Omega_\varepsilon$$
בפנים

לפי למה 1 $|\psi|\ge\xi_0>0$ כאשר $\vec{\sigma}_{r-1}\notin\hat{\Omega}_\varepsilon$

$\hat{\hat{\Omega}}_\varepsilon\subset\hat{\Omega}_\varepsilon\subset\Omega_\varepsilon$ (במקום ε) $\Leftarrow$

$\hat{\hat{\Omega}}_\varepsilon$ נגדיר, $\hat{\hat{\Phi}}_\pm=\varphi_{r-1}(\vec{\sigma}_{r-2})\pm M\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\|\vec{\sigma}_{r-2}\|_{h_1}^{1+(r-1)q}$

$$\left(\sigma^{(r-1)}\mp\hat{\Phi}_\pm\right)^{\cdot}\ge\sigma^{(r)}\mp\max\left\|\hat{\Phi}'_\pm\right\|_{S_{h_1}}\cdot\|\vec{\sigma}_{r-1}\|_h^{1+rq}\cdot c_0 \quad \text{לכל}$$

$$\sigma^{(r)}=\alpha U_r(\vec{\sigma}_{r-1})=-\alpha\psi(\vec{\sigma}_{r-1})\cdot\|\vec{\sigma}_{r-1}\|^{1+rq}$$
קבוע

U_r פולס טוב כאשר α גדול מספיק

$\Delta_\pm = \sigma^{(r-1)} \mp \hat{\varphi}_\pm(\vec{\sigma}_{r-2})$ נסמן

$\deg \dot{\Delta}_\pm = 1 + rq \geq 0$

$\cancel{|\dot{\Delta}| \leq C_1 \|\vec{\sigma}_r\|}$ $|\Delta_\pm| \leq C_1 \|\vec{\sigma}_{r-1}\|^{1+(r-1)q}$

הראנו

$\dot{\Delta}_+ \in \alpha \Psi_r \|\vec{\sigma}_{r-1}\|_{h1}^{1+rq} + [-C_0, C_0] \|\vec{\sigma}_{r-1}\|_{h1}^{1+rq} =$

נניח $\Delta_+ > 0$

$= (\alpha \Psi_r + [-C_0, C_0]) \|\vec{\sigma}_{r-1}\|_{h1}^{1+rq}$

נניח $\|\vec{\sigma}_{r-1}\| \not\to 0$, $q=0$
$\Leftarrow \|\vec{\sigma}_{r-1}\| > \varepsilon$ נאמר $\Leftarrow \frac{|\Delta_+|^{\frac{1}{2}}}{\|\vec{\sigma}_{r-1}\|} \to 0$.
$\dot{\Delta}_+ < \gamma \Delta_+^{\frac{1}{2}} \Leftarrow \frac{\ldots}{\|\vec{\sigma}_{r-1}\|} > |\Delta_+|^{t} \Leftarrow$.
ב-FT $\Leftarrow$.

$\gamma < 0$

$$\dot{\Delta}_+ \leq \gamma \Delta_+^{\frac{1+rq}{1+(r-1)q}} = \gamma \Delta_+^{\lambda}, \qquad \frac{1+rq}{1+(r-1)q} = \lambda$$

א. $q < 0 \Rightarrow 0 < \lambda < 1 \Rightarrow \Delta$ מתאפס תוך זמן סופי

ב. $q \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 1 \Rightarrow \Delta \to 0$ אסימפטוטית.
וגם $\|\vec{\sigma}_{r-1}\| \to 0$
או תוך זמן סופי, נכנס ל-Ω_ε נאמר

אותו דבר ל-Δ_-, רק $\Delta_- < 0$

$$\dot{\Delta}_- \geq \gamma |\Delta|^\lambda$$

מ.ש.ל.

מקרה של בקר סייני - פעמה,
בקר להרלה,

$$\sigma^{(r)} \in [-C, C] \|\vec{\sigma}_{r-1}\|_h^{1+rq} + [K_m, K_M] \alpha U_r(\vec{\sigma}_{r-1})$$

אותו סיום !! כאשר $\|\Psi\| \leq const$

עדיין מקבלים

$\cancel{|\dot{\Delta}_\pm| \leq \hat{\gamma} \ldots}$ $\dot{\Delta}_+ \leq \hat{\gamma} \Delta^\lambda$

$\hat{\gamma}$ מקדם אחר

מ.ש.ל.

$\deg t = \frac{1}{r}$, $\deg \sigma^{(r)} = 1 + rq = 0$, $q = -\frac{1}{r}$, r – SMC הגדרה

$\deg \sigma = 1$, $\deg \dot\sigma = 1 + q, \ldots, \deg \sigma^{(r-1)} = 1 + (r-1)q = \frac{1}{r}$

$\deg t = 1$ $\deg \sigma = r$, $\deg \dot\sigma = r-1, \ldots, \deg \sigma^{(r-1)} = 1 \Leftarrow q = -1$ לחלופין: אפשר גם

$k = 1, \ldots, r$ $u_k = -\alpha_k \varphi_k(\vec{\sigma}_{k-1})$ controllers מוגדרים

AS $\sigma^{(k)} + \varphi_k(\vec{\sigma}_{k-1}) = 0$, $\deg \varphi_k = r-k$ אם

$\sigma^{(r)} + \varphi_r(\vec{\sigma}_{r-1}) = 0$, $\deg \varphi_r = 0$ נקבל $k = r$ ב

$u_r = -\alpha_r \varphi_r(\vec{\sigma}_{r-1})$ – r-SMC

→ r-SM homogeneity אם נקרא
(Levant 2005)

דוגמה לבנייה (Levant 2005)

$k=1$ $\dot\sigma + \beta_0 [\sigma]^{\frac{r-1}{r}} = 0$ $\varphi_1 = \beta_0 [\sigma]^{\frac{r-1}{r}}$, $\beta_0 > 0$, $N_1 = \beta_0 |\sigma|^{\frac{r-1}{r}}$

$k=2$ $\ddot\sigma + \beta_1 \frac{\dot\sigma + \beta_0 [\sigma]^{\frac{r-1}{r}}}{|\dot\sigma| + \beta_0 |\sigma|^{\frac{r-1}{r}}} \left(|\dot\sigma| + \beta_0 |\sigma|^{\frac{r-1}{r}}\right)^{\frac{r-2}{r-1}} = 0$

$\Psi_2 = \frac{\dot\sigma + \beta_0 [\sigma]^{\frac{r-1}{r}}}{|\dot\sigma| + \beta_0 |\sigma|^{\frac{r-1}{r}}}$, $\varphi_2 = \beta_1 \underbrace{\left(|\dot\sigma_1| + \beta_0 |\sigma|^{\frac{r-1}{r}}\right)^{\frac{r-2}{r-1}}}_{N_2} \Psi_2$

$|\Psi_2| \le 1$, $\deg \Psi_2 = 0$

k $\sigma^{(k)} + \beta_k \Psi_k(\vec{\sigma}_{k-1}) \cancel{(|\dot\sigma| + \beta_0 |\sigma}\, N_k(\vec{\sigma}_{k-1}) = 0$

$k \le r-1$

$\deg N_k = r-k$, נורמליזציה – N_k

$\deg \Psi_k = 0$ $|\Psi_k| \le 1$, $\varphi_{k+1} = \sigma^{(k)} + \beta_k \Psi_k N_k$

$k+1$ $\sigma^{(k+1)} + \beta_{k+1} \Psi_{k+1}(\vec{\sigma}_k) N_{k+1}(\vec{\sigma}_k) = 0$

$\Psi_{k+1} = \frac{\sigma^{(k)} + \beta_k \Psi_k(\sigma_{k-1}) N_k(\sigma_{k-1})}{|\sigma^{(k)}| + \beta_k N_k(\sigma_{k-1})}$, $N_{k+1} = \left(|\sigma^{(k)}| + \beta_k \Psi_k N_k\right)^{\frac{r-k-1}{r-k}}$

$k=r$ נקבל $N_r=1$, $\varphi_r=\beta_r\psi_r$

פרק ע' לסמוך כרגע, קיימים רבים (לינארי) (מקומי)

QC r-SMC

קיים או 1 פיאנות שוקולת לקיום לכל $q \geq -1$, $q \geq -\frac{1}{r}$

$\deg \sigma^{(k)}=1+kq$

$\deg t=-q$

$\deg \sigma^{(k)}=r+kq$
$=r-k\deg t$
$\deg t \leq 1$

<u>דוגמא</u> לכן control $r=3$ ל $q \geq -\frac{1}{3}$

אז $\deg\sigma=1$, $\deg\dot\sigma=1+q$, $\deg\ddot\sigma=1+2q$, $\deg\dddot\sigma=1+3q\geq 0$

$r=1$ $\quad \dot\sigma+\underbrace{\beta_0[\sigma]^{1+q}}_{\varphi_1}=0 \qquad AS \Leftarrow \beta_0>0$

$r=2$ $\quad \ddot\sigma+\underbrace{\beta_1\left[[\dot\sigma]^2+\beta_1^2[\sigma]^{2(1+q)}\right]^{\frac{1+2q}{2(1+q)}}}_{\varphi_2(\vec\sigma_1)}=0$, $\beta_i>0$ גדולים מספיק

$r=3$ $\quad \dddot\sigma+\beta_2\underbrace{\left(\ddot\sigma+\varphi_2(\sigma,\dot\sigma)\right)\|\vec\sigma_2\|_h^{q}}_{\tilde\varphi_3}=0$

$1+3q \qquad 1+2q \qquad q$

φ_3

$$u=-\alpha\tilde\varphi_3(\vec\sigma_2)=-\alpha\left(\ddot\sigma+\beta_1\left([\dot\sigma]^2+\tilde\beta_0[\sigma]^{2(1+q)}\right)^{\frac{1+2q}{2+2q}}\right)\cdot\|(\sigma,\dot\sigma,\ddot\sigma)\|_h^{q}$$

$\|(\sigma,\dot\sigma,\ddot\sigma)\|_h=\max\left(|\sigma|,|\dot\sigma|^{\frac{1}{1+q}},|\ddot\sigma|^{\frac{1}{1+2q}}\right)$ למשל

$\|\vec\sigma_2\|_h=\left(|\sigma|^2+2|\dot\sigma|^{\frac{2}{1+q}}+|\ddot\sigma|^{\frac{2}{1+2q}}\right)^{\frac12}$ או

$$\tilde u=u\cdot\arctan\left(\frac{|\varphi_3|}{\|\vec\sigma_2\|_h^{1+3q}}\right)$$ זה אפשרי לסגור.

הבעיה: נמדדת פונקציה

$$f(t) = f_0(t) + \eta(t), \quad t \in [0, \infty)$$

$f_0(t) \in C^{n}$, להעריך $f_0, \dot f_0, \dots, f_0^{(n)}$

$f_0^{(n-1)}$ רציפה בהחלט

בתנאים האלה זה בכלל אפשרי

אי-שוויון של Landau-Kolmogorov

$g: I \to \mathbb{R}, \quad I \subset \mathbb{R}$

קטע, אולי אינסופי

נניח g גזירה ברציפות n פעמים

$g^{(n)}$ רציפה בהחלט, $|g^{(n+1)}|$ חסומה

נסמן $M_k = \sup_{t\in I} |g^{(k)}|$

אז אם קיימים M_0, M_{n+1} אז קיימים גם $M_1, M_2, \dots, M_n$

ו-

$$M_k \le \gamma_{n,k} M_0^{\frac{n+1-k}{n+1}} M_{n+1}^{\frac{k}{n+1}}$$

הנוסחה נכונה ב $I=\mathbb{R}$, $I=\mathbb{R}_+=[0,\infty)$

היא לא נכונה ב $I=[a,b]$, $a,b\in\mathbb{R}$

דוגמא נגדית:

Ditzian, Shen 1993 מציאה!

$$\left.g^{(n+1)}=0\right]_{n\ge 1} \Rightarrow g=\alpha t, \quad \alpha>0, \quad t\in[0,1]$$

$$\sup|g| = \alpha \le \gamma_{n,0}\,\alpha^{\frac{n+1-0}{n+1}}\, 0^{\frac{0}{n+1}} = 1$$

פורמלית

$$= \gamma_{n,0}\,\alpha$$

$$\sup|\dot g| = \alpha \le \gamma_{n,1}\,\alpha^{\frac{n}{n+1}}\, 0^{\frac{1}{n+1}} = 0$$

אבל סתירה

ברור

$\gamma_{n,0}=1$

$\gamma_{n,n+1}=1$

בתרגיל

$g(t) = \cos(L^{\frac{1}{n+1}} t) \Rightarrow M_0 = 1,\ M_k = L^{\frac{k}{n+1}}$

$M_{n+1} = L$

מראים ש- $\gamma_{n,k} \geq 1$

$\gamma_{1,0} = \gamma_{1,2} = 1,\ \gamma_{1,1} = 2$, $I = \mathbb{R}_+,\ n = 1$

$\gamma_{1,1} = \sqrt{2} \Leftarrow I = \mathbb{R}$ Landau 1913

$I = \mathbb{R}$ ל $\boxed{\gamma_{n,k} \quad k \in \mathbb{N}}$ $I = \mathbb{R}$ Kolmogorov 1939

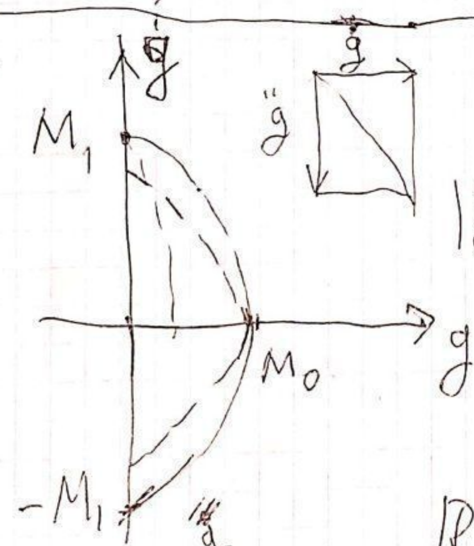
$K_{n,k} \overset{\text{סימון}}{=} \gamma_{n,k} \in [1, \frac{\pi}{2}]$ (יש נוסחא מפורשת)

$\lim_{\substack{n \to \infty \\ n-k = const}} K_{n,k} = \frac{\pi}{2}$

במקרה $I = \mathbb{R}_+$ הערכים של $\gamma_{n,k}$, $n > 1$, $k \neq 0, n+1$

קיימים אבל לא ידועים

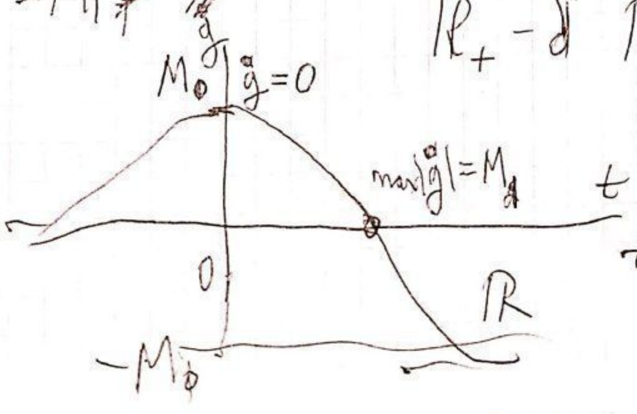
מקרה $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}_+$, הוכחה! $\gamma_{1,1}$

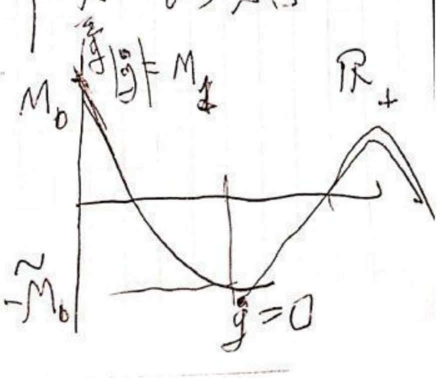


$|\ddot g| \leq 1$ Rescaling

$M_0 = \frac{1}{2} M_1^2,\ M_1 = \sqrt{2} M_0$

ההבדל בין $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}_+$





Levant, Livne, Yu, 2017

משפט

$M_0 \le \varepsilon$, $M_{n+1} \le L$, $I=[a,b]$, $\Delta>0$

$M_0 = \sup_{[a-\Delta,\, b+\Delta]} |g|$, $M_{n+1} = \sup_{[a-\Delta,\, b+\Delta]} |g^{(n+1)}|$ מותר b =∞

אז ל Δ גדול מספיק $\Delta=\Delta(\varepsilon,L)$ מתקיים

$$\sup_{[a,b]} |g^{(k)}| \le K_{n,k} L^{\frac{k}{n+1}} \varepsilon^{\frac{n+1-k}{n+1}}$$

(הוכחה, מבוססת ב- Kolmogorov)

~~משפט~~ הגזרה: גוזר מספרי זה כל אלגוריתם (אופרטור)

$\mathcal{D}_n : f \mapsto \begin{pmatrix} \hat{f} \\ \vdots \\ \widehat{f^{(n)}} \end{pmatrix}$, $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ מציעות לפני לבג

סימון:

$f_0: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, אם $f_0^{(n)}$ - ליפשיצית עם קבוע L, f_0 - פונקציית $Lip_n(L)$

משפט אם הגוזר $\mathcal{D}_n$ מדוייק ב $Lip_n(L)$ בקטע $[a,b]$ ל $a-\Delta\ge 0$ (משפט קודם)

אז לכל $f_1, f_2 \in Lip_n(L)$, $|f_1-f_2| \le \varepsilon$

בקטע $[a,b]$ מתקיים

$$\left|\widehat{f_1^{(k)}}(t) - \widehat{f_2^{(k)}}(t)\right| \le K_{n,k}\, 2^{\frac{k}{n+1}} L^{\frac{k}{n+1}} \varepsilon^{\frac{n+1-k}{n+1}}$$

והערכה הזו א' אפשר לשפר (לפעמים מדוייק)

Sharp inequality

קבוצת הגוזר מסדר n נקרא asymptotically optimal

לכל δ: $f=f_0+\eta$, $|\eta|\le\varepsilon$, $f_0\in Lip_n(L)$

אם κ גדול, זמן סופי הוא מקיים

$$\left|\hat{f}_0^{(k)}(t)-f_0^{(k)}(t)\right|\le\gamma_{n,k}L^{\frac{k}{n+1}}\varepsilon^{\frac{n+1-k}{n+1}}$$

לכל $L>0,\ \varepsilon\ge 0$

משפט קיים גוזר אופטימלי

הוכחה: קבוצה $Lip_n L\subset C[\mathbb{R}_+]$

היא קבוצה locally compact

מעל כל קטע סופי בתוך $\mathbb{R}_+$

$$\mathcal{D}_{n,k}:\ \underset{\substack{g\in Lip_n(L)\\ t\in[a,b]}}{\operatorname{argmin}}\|f-g\|_C$$

f – מציאת כמינימום הנורמה, ב-$t\in[a,b]$

מש״ל

High Gain Observer (Khalil)

$$\begin{cases}\dot{z}_0=-\tilde{\lambda}_n\mu\left(z_0-f(t)\right)+z_1,\\ \dot{z}_1=-\tilde{\lambda}_{n-1}\mu^2\left(z_0-f(t)\right)+z_2\\ \quad\ldots\\ \dot{z}_n=-\tilde{\lambda}_0\mu^{n+1}\left(z_0-f(t)\right)\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}f=f_0,\ \eta=0\\ f_0\in Lip_n(L)\\ |z_i-f_0^{(i)}|=O(\mu^{-(n+1-i)})\end{array}}$$

פולינום אופייני

$P_\mu=s^{n+1}+\tilde{\lambda}_n\mu s^n+\ldots+\tilde{\lambda}_0\mu^{n+1}$,

$P_1=(s+\xi_1)\ldots(s+\xi_n)$, $\xi_k=\alpha_k+\beta_k i$, $\alpha_k>0$

$P_\mu=(s+\mu\xi_1)\ldots(s+\mu\xi_n)$ $\quad\mu\gg 1$ High Gain

גזרן מבוסס SM

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = -\tilde{\lambda}_n L^{\frac{1}{n+1}} [z_0 - f]^{\frac{n}{n+1}} + z_1 \\ \dot{z}_1 = -\tilde{\lambda}_{n-1} L^{\frac{2}{n+1}} [z_0 - f]^{\frac{n-1}{n+1}} + z_2 \\ \quad \dots \\ \dot{z}_{n-1} = -\tilde{\lambda}_1 L^{\frac{n}{n+1}} [z_0 - f]^{\frac{1}{n+1}} + z_n \\ \dot{z}_n = -\tilde{\lambda}_0 L [z_0 - f]^0 = -\tilde{\lambda}_0 \operatorname{sign}(z_0 - f) \end{cases}$$

גזרן רקורסיבי <u>שקולה</u>

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = -\lambda_n L^{\frac{1}{n+1}} [z_0 - f]^{\frac{n}{n+1}} + z_1 \\ \dot{z}_1 = -\lambda_{n-1} L^{\frac{1}{n}} [z_1 - \dot{z}_0]^{\frac{n-1}{n}} + z_2 \\ \quad \dots \\ \dot{z}_{n-1} = -\lambda_1 L^{\frac{1}{2}} [z_{n-1} - \dot{z}_{n-2}]^{\frac{1}{2}} + z_n \\ \dot{z}_n = -\lambda_0 L [z_n - \dot{z}_{n-1}]^0 = -\lambda_0 L \operatorname{sign}(z_n - \dot{z}_{n-1}) \end{cases}$$

$$\sigma_i = \frac{z_i - f^{(i)}}{L}$$

($f = f_0$ אין רעש)

$$\dot{\sigma}_0 = -\lambda_n [\sigma_0]^{\frac{n}{n+1}} + \sigma_1$$

$$\dot{\sigma}_1 = -\lambda_{n-1} [\sigma_1 - \dot{\sigma}_0]^{\frac{n-1}{n}} + \sigma_2$$

$$\dots$$

$$\dot{\sigma}_{n-1} = -\lambda_1 [\sigma_{n-1} - \dot{\sigma}_{n-2}]^{\frac{1}{2}} + \sigma_n$$

$$\dot{\sigma}_n = -\lambda_0 [\sigma_n - \dot{\sigma}_{n-1}]^0 - f^{(n+1)}/L$$

אכן את הס'

$$\sigma_{i+1} - \dot{\sigma}_i = \lambda_{n-i} \left[\sigma_i - \dot{\sigma}_{i-1}\right]^{\frac{n-i}{n+1-i}}$$

לא כקודמו לגמרי

$$\sigma_{i+1} - \sigma_i = \tilde{\lambda}_{n-i} \left[\sigma_0\right]^{\frac{n-i}{n+1}}$$

$$\sigma_i - \sigma_{i-1} = \tilde{\lambda}_{n-i+1} \left[\sigma_0\right]^{\frac{n+1-i}{n+1}}$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_{n-i} = \tilde{\lambda}_{n-i}\, \tilde{\lambda}_{n-i+1}^{\frac{n-i}{n+1-i}}$$

$$\boxed{\tilde{\lambda}_j = \lambda_j\, \tilde{\lambda}_{j+1}^{j/j+1}, \quad j = n-1, \dots, 1, \quad \tilde{\lambda}_0 = \lambda_0}$$

$$\tilde{\lambda}_n = \lambda_n$$

142c

An infinite sequence of parameters $\lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, ...\}$ is proved to exist for any $\lambda_0 > 1$ [32], which is valid for any $n + n_f = 0, 1, ...$ In particular, $\vec{\lambda} = \{1.1, 1.5, 2, 3, 5, 7, 10, 12, 14, 17, 20, 26, 32, ...\}$ suffice for $n + n_f \leq 12$ (up to 7 [43, 45]).

Table 1: Parameters $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, ..., \tilde{\lambda}_{n+n_f}$ of differentiator (9), (10) for $n + n_f = 0, 1, ..., 12$

0	1.1												
1	1.1	1.5											
2	1.1	2.12	2										
3	1.1	3.06	4.16	3									
4	1.1	4.57	9.30	10.03	5								
5	1.1	6.75	20.26	32.24	23.72	7							
6	1.1	9.91	43.65	101.96	110.08	47.69	10						
7	1.1	14.13	88.78	295.74	455.40	281.37	84.14	12					
8	1.1	19.66	171.73	795.63	1703.9	1464.2	608.99	120.79	14				
9	1.1	26.93	322.31	2045.8	6002.3	7066.2	4026.3	1094.1	173.72	17			
10	1.1	36.34	586.78	5025.4	19895	31601	24296	8908	1908.5	251.99	20		
11	1.1	48.86	1061.1	12220	65053	138954	143658	70830	20406	3623.1	386.7	26	
12	1.1	65.22	1890.6	29064	206531	588869	812652	534837	205679	48747	6944.8	623.30	32

Successively substituting the derivative $\dot{w}_1$ from the first equation into the equation for $\dot{w}_2$, then $\dot{w}_2$ into the equation for $\dot{w}_3$, etc., obtain that $\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0$, $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n$, and $\tilde{\lambda}_j = \lambda_j \tilde{\lambda}_{j+1}^{j/(j+1)}$, $j = n-1, n-2, \ldots, 1$. The corresponding parameters $\tilde{\lambda}_i$ are listed in Table 1.

גוזר רקורסיבי:

143

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_0 = -\lambda_n [\sigma_0]^{\frac{n}{n+1}} + \sigma_1 \\ \dot{\sigma}_1 = -\lambda_{n-1} [\sigma_1 - \dot{\sigma}_0]^{\frac{n-1}{n}} + \sigma_2 \\ \quad \vdots \\ \dot{\sigma}_n \in -\lambda_0 [\sigma_n - \dot{\sigma}_{n-1}]^0 + [-1,1] \end{cases}$$

deg t = 1

deg σ_0 = n+1

הוכחה, לפי אינדוקציה:

$n = 0$

$$\dot{\sigma}_0 \in -\lambda_0 [\sigma_0]^0 + [-1,1] = -\lambda_0 \operatorname{sign} \sigma_0 + [-1,1]$$

כל $\lambda_0 > 1$ מתאים

צעד אינדוקציה:

נניח $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n > 1$ מתאימים כך

שהגוזר

$$\dot{z} = \mathcal{D}_n (z_0 - f_0, z, L, \vec{\lambda}_n)$$

$z \in \mathbb{R}^{n+1}$

$\vec{\tilde{\lambda}}_n = (\tilde{\lambda}_0, \dots, \tilde{\lambda}_n)$

מתכנס לכל $f_0 \in Lip_n(L)$

אז הגוזר

$$\dot{z}_0 = -\tilde{\lambda}_{n+1} L^{\frac{1}{n+2}} [z_0 - f_0]^{\frac{n+1}{n+2}} + z_1$$

$$\dot{\vec{z}}_{1,n} = \mathcal{D}_n (z_1 - \dot{z}_0, \vec{z}_{1,n}, L, \vec{\lambda}_n)$$

מתכנס לכל $f_0 \in Lip_{n+1}(L)$, $\tilde{\lambda}_{n+1} > 0$ גדול מספיק

הוכחה: כל פונקציה מקבלת צורה,

A. Levant
R. Ibara

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_0 = -\lambda_{n+1}\lceil\sigma_0\rfloor^{\frac{n+1}{n+2}} + \sigma_1 \\ \dot{\sigma}_1 = -\lambda_n\lceil\sigma_1-\dot{\sigma}_0\rfloor^{\frac{n}{n+1}} + \sigma_2 \\ \quad\vdots \\ \dot{\sigma}_n \in -\lambda_0\lceil\sigma_n-\dot{\sigma}_{n-1}\rfloor^0 + [-1,1] \end{cases}$$

$\tilde{\sigma}_0 = c\,\sigma_0$ נגדיר

$$c = \lambda_{n+1}^{\frac{n+2}{n+1}}$$

$\dot{\tilde{\sigma}}_0 = -c\left(\lceil\tilde{\sigma}_0\rfloor^{\frac{n+1}{n+2}} - \sigma_1\right)$ אז

למיצ' אפקט' לפצות את זה

נניח $a > 2(n+2)$ כלשהו

קיימת פונקציית ליאפונוב $V_n(\vec{\sigma}_{1,n})$

$\deg V_n = a,$ הומוגנית למערכת ה $\vec{\sigma}_{1,n+1} = D_n(\sigma_1, \vec{\sigma}_{1,n+1}, \ldots)$

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_1 = -\lambda_n\left\lceil\sigma_1 - \frac{1}{c}\dot{\tilde{\sigma}}_0\right\rfloor^{\frac{n}{n+1}} + \sigma_1 \\ \quad\vdots \\ \dot{\sigma}_{n+1} \in -\lambda_0\lceil\sigma_{n+1}-\dot{\sigma}_1\rfloor + [-1,1] \end{cases}$$

אין

$$-\frac{\partial V_n}{\partial\sigma_{n+1}}\cdot\frac{f_0^{(n+1)}}{L}$$

$$\sup \dot{V}_n(\sigma_1,\ldots,\sigma_{n+1}) \le \dot{V}_n\Big|_{L=0} + \left|\frac{\partial V_n}{\partial\sigma_{n+1}}\right|\cdot 1 < 0$$

קבוע

$$\dot{\tilde{\sigma}}_0 = \tilde{\sigma}_0 = 0 \qquad -\delta$$

$$(\sigma_1,\ldots,\sigma_{n+1}) \ne 0$$

$$V_{n+1} = W_{n+1}(\tilde{\sigma}_0,\sigma_1) + V_n(\sigma_1,\ldots,\sigma_{n+1})$$

$$W_{n+1} = \int_{\lceil\sigma_1\rfloor^{\frac{n+2}{n+1}}}^{\tilde{\sigma}_0}\left(\lceil s\rfloor^{\frac{a-(n+2)}{n+2}} - \lceil\sigma_1\rfloor^{\frac{a-(n+2)}{n+1}}\right)ds \ge 0$$

Rol.

$$\dot{W}_{n+1} = \left([\tilde{\sigma}_0]^{\frac{a-(n+2)}{n+2}} - [\sigma_1]^{\frac{a-(n+2)}{n+1}} \right) \dot{\tilde{\sigma}}_0$$

$$- \frac{a-(n+2)}{n+1} \int_{[\sigma_1]^{\frac{n+2}{n+1}}}^{\tilde{\sigma}_0} [\sigma_1]^{\frac{a-(n+2)}{n+1}-1} ds =$$

$$= -C \left([\tilde{\sigma}_0]^{\frac{a-(n+2)}{n+2}} - [\sigma_1]^{\frac{a-(n+2)}{n+1}} \right) \left([\tilde{\sigma}_0]^{\frac{n+1}{n+2}} - \sigma_1 \right) \quad <0_{n.d.}$$

$$- \frac{a-(n+2)}{n+1} [\sigma_1]^{\frac{a-(n+2)}{n+1}-1} \left(\tilde{\sigma}_0 - [\sigma_1]^{\frac{n+2}{n+1}} \right)$$

$$\dot{V}_{n+1} = -cH_1 + \underbrace{\tilde{G} + \dot{V}_n}$$

$\tilde{\sigma}_0 - [\sigma_1]^{\frac{n+2}{n+1}} = 0 \Leftrightarrow \dot{\sigma}_0 = 0 \Leftrightarrow \dot{\tilde{\sigma}}_0 = 0$ כאשר $\dot{V}_n < 0$

$(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1}) \neq 0$

$$\tilde{G}\Big|_{\dot{\sigma}_0 = 0} = 0$$

ראה (Andrieu, Astolfi, Praly, ... 2008)

$\varphi_1(x) + \lambda \varphi_2(x)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in QC$

$\varphi_2 \geq 0$, $\varphi_1\Big|_{\varphi_2 = 0} > 0$, $\deg \varphi_1 = \deg \varphi_2$

$\Rightarrow \forall \lambda \geq 0$ גדול מספיק $\varphi_1(x) + \lambda \varphi_2(x)$

מוגדר חיובי

(חוץ מ$x=0$)

(מ.ש.ל

$B_1=\{x \mid \|x\|\le 1\}$

<u>הוכחת למה</u> נסתכל בספירה הומוגנית

$S_{h1}=\{x \mid \|x\|_h=1\}$, $\|x\|_h=\left(|x_1|^{\frac{d}{m_1}}+\dots+|x_n|^{\frac{d}{m_n}}\right)^{\frac{1}{d}} \in C^1(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$

$n=1;\ S_{h1}$: $-1,\ 0,\ 1$; x $\quad d>\max(m_1,\dots,m_n)$, $n>1$

טריוויאלי

אם $\{\varphi_2=0\}\cap S_{h1}=\emptyset$ טריוויאלי

$\{\varphi_2=0\}\big|_{S_{h1}}\neq\emptyset \Leftarrow$ קומפקט, $\varphi_1\big|_{\Omega}>0$

$\underbrace{\{\varphi_2=0\}\big|_{S_{h1}}}_{\Omega}$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon>0:\ \varphi_1\Big|_{\underbrace{(\Omega+\varepsilon B_1)\cap S_{h1}}_{\Omega_1}}>0$, $\Rightarrow \varphi_2\Big|_{S_{h1}\setminus\Omega_1}\ge\delta_1>0$

מקומפקטיות של Ω $\qquad$ מקומפקטיות $S_{h_1}\setminus\Omega_1$

$\Leftarrow$

$\|\varphi_1\|_{S_{h_1}\setminus\Omega_1}\le\delta_2$

$\lambda=\delta_2/\delta_1+1$

$\Leftarrow$ $\left(\varphi_1+\lambda\varphi_2\right)\Big|_{S_{h1}}>0 \Leftarrow \varphi_1+\lambda\varphi_2>0$, $x\neq 0$

מ.ש.ל.

<u>Filtering Differentiator</u> $\qquad N=n_d+n_f$, $\quad n_d, n_f\ge 0$

$$n_f\begin{cases}\dot w_1=-\tilde\lambda_N L^{\frac{1}{N+1}}[w_1]^{\frac{N}{N+1}}+w_2\\ \quad\cdots\\ \dot w_{n_f}=-\tilde\lambda_{n_d+1} L^{\frac{n_f}{N+1}}[w_1]^{\frac{n_d+1}{N+1}}+w_{n_f+1}\end{cases}$$

$$w_{n_f+1}=z_0-f$$

$$n_d+1\begin{cases}\dot z_0=-\tilde\lambda_{n_d} L^{\frac{n_f+1}{N+1}}[w_1]^{\frac{n_d}{N+1}}+z_1\\ \quad\cdots\\ \dot z_{n_d-1}=-\tilde\lambda_1 L^{\frac{N}{N+1}}[w_1]^{\frac{1}{N+1}}+z_{n_d}\\ \dot z_{n_d}=-\tilde\lambda_0 L\,[w_1]^0=-\tilde\lambda_0 L\,\mathrm{sign}\, w_1\end{cases}$$

צורה רקורסיבית

$$N = n_d + n_f$$

n_f
$$\begin{cases} \dot{\vartheta}_1 = -\lambda_N L^{\frac{1}{N+1}} [\vartheta_1]^{\frac{N}{N+1}} + \vartheta_2 \\ \dot{\vartheta}_2 = -\lambda_{N-1} L^{\frac{1}{N}} [\vartheta_2 - \dot{\vartheta}_1]^{\frac{N-1}{N}} + \vartheta_3 \\ \quad \vdots \\ \dot{\vartheta}_{n_f} = -\lambda_{n_d+1} L^{\frac{1}{n_d+2}} [\vartheta_{n_f} - \dot{\vartheta}_{n_f-1}]^{\frac{n_d+1}{n_d+2}} + \vartheta_{n_f+1} \end{cases}$$

$$\vartheta_{n_f+1} = z_0 - f \,, \quad n_f = 0 \Rightarrow \dot{\vartheta}_{n_f} \triangleq 0$$

משערך הנגזרות

$-f_0$ ... $-f_0^{(n_d+1)}$

n_d+1
$$\begin{cases} \dot{z}_0 = -\lambda_{n_d} L^{\frac{1}{n_d+1}} [\vartheta_{n_f+1} - \dot{\vartheta}_{n_f}]^{\frac{n_d}{n_d+1}} + z_1 \\ \dot{z}_1 = -\lambda_{n_d-1} L^{\frac{1}{n_d}} [z_1 - \dot{z}_0]^{\frac{n_d-1}{n_d}} + z_2 \\ \quad \vdots \\ \dot{z}_{n_d-1} = -\lambda_1 L^{\frac{1}{2}} [z_{n_d-1} - \dot{z}_{n_d-2}]^{\frac{1}{2}} + z_{n_d} \\ \dot{z}_{n_d} = -\lambda_0 L [z_{n_d} - \dot{z}_{n_d-1}]^0 \end{cases}$$

$f = f_0$

הוכחת התכנסות במקרה ללא רעש

מחלקים ב-L

$$\omega_j = \vartheta_j / L \,, \quad \sigma_i = (z_i - f_0^{(i)})/L \quad i = 0, \dots, n_d$$

$n_f \geq 1 \qquad j = 1, \dots, n_f$

נקבל:

יציבות בזמן סופי מובטחת.

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = -\tilde{\lambda}_N [\omega_1]^{\frac{N}{N+1}} + \omega_2 \\ \quad \vdots \\ \dot{\omega}_{n_f} = -\tilde{\lambda}_{n_d+1} [\omega_1]^{\frac{n_d+1}{N+1}} + \sigma_0 \\ \dot{\sigma}_0 = -\tilde{\lambda}_{n_d} [\omega_1]^{\frac{n_d}{N+1}} + \sigma_1 \\ \quad \vdots \\ \dot{\sigma}_{n_d-1} = -\tilde{\lambda}_1 [\omega_1]^{\frac{1}{N+1}} + \sigma_{n_d} \\ \dot{\sigma}_{n_d} = -\tilde{\lambda}_0 [\omega_1]^0 - \frac{f_0^{(n_d+1)}}{L} \in -\tilde{\lambda}_0 [\omega_1]^0 + [-1, 1] \end{cases}$$

$n_f \geq 1$ $\quad |\zeta| \leq \varepsilon$ $\quad$ בנוכחות רעש חסום:

נקבל

$\deg \omega_j = \overset{n_d+n_f}{N} + 2 - j$

$\deg z_i = n_d + 1 - i$

$\deg t = -1$

$$\dot{\omega}_1 = -\tilde{\lambda}_N [\omega_1]^{\frac{N}{N+1}} + \omega_2$$

$$\dots$$

$$\dot{\omega}_{n_f} \in -\tilde{\lambda}_{n_d+1} [\omega_1]^{\frac{n_d+1}{N+1}} + \sigma_0 + \frac{\varepsilon}{L}[-1,1]$$

$$\dot{\sigma}_0 = -\tilde{\lambda}_{n_d} [\omega_1]^{\frac{n_d}{N+1}} + \sigma_1$$

$$\dots$$

$$\dot{\sigma}_{n_d} \in -\tilde{\lambda}_0 [\omega_1]^0 + [-1,1]$$

$n_f = 0$

$$\dot{\sigma}_0 \in -\tilde{\lambda}_{n_d} \left[\sigma_0 + \frac{\varepsilon}{L}[-1,1]\right]^{\frac{n_d}{n_d+1}} + \sigma_1$$

$$\dots$$

$$\dot{\sigma}_{n_d} \in -\tilde{\lambda}_0 \left[\sigma_0 + \frac{\varepsilon}{L}[-1,1]\right]^0 + [-1,1]$$

בשני המקרים משקל של $\frac{\varepsilon}{L}$ הוא n_d+1

$$\deg \sigma_0 = \deg\left(\frac{\varepsilon}{L}\right) = n_d + 1$$

$$|\omega_j| \leq \gamma_{\omega j} \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{\frac{n_d+n_f+2-j}{n_d+1}} \qquad \Leftarrow \text{הדיוק}$$

$$|\sigma_i| = \left|\frac{z_i - f_0^{(i)}}{L}\right| \leq \gamma_{zi} \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{\frac{n_d + \cancel{n_f} + 1 - i}{n_d+1}}$$

$$|\omega_j| \leq \gamma_{\omega j} L \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{n_d+n_f+2-j} = \gamma_{\omega j} L^{\frac{-n_f-1+j}{n_d+1}} \varepsilon^{\frac{n_d+n_f+2-i}{n_d+1}}$$

$$|z_i - f_0^{(i)}| \leq \gamma_{zi} L \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{\frac{n_d+1-i}{n_d+1}} = \gamma_{zi} L^{\frac{i}{n_d+1}} \varepsilon^{\frac{n_d+1-i}{n_d+1}}$$

!! asymptotically optimal הגזירה $\Leftarrow$

(נוסח בשימוש 144) ←
אין

$$\eta = \eta_0(t) + \eta_1(t) + \dots + \eta_{n_f}(t)$$

$|\eta_0(t)| \le \varepsilon_0$, ~~$\dot{\xi}_{j1} = \xi_{j2}, \dot{\xi}_{j2} = \xi_{j3}, \dots, \dot{\xi}_{j,j-1} = \xi_{jj}, \dot{\xi}_{jj} = \eta_j$~~

$|\xi_{j1}| \le \varepsilon_j$ $\quad j = 1, 2, \dots, n_f$

אז הטיוק היא <u>מנסח</u>

$$|w_1| \le \gamma_{w_1} L \rho^{n_d + n_f + 1}$$

$$|z_i - f_0^{(i)}| \le \gamma_{z_i} L \rho^{n_d + 1 - i}$$

$$\rho = \max\left[\left(\frac{\varepsilon_0}{L}\right)^{\frac{1}{n_d+1}}, \dots, \left(\frac{\varepsilon_{n_f}}{L}\right)^{\frac{1}{n_d+n_f+1}}\right]$$

~~$\dot{\xi}_{21} = \eta_1, \dot{\xi}_{11} = \xi_{12}, \dot{\xi}_{12} = \eta_2$~~ $\quad n_f = 2$ אין <u>דוגמה;</u>

$\ddot{\xi}_2 = \eta_2, |\xi_2| \le \varepsilon_2$

~~$|\xi_{21}| \le \varepsilon_1$, $|\xi_{11}| \le \varepsilon_2$~~

$\dot{\xi}_1 = \eta_1, |\xi_1| \le \varepsilon_1$

$\dot{\xi}_{j1} = \xi_{j2}, \dot{\xi}_{j2} = \xi_{j3}, \dots, \cancel{\dot{\xi}_{j,n_f-j} = \xi_{j,n_f+1-j}, \dot{\xi}_{j,n_f+1-j} = \eta_{j}}$

$j = 1, 2, \dots, n_f$ $\quad \xi_{j1}^{(n_f+1-j)} = \eta_{n_f+1-j}$ $\quad \xi_j^{(j)} = \eta_j$

$|\xi_j| \le \varepsilon_j$ $\quad$ מספר סיום $\quad$ הכוונה $\quad$ כאן $\; -\eta_j$

$$\dot{\omega}_1 = -\tilde{\lambda}_{N+1} [\omega_1]^{\frac{N}{N+1}} + \omega_2$$

$$\dot{\omega}_2 = -\tilde{\lambda}_N [\omega_1]^{\frac{N-1}{N+1}} + \sigma_0 + \frac{\eta_0}{L} + \frac{\dot{\xi}_{1}}{L} + \frac{\ddot{\xi}_{2}}{L}$$

$\dots$

$$\Rightarrow \left(\omega_1 - \frac{\xi_2}{L}\right)^{\cdot} = -\tilde{\lambda}_{N+1} \left[\omega_1 - \frac{\xi_2}{L} + \frac{\xi_2}{L}\right]^{\frac{N}{N+1}} + \omega_2 - \frac{\dot{\xi}_2}{L} - \frac{\xi_1}{L} + \frac{\xi_1}{L}$$

$$\left(\omega_2 - \frac{\dot{\xi}_2}{L} - \frac{\xi_1}{L}\right)^{\cdot} = -\tilde{\lambda}_N \left[\omega_1 - \frac{\xi_2}{L} + \frac{\xi_2}{L}\right] + \sigma_0 + \frac{\eta_0}{L}$$

$\dots$

$$\tilde{\omega}_1 = \omega_1 - \frac{\xi_{2}}{L}, \quad \left|\frac{\xi_{2}}{L}\right| \le \frac{\varepsilon_2}{L}, \quad \dot{\xi}_2 = \eta_2$$ (נסו)

$$\tilde{\omega}_2 = \omega_2 - \frac{\dot{\xi}_{2}}{L} - \frac{\xi_{1}}{L}, \quad \left|\frac{\xi_{1}}{L}\right| \le \frac{\varepsilon_1}{L}, \quad \dot{\xi}_1 = \eta_1$$

אך מקבלים

$$\dot{\tilde{\omega}}_1 \in -\tilde{\lambda}_{N+1}\left[\tilde{\omega}_1 + \frac{\varepsilon_2}{L}[-1,1]\right]^{\frac{N}{N+1}} + \tilde{\omega}_2 + \frac{\varepsilon_1}{L}[-1,1]$$

$$\dot{\tilde{\omega}}_2 \in -\tilde{\lambda}_N\left[\tilde{\omega}_1 + \frac{\varepsilon_2}{L}[-1,1]\right]^{\frac{N-1}{N+1}} + \sigma_0 + \frac{\varepsilon_0}{L}[-1,1]$$

...

$$\Rightarrow \deg \frac{\varepsilon_2}{L} = \deg \tilde{\omega}_1 = \deg \omega_1 = N+1 = n_d + 3$$

$$\deg \frac{\varepsilon_1}{L} = \deg \tilde{\omega}_2 = N = n_d + 2, \quad \deg \frac{\varepsilon_0}{L} = \deg \sigma_0 = N-1 = n_d + 1$$

מ.ש.ל.

~~מקרה של SMC~~ $\quad \vartheta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

הערה: $\vartheta(t)$ - מדידה לפי Lebesgue ואינטגרבילי

נקרא אות מסדר סינון k (filtering order)

אם קיימת פונקציה $\xi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

~~כך~~ שהיא חסומה ו $\xi^{(k)} = \vartheta(t)$ כמעט בכל t

מסדר סינון k - η_k, $\quad \eta = \eta_0 + \eta_1 + \dots + \eta_{n_f}$

$$\begin{cases} \dot{w} = \Omega_{n_d, n_f}(\cdots z_0 - f, w, L) \\ \dot{z} = \mathcal{D}_{n_d, n_f}(w_1, z, L) \end{cases}$$

$\vec{\lambda} = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots\}$ (נסו) נקבע

אך מקבלים

$$\dot{\tilde{\omega}} = \Omega_{n_d, n_f}\left(\sigma_0 - \frac{\eta_0}{L}, \tilde{\omega} + h, 1\right), \quad h = -\left(\frac{\xi_{n_f}}{L}, \dots, \frac{\xi_1}{L}\right)^T$$

$$\dot{z} = \mathcal{D}_{n_d, n_f}\left(\tilde{\omega}_1 + \frac{\xi_{n_f}}{L}, z, 1\right) \qquad \xi_k^{(k)} = \eta_k, \ |\xi_k| \le \varepsilon_k$$