תנאי הגבלה להכלה עם שהיה

הרצאה 11

סימון $F(d_x x) = x^q d_x F(x)$

הכלת Filippov $\dot{x} \in F(x)$

$\exists K>0 : \forall x \quad F(x) \subset K\|x\|_h^q d_{\|x\|_h} [-1,1] \dots [-1,1]$

עבור כל $\|x\|_h$

$I=[-1,1]$, cube I^n קובייה

הומוגניות מאפשרת מלמעלה

נוכיח: $F(x)$ חסום ב $\|x\|_h \le 1$

לכן בכדור $\|x\|_h \le 1$ קיים $K>0$: $F(x) \subset KI^n$

מההומוגניות

$\dot{x}_i \in \|x\|_h^{m_i+q} [-1,1] \cdot K$ בקואורדינטות

תנאי הגבלה

$x_\tau : [-\tau, t] \to \mathbb{R}^n$

$\dot{x}_\tau \in K \|x_\tau\|_h^q d_{\|x_\tau\|_h} I^n$

(תנאי הגבלה)

$B_{h\varepsilon} = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z\|_h \le \varepsilon\}$

$t \in [0, t_f]$, $[0, \infty)$

$\dot{x} \in F(x(t-[0,1]\tau) + B_{h\varepsilon})$

$\exists x_\tau$ כך ש $x(t) = x_\tau(t)$, $t \in [-\tau, 0]$

אז גם מתקיים

$\exists x_\tau$ $\dot{x} \in F(x(t+[0,1]\tau) + B_{h\varepsilon})$, $t \le t_f$

$x(t) = x_\tau(t-t_f)$, $t \ge t_f$

$0 \le t - t_f \le \tau$

משפט (6) דיוק ההכללה ההומוגנית

נניח AS $\dot{x} \in F(x)$

$FTS \Leftarrow q<0$

115

$$\dot{x} \in F(x(t-[0,\tau]) + B_{h\varepsilon})$$

$$B_{h\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_h \le \varepsilon\}$$

תנאי התחלה כמו שהסכמנו

או אוילר: ($x(t)$ לא תלוי בערכים של $x(t)$ בזמן $t<0$),

$\Leftarrow$ כל הפתרונות שמוארכות למספיק זמן (למשל אלה שמקיימים $\dot{x} \in F(x)$)

מרגע מסויים מקיימים

$$\|x\|_h \le \mu\rho, \quad \rho = \max(\tau^{\frac{1}{p}}, \varepsilon)$$

μ תלוי במערכת (ב $F: \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$) בלבד

דוגמא

Twisting controller

$$\ddot{\sigma} \in [-C, C] - [K_m, K_M](\alpha_1 \operatorname{sign} \sigma + \alpha_2 \operatorname{sign} \dot{\sigma})$$

$$\alpha_1 K_m - C > \alpha_2 K_M + C, \quad \alpha_1 - \alpha_2 > C/K_m$$

רעש מדידה

$$\boxed{\ddot{\sigma} \in [-C, C] - [K_m, K_M](\alpha_1 \operatorname{sign}(\sigma(t_k) + \eta_k) + \alpha_2 \operatorname{sign}(\dot{\sigma}(t_k) + \hat{\eta}_k))}$$

$\deg t = 1$, $\deg \sigma = 2$, $\deg \dot{\sigma} = 1$

$$t_{k+1} - t_k \le \tau,$$

$$(\eta_k, \hat{\eta}_k) \in \{\|(\eta, \hat{\eta})\|_h \le \varepsilon\}$$

$$|\eta_k| \le \varepsilon_0, \quad |\hat{\eta}_k| \le \varepsilon_1$$

$$\Rightarrow \max(|\sigma|^{\frac{1}{2}}, |\dot{\sigma}|) \le \mu \max(\tau, \varepsilon_0^{\frac{1}{2}}, \varepsilon_1)$$

$$\varepsilon = \|\varepsilon_0, \varepsilon_1\|_h, \quad \|a, b\|_h = \max |a^{\frac{1}{2}}|, |b|$$

הוכחת המשפט

ידוע ש $\dot{x} \in F(x)$ AS , $q<0$

$\Rightarrow$ FTS

לכן כל הפתרונות שיוצאים מ- $\|x\| \le 1$

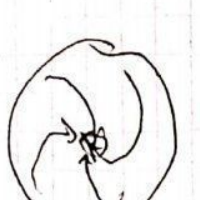
מגיעים ל- $x=0$ תוך זמן T כדי להישאר שם.

$$\dot{x} \in F(x(t-\tau[0,1])+B_{h\varepsilon})$$

כאשר $t \le \tau$

$$\dot{x} \in F(x(t-\min(\tau,t)[0,1])+B_{h\varepsilon})$$

לפי תלות רציפה בתנאי התחלה $\forall \delta_0$



תוך זמן T כל הפתרונות

נכנסים ל- $B_\delta = \{\|x\| \le \delta\}$

כאשר

מספיק קטנים τ_0, ε_0

$$\rho_0 = \max(\tau_0^{1/p}, \varepsilon_0)$$

$$\dot{x} \in F(x(t-\rho_0^p[0,1])+B_{h\rho_0}) \qquad (*)$$

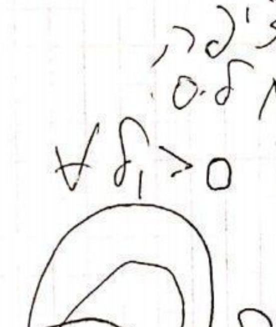
לאחר זמן T כל הפתרונות שיצאו מ- B_δ

חוזרים אליו, מתלות רציפה,

בתנאי התחלה, הם כולם קרובים ל-0.

$\forall \delta_1 > 0 \ \exists \delta > 0$: שהפתרונות לא יוצאו

מ- B_{δ_1}



$$\Omega_1 \xrightarrow{T} \Omega_2$$

Ω_1, Ω_2 אינווריאנטיים ל-(*)

ניקח $\varkappa > 0$ אז העתקה

$$(t, x, \rho_0) \longmapsto (\varkappa^p t, d_\varkappa x, \varkappa \rho_0)$$

פתרונות עוברים לפתרונות להכלה

$$\dot{x} \in F(x(t-(\varkappa\rho_0)^p[0,1])+B_{h(\varkappa\rho_0)})$$

117

בורריים ורשא כך ש $d_{\varkappa}\Omega_2 \subset B_1$,

אז מקבלים

אז מקבלים

$$\to d_{\varkappa}^2\Omega_2 \xrightarrow{\varkappa^p T} d_{\varkappa}\Omega_2 \xrightarrow{T} \Omega_2 \quad (**)$$

ההפרעה ϱ_0 הפרעה קטנה ...

$\varkappa^p\tau_0$, $\varkappa\varepsilon_0$ τ_0, ε_0

אפשר להפעיל רעש ושרה"ל לא לה קטין

$\varrho_0 = \max(\tau_0^{\frac{1}{p}}, \varepsilon_0)$ הפרעה (τ_0, ε_0) אז ⟸ כל הפתרונות אם

מתכנסים תוך זמן סופי ל- Ω_2

עכשיו ניקח τ, ε שרירותיים.

$\varkappa_0 = \varrho/\varrho_0$ נגדיר $\varrho = \max(\tau^{\frac{1}{p}}, \varepsilon)$

אז כל הפתרונות עם ההפרעה ϱ

תוך זמן סופי מתכנסים לתוך $d_{\varkappa_0}\Omega_2$

$= d_{\varrho}d_{\varrho_0^{-1}}\Omega_2$ נניח

$d_{\varrho_0^{-1}}\Omega_2 \subset B_{h\mu}$ נניח

⟸ בעבור זמן סופי כל פתרונות

מתכנסים ל $B_{h(\mu\varrho)} = d_{\varkappa}B_{h\mu}$.

$\|x\|_h \le \mu\varrho$ מושולו, $\iff x \in B_{h\mu\varrho}$

118

מקרה $q=-p=0,\ p=\deg t=0$

אז מקבלים של τ_0, ε_0 מספיק קטן

$\rho_0 = \max \varepsilon_0, \tau_0^{\frac{1}{p}}$

$$\cdots \xrightarrow{T} d_x^2\Omega_2 \xrightarrow{T} d_x\Omega_2 \xrightarrow{T} \Omega_2$$

$\delta < \delta$ $\tau \le \tau_0$ $\varepsilon \le \varepsilon_0$ נשמרת ההתכנסות $B_{h\varepsilon_0}\ \delta$

עכשיו ניקח $0 < \tau \le \tau_0$, ε כלשהו

$\boxed{\begin{matrix}\varepsilon = 0 \\ \Leftarrow \\ !AS\end{matrix}}$ $\boxed{\|x\|_h \le \mu\,\varepsilon}$ נקבל את הציון ללא תלות ב-τ

אותו התנאי $\tau \le \tau_0$

משפט $\exists\, \tau_0 > 0$ שלכל $\tau \le \tau_0$, $\forall \varepsilon$

מקבלים ציון $\|x\|_h \le \mu\varepsilon$

זמן ההתכנסות

$$T_{conv} \le \max\left(C \ln \max(X(0), \varepsilon), 0\right)$$

מקרה $p = \deg t < 0$, $q > 0$

delay: $\tau \mapsto \varkappa^p \tau$, $\varkappa > 1 \Rightarrow \varkappa^p\tau < \tau$

(**) אררות סופית

הפרעה: $\varepsilon \mapsto \varkappa\varepsilon$

משפט לכל $R > 0$ קיים כך, τ_0, ε_0 שלכל $\tau \le \tau_0$ $\varepsilon \le \varepsilon_0$

תוך זמן סופי מתקבל

$\|x_h\| \le \mu\varepsilon$ ונשמר לתמיד

אפשר להראות של ε גדול מאוד או τ או R יש התבדרות

$$\cdots \xrightarrow{\varkappa^p T} d_{\varkappa}\Omega_2 \xrightarrow{T} \Omega_2$$

$\varkappa^{k|p|}\tau \le \tau_0$ נשאר $\varkappa^{-k}\varepsilon \le \varepsilon_0$

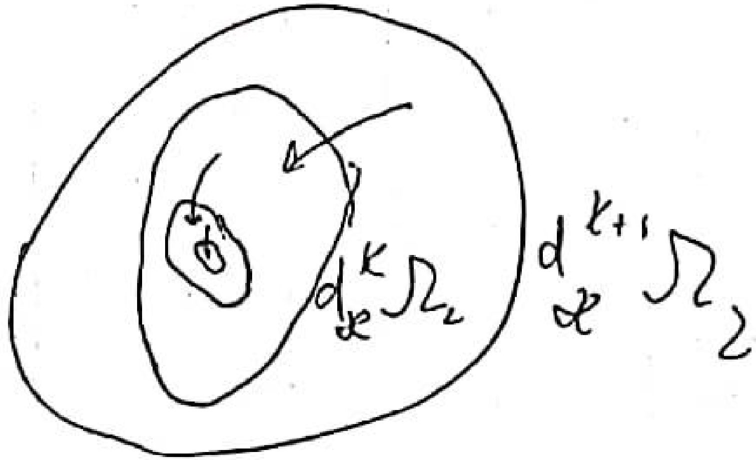
אפשר לקחת τ, ε קטנים $\Leftarrow$ לבנות סדרה

פעם שנייה:

$$d^{k+1}_{\varkappa}\Omega_2 \xrightarrow[\varkappa^{-k|p|}\tau_0,\ \varkappa^{k}\varepsilon_0]{\varkappa^{-k|p|}T} \cdots \to d^{2}_{\varkappa}\Omega_2 \xrightarrow[\varkappa^{-|p|}\tau_0,\ \varkappa\varepsilon_0]{\varkappa^{-|p|}T} d_{\varkappa}\Omega \xrightarrow[\tau_0,\varepsilon_0]{T} \Omega_2$$

תנאי הגעה

141



תנאי הכניסה: $\tau < \varkappa^{-k|p|}\tau_0,\ \varepsilon < \varkappa^{k}\varepsilon_0$

מילולי,

ברור ש-ε חייב להיות קטן

בהשוואה לגודל $d^{k}_{\varkappa}\Omega_2$

(כמו ש-ε_0 היה קטן בהשוואה לד)

Bhat, Bernstein (2000) דוגמא

$\deg x = 3, \quad \deg t = 1$ → חיכוך

$$\ddot{x} = -\lambda_1 [x]^{\frac{1}{3}} - \lambda_2 [\dot{x}]^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0$$

($\ddot{x} = -\lambda_1 [x]^{\alpha} + \lambda_2 [\dot{x}]^{\beta}$ זה מקרה פרט' של
$\alpha, \beta \in [0,1]$)

טענה: המע' נסג תוך זמן סופי לס.

$$V = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{3}{4}\lambda_1 x^{\frac{4}{3}}$$

אנרגיה:
(משוואת Newton)

$$\dot{V} = \frac{2}{2}\dot{x}\ddot{x} + \lambda_1 x^{\frac{1}{3}} \dot{x} = \dot{x}(\ddot{x} + \lambda_1 x^{\frac{1}{3}}) = -\lambda_2 \underbrace{[\dot{x}]^{\frac{1}{2}}}_{|\dot{x}|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}\dot{x}} \dot{x}$$

$\dot{V} = -\lambda_2 |\dot{x}|^{\frac{3}{2}} \le 0$ Lassalle

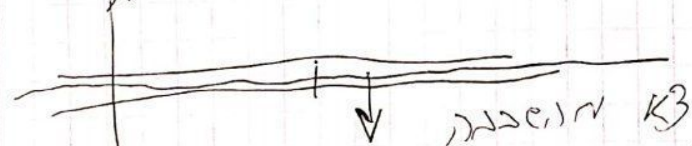
⇐ V יורד

$\ddot{V} = -\lambda_2 \frac{3}{2} \operatorname{sign}\dot{x} \cdot |\dot{x}|^{\frac{1}{2}} \ddot{x}$ ⇐ $x, \dot{x}$ חסום

חסום בכל תחום חסום

Barbalat lemma: $\dot{V} \to 0 \Rightarrow \ddot{x} \to 0$

נניח $V \not\to 0$ ⇐ $|x| \ge \underset{=\varepsilon}{\text{const}}$ (אחרת



פתרון "נצ" מושבבת
$|\dot{x}| \le \varepsilon_1 \ll 1$

סתירה

⇐ $V \to 0$ ⇐ $x, \dot{x} \to 0$

FT stability ⇐ הוכחנו

$\kappa = 0, 1, \dots$ נכניס הפרעות:

$$\ddot{x} = -\lambda_1 \left[x\left(t - (\sin^2 t)\varepsilon_1^2\right) + 2\varepsilon_2 \cos t \right]^{\frac{1}{3}}$$
$$- \lambda_2 \left[\dot{x}(t_k) + \varepsilon_3 \cos(10^7 t) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad t_{k+1} - t_k \le \tau$$
$$t \in [t_k, t_{k+1})$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \tau > 0$ (גזיר

$$\rho = \max\left(\tau, \varepsilon_1^2, \varepsilon_2^{\frac{1}{3}}, \varepsilon_3^{\frac{1}{2}}\right)$$

מגדירים $\deg \varepsilon_1^2 = \deg t = 1, \ \deg \varepsilon_2 = \deg x = 3$

$$\deg \varepsilon_3 = \deg \dot{x} = 2$$

$$\ddot{x} \in -\lambda_1 \left[x(t - \rho^2 [0,1]) + 2\rho[-1,1] \right]^{\frac{1}{3}}$$
$$- \lambda_2 \left[\dot{x}(t - \rho[0,1]) + \rho^2 [-1,1] \right]^{\frac{1}{2}}$$

לפי המשפט

$$|x| \le \mu_1 \rho^3$$
$$|\dot{x}| \le \mu_2 \rho^2$$

בפרט ל $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$

נקבל $|x| \le \mu_1 \tau^3, \quad |\dot{x}| \le \mu_2 \tau^2$

Twisting controller <u>דוגמא</u>

$$\ddot{x} \in [-C, C] - [K_m, K_M]\left(\alpha_1 \operatorname{sign} \sigma(t_k) + \alpha_2 \operatorname{sign} \dot{\sigma}(t_k)\right)$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 > C/K_m, \quad (\alpha_1 + \alpha_2)K_m - C > (\alpha_1 - \alpha_2)K_M + C$$

$$\deg x = 2, \ \deg \dot{x} = 1, \ \deg t = 1$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \max(t_{k+1} - t_k) = \tau$$

$$|x| \le \mu_1 \tau^2, \quad |\dot{x}| \le \mu_2 \tau$$

1