101b

פונקציית ליאפונוב הומוגנית

הרצאה 10

שתי דרכים לבנות פונקציות הומוגניות

נניח $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

איך לבנות פונקציה הומוגנית המקושרת ב f

1. הארכה (extension) מהספירה, $S_1=\{x \mid \|x\|=1\}$ Euclidian

$$f_h(x)=\varkappa_1^q f(d_{\varkappa_1}^{-1}x), \quad \underbrace{\|d_{\varkappa_1}^{-1}x\|=1}$$

המשוואה שמגדירה $\varkappa_1$ בצורה חד-משמעית

באמת

$d^{-1}_{\varkappa_1}x=d_{\varkappa_1^{-1}}x$ $\quad \cancel{\|d_{\varkappa}x\|}$

$d_{\varkappa_1}d_{\varkappa_2}=d_{\varkappa_1\varkappa_2}$

$$\|d_s x\|=\left(s^{2m_1}x_1^2+\dots+s^{2m_n}x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

פונקציה מונוטונית ורציפה

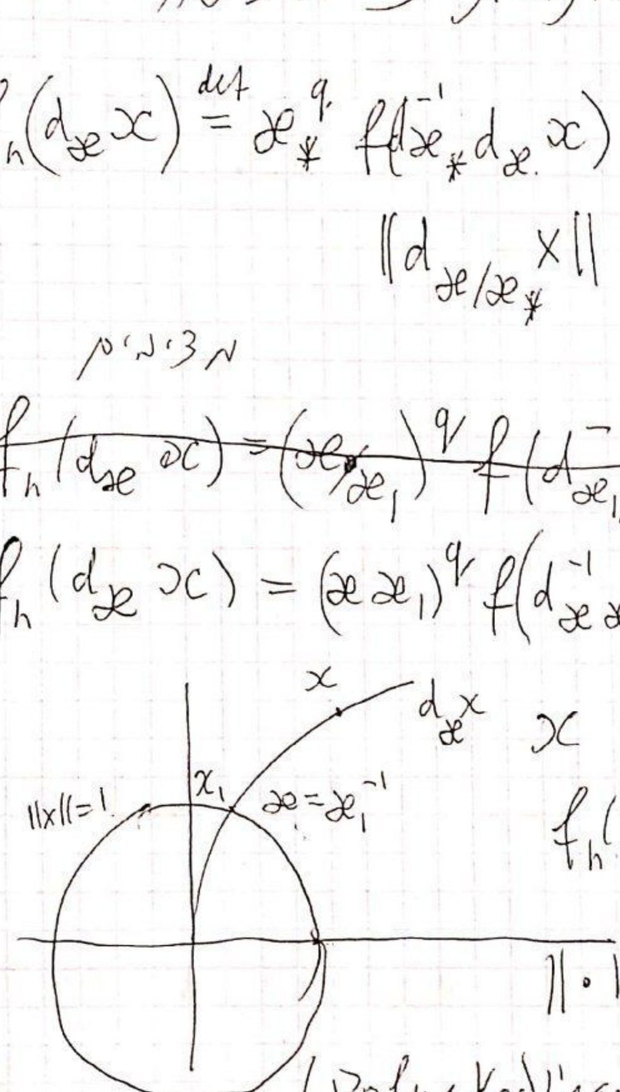
$$f_h(d_\varkappa x)\overset{def}{=}\varkappa_*^q f(d^{-1}_{\varkappa_*}d_\varkappa x), \quad \|d^{-1}_{\varkappa_*}d_\varkappa x\|=1$$

$$\|d_{\varkappa/\varkappa_*}x\|=1 \Rightarrow \varkappa/\varkappa_*=\varkappa_1^{-1}$$

מציבים $\quad \varkappa_*=\cancel{\varkappa/\varkappa_1}\,\varkappa\cdot\varkappa_1$

$$\cancel{f_h(d_\varkappa x)=(\varkappa/\varkappa_1)^q f(d^{-1}_{\varkappa_1/\varkappa}d_\varkappa x)=}$$

$$f_h(d_\varkappa x)=(\varkappa\varkappa_1)^q f(d^{-1}_{\varkappa\varkappa_1}d_\varkappa x)=\varkappa^q\varkappa_1^q f(d^{-1}_{\varkappa_1}x)$$
$$=\varkappa^q f_h(x)$$



$f_h(x)=\varkappa_1^q f(x_1)$

כך אפשר לבנות נורמה הומוגנית $\|\cdot\|_h$ מנורמה אוקלידית

היא נקראת "canonical" (Polyakov)

2. דרך שנייה

ל $q > 0$

$$f_h(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa_1^{q+1}} f(d_{\varkappa_1} x)\, d\varkappa_1$$

נגדיר

$$f_h(d_\varkappa x) = \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa_1^{q+1}} f(d_{\varkappa_1} d_\varkappa x)\, d\varkappa_1 =$$

שונים, סליחה

$$= \int_0^\infty \frac{\varkappa^{q+1}}{(\varkappa\varkappa_1)^{q+1}} f(d_{\varkappa\varkappa_1} x) \frac{d(\varkappa\varkappa_1)}{\varkappa} =$$

$$= \varkappa^q \int_0^\infty \frac{1}{(\varkappa\varkappa_1)^{q+1}} f(d_{\varkappa\varkappa_1} x)\, d\underbrace{(\varkappa\varkappa_1)}_{\tilde{\varkappa}_1} = \varkappa^q f_h(x)$$

הבעיה: אינטגרל צריך להתקיים

זה עובד כאשר

$$\exists r > 0:\ f\Big|_{\|x\| \le r} = 0,\ |f|\Big|_{\|x\| \ge r} \le const$$

למשל ניקח $V(x)$ פונקציה מוגדרת חיובית

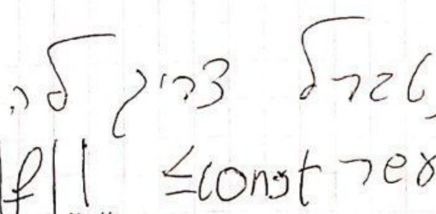
רציפה, 1

$\lim_{R\to\infty} \max_{\|x\|=R} V = \infty$, radially unbounded

$(x_n \to \infty \Rightarrow V(x_n) \to \infty$ או$)$ $\Rightarrow$ $V < 1$ בסביבת 0 , $V > 2$ בסביבת ∞

ציור

$a'(s) \ge 0$, $a(s) \in C^\infty$

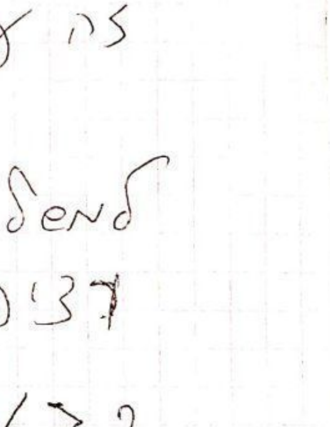


, $\tilde{V}(x) = a(V(x))_h = (a \circ V)_h(x)$ נגדיר

$$a(s) = \frac{1}{\hat{a}(2)} \hat{a}(s),$$

$$\hat{a}(s) = \int_{-\infty}^{s} \hat{\hat{a}}(s)\, ds, \quad \hat{\hat{a}}(s) = \begin{cases} 0 & s \le 1 \\ e^{\frac{1}{(s-1)(s-2)}} & 1 < s < 2 \\ 0 & s \ge 2 \end{cases}$$

פונקציה



עכשיו נבנה פונקציית ליאפונוב הומוגנית

פונקצית ליאפונוב, נוסח מעודכן

נוסח של Rosier (כן, אבל, במקור ל LDE

שגיאה אצל Bernuau, Efimov, Perruquetti, Polyakov (2013, 2016)

הכלות Filippov הומוגניות $\dot{x} \in F(x)$

$\deg t = p = -q$, $d_\varkappa x = (\varkappa^{m_1} x_1, \dots, \varkappa^{m_n} x_n)$, $m_i > 0$

<u>משפט</u> אם $\dot{x} \in F(x)$ AS אז לכל $k, l > 0$

המקיימים $k + q > 0$, $l \cdot \max_i m_i < k$

קיימים שתי פונקציות <u>רציפות</u>

1. $\tilde{W}, \tilde{V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\tilde{W}, \tilde{V} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

מוגדרות חיוביות: $\tilde{W}(x), \tilde{V}(x) > 0 \iff x \neq 0$

$\tilde{W}(0) = \tilde{V}(0) = 0$

2. $\tilde{V} \in C^l(\mathbb{R}^n)$, $\deg \tilde{V} = k$, $\deg \tilde{W} = k + q$

3. $\forall x \in \mathbb{R}^n : \max_{z \in F(x)} \nabla \tilde{V}(x) \cdot z \le -\tilde{W}(x)$

<u>הערה:</u> $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_1}$ הומוגנית גזירה

$$\deg \varphi'_{x_i} = \deg \varphi - \deg x_i = \deg \varphi - m_i$$

לכן לנגזרות חלקיות מסדר מסויים ישנה דרגת הומוגניות שלילית

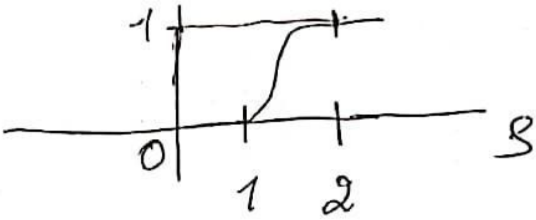
אם $\deg \theta < 0$ אז היא לא רציפה לפחות ב-$x=0$ כי אם $\theta(x_0) \neq 0$ אז

$$\lim_{\varkappa \to 0} \theta(d_\varkappa x_0) = \lim_{\varkappa \to 0} \varkappa^{\deg \theta} \theta(x_0) = \infty \text{ או } -\infty$$

Clarke: V, W יש
Kurzweil

הוכחה: לפי Rosier

$a(s)$:



$a'(s)>0 \quad s\in(1,2)$

$a\in C^\infty$

$a\circ V(x) \overset{def}{=} a(V(x))$

$$\tilde V(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\varkappa_1^{k+1}}(a\circ V)(\varkappa_1^{m_1}x_1,\dots,\varkappa_1^{m_n}x_n)\,d\varkappa_1 & x\neq 0\\ \boxed{0 \qquad x=0} & \end{cases}$$

מיותר

ראינו בפרט תמיד נכון:

הומוגני (התלות ב-$\varkappa_1$ נעלמת

$\deg\tilde V=k$

$\forall R>0 \quad \exists\, \gamma_m,\gamma_M:$ $\quad V(d_\varkappa x)\ge 2 \quad \|x\|\in[1,2]R,\ \varkappa>\gamma_M$

כי רדיאלית לא חסומה

מרציפות $\quad V(d_\varkappa x)\le 1 \quad \|x\|\in[1,2]R,\ \varkappa<\gamma_m$

$\tilde V$ מוגדר $\wedge$ חיובי $\wedge$ + homogeneity ⇒ radially unbounded!

$$\Rightarrow \tilde V(x)=\int_{\gamma_m}^{\gamma_M}\frac{1}{\varkappa_1^{k+1}}(a\circ V)(d_{\varkappa_1}x)\,d\varkappa_1+\underbrace{\int_{\gamma_M}^{\infty}\frac{1}{\varkappa_1^{k+1}}\,d\varkappa_1}_{=\frac{1}{k\gamma_M^k}}$$

$\|x\|\in[1,2]R$

$\tilde V\in C^\infty \Leftarrow$

הומוגניות

$$\frac{\partial\tilde V}{\partial x_i}=\int_{\gamma_m}^{\gamma_M}\frac{\varkappa_1^{m_i}}{\varkappa_1^{k+1}}a'(V(d_{\varkappa_1}x))\frac{\partial V}{\partial x_i}(d_{\varkappa_1}x)\,d\varkappa_1 = \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa_1^{k-m_i+1}}a'(V(d_{\varkappa_1}x))\frac{\partial V}{\partial x_i}(d_{\varkappa_1}x)\,d\varkappa_1$$

$\deg\frac{\partial\tilde V}{\partial x_i}=k-m_i$

$$\overbrace{}^{\frac{\partial V}{\partial x}(x^{\dots}) = \nabla \tilde V(x)}$$

$$\dot{\tilde V}(x) = \frac{\partial \tilde V}{\partial x}(x) F(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa_1^{k+1}}\, a'(V(d_{\varkappa_1}x))\, \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}(d_{\varkappa_1}x)\, d_{\varkappa_1}}\, d\varkappa_1 \cdot \underbrace{F(x)}_{\text{המוגני.}}$$

המוגני.

$$\frac{\partial V}{\partial x}(d_{\varkappa_1}x)\, d_{\varkappa_1} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)\Big|_{d_{\varkappa_1}x} \begin{pmatrix} \varkappa_1^{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varkappa_1^{m_n} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\varkappa_1^{m_1}\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \varkappa_1^{m_n}\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)\Big|_{d_{\varkappa_1}x}, \quad F(x) = \varkappa_1^{-q} d_{\varkappa_1}^{-1} F(d_{\varkappa_1}x)$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa_1^{k+1}}\, a'(V(d_{\varkappa_1}x)) \frac{\partial V}{\partial x}(d_{\varkappa_1}x)\, d_{\varkappa_1} d_{\varkappa_1}^{-1} \varkappa_1^{-q} F(d_{\varkappa_1}x)\, d\varkappa_1 =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa_1^{k+q+1}}\, a'(V(d_{\varkappa_1}x)) \frac{\partial V}{\partial x}(d_{\varkappa_1}x)\, F(d_{\varkappa_1}x)\, d\varkappa_1$$

לא כולן ~~[illegible]~~ המוגנית חיובית

$$\deg \dot{\tilde V} = k+q = k - \deg t = \deg \tilde V - \deg t$$

$$\dot{\tilde V}(x) = \left\{ \nabla \tilde V(x) \cdot z \;\middle|\; z \in F(x) \right\}, \quad z = \varkappa_1^{-q} d_{\varkappa_1}^{-1} z_1, \quad z_1 \in F(d_{\varkappa_1}x)$$

$$\nabla \tilde{V}(x)\cdot z = \int_0^{\infty} \frac{1}{\varkappa_1^{k+q+1}}\, a'(V(d_{\varkappa_1}x))\, \nabla V(d_{\varkappa_1}x)\cdot z_{1\varkappa_1}\, d\varkappa_1 \qquad z \in F(x)$$

107

$$z_{1\varkappa_1} = \varkappa_1^{q} d_{\varkappa_1} z \in F(d_{\varkappa_1} x)$$

שוב אינווריאנטיות: $F(d_{\varkappa_1}x) = \varkappa_1^{q} d_{\varkappa_1} F(x)$ לכן

לפי משפט של Clarke, Ledyev, Stern

$$\max_{z_1 \in F(d_{\varkappa_1} x_1)} \nabla V(d_{\varkappa_1}x)\cdot z_1 \le -W(d_{\varkappa_1}x)$$

$W \in C(\mathbb{R}^n) \cap C^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

מוגדרת חיובית $\int > 0$

$$\max_{z \in F(x)} \nabla \tilde{V}(x)\cdot z \le -\tilde{W}(x)$$

כאשר

$$\tilde{W}(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\varkappa_1^{k+q+1}}\, a'(V(d_{\varkappa_1}x))\, W(d_{\varkappa_1}x)\, d\varkappa_1$$

$$\deg \tilde{W} = k+q = \deg \tilde{V} - \deg t$$

<u>מ.ש.ל.</u>

$\forall x \neq 0 \quad \int_{\gamma_m}^{\gamma_M} \Longleftarrow$ של $\tilde{V}, \tilde{W}$ רגולריות

(של החלק הרגולרי)

הוכחנו רציפות ⟸ רציפות

$\boxed{\text{חלקות ב-0:}}$

$j = j_1 + \dots + j_m \le \ell$

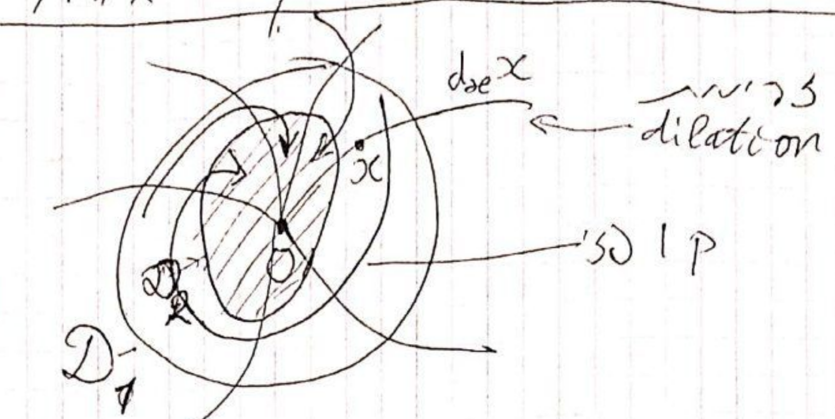
$j \le \ell$

$$\tilde{W} \in C, \quad \tilde{W} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

$$\deg \frac{\partial^j}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}} \tilde{V}(x) = k - j_1 m_1 - \dots - j_n m_n > 0, \quad \tilde{V} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \Rightarrow \partial^j \tilde{V}\Big|_{\|x\|=1}$$ חסומה

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial^j}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}} V(x) = \lim_{\varkappa\to 0} \varkappa^{k - j_1 m_1 - \dots - j_n m_n} V(\bar{x})\Big|_{\|\bar{x}\|=1} = 0$$ <u>כי</u>

התכנסות - סימון מאוחד לינארית לא



הגדרה קבוצה $D \subset \mathbb{R}^n$ נקראת dilation retractable

אם $\forall \varkappa \in [0,1]\quad d_\varkappa D \subset D$

הגדרה התכנסות contractivity

קיימים שני קומפקטים D_1, D_2

D_1 dilation retractable, $0 \in D_2 \subset \text{Interior } D_1$

($0 \in D_1 \Leftarrow$) ($D_2 \neq \emptyset \Leftarrow$)

ומספר $T > 0$ כך שלכל פתרון

ש- | הכללת Filippov הוגדרו, $\dot{x} \in F(x)$ וכו,

$x(0) \in D_1 \Rightarrow \forall\, x(T) \in D_2$

משפט (Levant (2005), Levant, Efimov, Polyakov, Perruquetti (2016))

$\dot{x} \in F(x)$ יציבה אס' (AS) $\Leftrightarrow$ יש התכנסות,

נניח homogeneity degree HD $q = -\deg t$

1. $q < 0$: finite-time stability FTS $\Leftrightarrow$ AS
$\Rightarrow q < 0,\ 0 < -q \le \min \deg x_i$

2. $q = 0$: exponential stability

$\exists \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0 : \gamma_2 \|x(0)\| e^{-\gamma_3 t} \le \|x(t)\| \le \gamma_1 \|x(0)\| e^{-\gamma_3 t}$

3. התכנסות תוך זמן חסום לכל כדור $\|x\| \le R$

התכנסות אחידה ממקום כלשהו ל-0.

הוכחה: נסמן $\deg t = p = -q$

נזכיר שהטרנספורמציה

$$(t, x(t)) \longmapsto (\varkappa^p t,\ d_\varkappa x(t))$$

מעבירה פתרון לפתרון

ברור ש $d_1 \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1$.

קיים מרחק מינימלי

~~$\rho_m(\mathcal{D}_2, \partial\mathcal{D}_1) = \rho_m$~~

~~$\rho = \min \min \|z_1 - z_2\| > 0$, $z_2 \in \mathcal{D}_2$, $z_1 \in \partial\mathcal{D}_1$~~

$\forall x_0 \in \mathcal{D}_2\ \exists U_{x_0}$ סביבה $\subset \mathcal{D}_1\ \exists \varkappa_{0x_0} < 1 : x_0 \in d_{\varkappa_{0x_0}} U_{x_0} \subset d_{\varkappa_0} \mathcal{D}_1$

מקומפקטיות

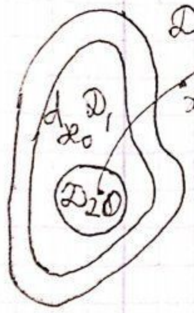
$\varkappa_0 = \max \varkappa_{0x_0} < 1 \Rightarrow \exists \varkappa_0 < 1 :$

$\mathcal{D}_2 \subset d_{\varkappa_0} \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_1$

~~$\rho_M(d_{\varkappa_0}\mathcal{D}_1, \partial\mathcal{D}_1) = \rho_M(\varkappa_0)$~~

~~$\rho(0, \mathcal{D}_2) > 0 \Leftarrow 0 \in \partial\mathcal{D}_1$~~

~~$\rho(0, \partial\mathcal{D}_1) = \rho_M(0) > 0$~~ כי $0 \in \mathcal{D}_2$



לכן מ-T נקבל

$$\mathcal{D}_1 \supset d_{\varkappa_0}\mathcal{D}_1 \supset \mathcal{D}_2,\quad x(0) \in \mathcal{D}_1 \Rightarrow x(T) \in d_{\varkappa_0}\mathcal{D}_1$$

בונים סדרה

$$\to d^{-1}_{\varkappa_0}\mathcal{D}_1 \xrightarrow{\varkappa_0^{-p}T} \mathcal{D}_1 \xrightarrow{T} d_{\varkappa_0}\mathcal{D}_1 \xrightarrow{\varkappa_0^{p}T} d^2_{\varkappa}\mathcal{D}_1 \to$$

$x(t) \to 0$

ממלאים את כל $\mathbb{R}^n$

נסמן המעבר הוא $\varkappa_0^{kp}T$

מ $d^k_{\varkappa_0}\mathcal{D}_1$ ל $d^{k+1}_{\varkappa_0}\mathcal{D}_1$, $k \in \mathbb{Z}$

נזכיר $d_\varkappa x = (\varkappa^{m_1} x_1, \dots, \varkappa^{m_n} x_n)$

לכן $\rho_M(d^k_{\varkappa_0}\mathcal{D}_1, 0) \le \varkappa_0^{km}\rho_0$, $k \geq 0$

$\rho_0 = \rho_M(\mathcal{D}_1, 0)$

נניח $x(t) \in d_{x_0}^{k_0} \mathcal{D}_1$

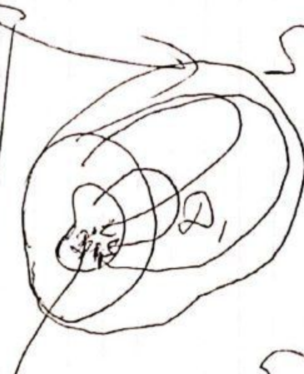
$\boxed{p>0}$ .1

$T_{convergence} \le T\left(x_0^{k_0 p} + x_0^{k_0 p+1} + \dots\right) = \frac{T x_0^{k_0 p}}{1-x_0^{p}}$ סך

נשאר להוכיח את היציבות הנ״ל

$p \geq 0$ .2 זמן אין סופי

Ω קבוצה! אינווריאנטית



נקודות של כל הפתרונות שמתחילים ב-$\mathcal{D}_1$ בזמן 0 ומסתיימים ב-$d_x \mathcal{D}_1$ בזמן T מהווים קבוצה קומפקטית Ω (Filippov)

$d_{x_0}\mathcal{D}_1$

עבור זמן T סופי הם נשארים בתוך Ω

$\forall k>0: 0 \in \to d_{x_0}^{k} \Omega \xrightarrow[?]{x_0^{kp}T} d_{x_0}^{k+1}\Omega \to$

קבוצה אינווריאנטית מוכלת ב-O.

$\bar{m} = \max m_i$

$\underline{m} = \min m_i$

~~[illegible]~~

$p=0 \Leftarrow$ .2

$\forall k \quad d_{x_0}^{k} \mathcal{D}_1 \xrightarrow{T} d_{x_0}^{k+1} \mathcal{D}_1 \quad \left(\to d_{x_0}^{k}\Omega \xrightarrow{T} d_{x_0}^{k+1}\Omega \to\right)$

$B_r = \{\|x\|<r\} \subset \mathcal{D}_1 \subset \Omega \subset B_R = \{\|x\| \le R\}$

זמן ההתכנסות ל- $x_0^{p\ell}\mathcal{D}_1$

הוא $\geq T \cdot \log_{x_0^{m_i}} \|x\|/R$

$p<0$, $q>0$ .3

$k<0 \Rightarrow x_0^{kp}T < T$, $x_0^{-p}<1$

זמן ההגעה ל- $d_{x}^{k}\mathcal{D}_1$ מ-∞ הוא k מעורך ב

$\dots + x_0^{(k-2)p}T + x_0^{(k-1)p}T = T x_0^{(k-1)p} \frac{1}{1-x_0^{-p}}$

סופי

משפט (Levant 2005)

נניח של $x \in F(x)$ הכללת Filippov
$\dot{x} \in \tilde{F}(x)$
יש אותו סוג של הומוגניות $d_{\varkappa}$
ואותה דרגת הומוגניות q

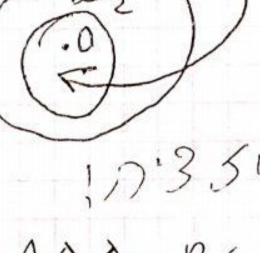
1. $F(x)$ AS
2. גם נניח שבכדור $B_1=\{x \mid \|x\|\le 1\}$ מתקיים

$$\forall x \quad \tilde{F}(x) \subset F(x) + B_{\varepsilon} \ (=F(x)^{\varepsilon})$$

Filippov

אז $\exists \varepsilon_0>0 \ \forall \varepsilon \le \varepsilon_0$
כל הכללה $\dot{x}\in\tilde{F}(x)$ גם כן AS

הוכחה: גרפים של $F(x)$, $\tilde{F}(x)$
קרובים בכל תחום קומפקטי
כי $\tilde{F}(d_{\varkappa}x) = \varkappa^{q} d_{\varkappa} \tilde{F}(x)$
לכן מתלות רציפה בתנאי ימין
נקבל שגם ל-$\tilde{F}$ מתקיימות התכונות



מוכח.

מסקנה: לינאריזציה

$$\dot{x} = f(x) = Ax + R(x), \quad R = o(\|x\|)$$

$\forall \varepsilon>0$ $\quad A = f'(0)$, $\dot{x} = Ax$ $\quad \deg x_i = 1$, $\deg t = -q = 0$

$\dot{x} = f(x) \in Ax + B_{\varepsilon}\|x\|$ בסביבה קטנה סביב 0

אם $\operatorname{Spec} A \subset \mathbb{C}_-$ ⇐ $\dot{x}\in\{Ax\}$ AS

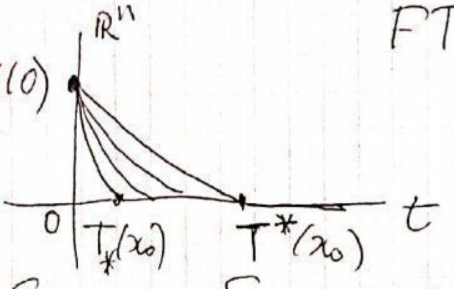
⇐ ε-δ קטן מספיק $\dot{x}\in Ax + B_{\varepsilon}\|x\|$ גם כן AS

⇐ $\dot{x} = f(x)$ AS (לוקלית)

זמן התכנסות

$x\in\mathbb{R}^n,\ \dot{x}\in F(x)$
הכלת Filippov

נניח $q<0$ כך $\deg t = p = -q > 0$
אז יציבות אסימפטוטית AS גוררת יציבות
בזמן סופי FTS



לכל תנאי התחלה,
יש אולי ∞ פתרונות
(לפחות אחד)

משפט זמן התכנסות מקסימלי (מינימלי)
הוא פונקציה חצי רציפה, מלמעלה (מלמטה),
של תנאי התחלה, הומוגנית מדרגה p.

$$c_m\|x\|_h^p \le \underset{\text{מינימלי}}{T_*(x)} \le T_{conv} \le \underset{\text{מקסימלי}}{T^*(x)} \le C_M\|x\|_h^p$$

הגדרה $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ חצי רציפה,

מלמעלה: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \|x-x_0\|<\delta \Rightarrow \varphi(x)\le\varphi(x_0)+\varepsilon$

מלמטה: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \|x-x_0\|<\delta \Rightarrow \varphi(x)\ge\varphi(x_0)-\varepsilon$

מלמעלה & מלמטה = רציפות רגילה

הוכחת המשפט

נציין $\Phi(x_0)$ - קבוצת פתרונות אם $x(0)=x_0$:

$$T^*(x_0)=\sup_{x(\cdot)} \underbrace{\inf_{t_1}\left\{t_1\ge 0,\ \begin{matrix}x(\cdot)\in\Phi(x_0):\\ \forall t>t_1\ x(t)=0\end{matrix}\right\}}_{T_{conv}(x(\cdot))} < \infty$$

הוכחנו

יותר מכך הוכחנו
מדרג

$$C_M=\sup_{\|x\|_h=1} T^*(x) < \infty$$

~~$C_1 = \inf$~~

$$T_*(x_0)=\inf_{x(\cdot)} \inf_{t_1}\left\{t_1>0,\ \begin{matrix}x(\cdot)\in\Phi(x_0):\\ \forall t>t_1\ x(t)=0\end{matrix}\right\}$$

$$c_m=\inf_{\|x\|_h=1} T_*(x)<\infty$$

$0 < c_m \le C_M$ כי $\|\dot{x}\|$ חסום ב $\|x\|\in[0.5,2]$

$\le T_*(x_0)$ $(\le T^*(x_0)$ מונוטוניות

$$C_m\|x_0\|_h^P \le T_{conv}(x^*) \le C_M\|x_0\|_h^P$$

(נא' הגבלה,

ניקח קטע $I = [0, C_M\|x_0\|_h^P + 1]$

כל הפתרונות בסביבה מוגדרים גם ב-I

K, קיים פתרון $x^*_*(\cdot)\in\varphi(x_0)$ כך ש

$\varphi(x_0)|_I \subset C[I]$ compact

$\varphi_K: T_{conv}(\varphi_K)\to T^*(x_0)$

$\varphi_{K_i} \rightrightarrows \varphi^* \Rightarrow T_{conv}(\varphi^*)=T^*(x_0)$

$T_{conv} = T^*(x_0)$

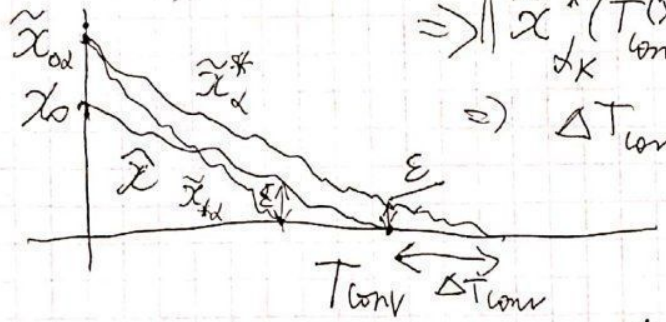
$x^*(\cdot)\in\varphi(x_0):\ T_{conv}=T_*(x_0)$

מתלות רציפה בתנאי התחלה

$$\varphi(x_0)\ni \hat{x}^*(\cdot) \xLeftarrow[\text{תת-סדרה}]{} \tilde{x}^*_{\alpha_K} \Leftarrow x_0 \Leftarrow \tilde{x}_{0\alpha}$$

$$\Rightarrow \|\tilde{x}^*_{\alpha_K}(T_{conv}(\hat{x}))\|_h \le \varepsilon_K,\ \varepsilon_K\to 0$$

$$\Rightarrow \Delta T_{conv}\le C_M\varepsilon_K^P\to 0$$



לכן $T_{conv}(\hat{x}^*(\cdot)) \le T^*(x_0)$

$$T_{conv}(\tilde{x}^*_{\alpha_K}) \le T_{conv}(\hat{x}^*(\cdot)) + C_M\varepsilon_K^P,\quad \varepsilon_K\to 0$$

תכ' רציפות מלמעלה של T^*

דומה: $\tilde{x}_{*\alpha_K}\to\hat{x}_*(\cdot)$, $T_{conv}(\tilde{x}_{*\alpha_K}(\cdot)) = T_*(x_{0\alpha_K})$

$$T_{conv}(\tilde{x}_{*\alpha_K}(\cdot)) \ge T_{conv}(\hat{x}_*(\cdot)) - C_m\varepsilon_K^P \to T_*(x_0)$$

מ.ש.ל.