שיטות צפיה ובקרה תוך זמן סופי

אריה לבנט, בצמנים טומים שרייבר 123B
שעות קבלה ב ZOOM, עדיף יום ג', 19^{00}-15^{00}
http://www.tau.ac.il/~levant/fintime/
וכמובן Moodle

תוכנית הקורס:

1. מבוא קצר לבקרה לא לינארית ומשוואות דיפרנציאליות עם צד ימין לא רציף, הכללות דיפרנציאליות
2. שיטות בקרה בתנאי אי-וודאות
   מבוא קצר ל Sliding mode control
   בקרה במצבי החלקה
3. הכללות דיפרנציאליות הומוגניות:
   תורת היציבות, דיוק בנוכחות הפרעות ורעש
   מימוש במחשב
4. תכנון בקרים וצופים (controllers & observers)
   מערכות הומוגניות כלשהי,
   גוזרים מדויקים, discretization
   סינון רעשים ללא איבוד הדיוק
5. יציבות בזמן קבוע Fixed Time Stability
   בקרת מערכות מרובות פלטים וקלטים
   Multi-Input Multi-Output Systems
6. סדר יחסי פרקטי Practical Relative Degree

יום ב' 15^{00}-18^{00}

ספרות

1. Shtessel, Edwards, Fridman, Levant – Sliding mode control and observation
Birkhauser, 2014
2. Filippov – Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides, Kluwer 1988
Springer 2010
3. Slotine and Li – Applied Nonlinear Control
Prentice-Hall, 1991
4. Khalil – Nonlinear Systems
Prentice Hall, 2001
5. Isidori – Nonlinear Control Systems
Springer 1995
6. Bacciotti, Rosier – Liapunov functions and Stability in Control Theory, Springer 2005

http://www.tau.ac.il/~levant/ -ב מאמרים

—— " —— /Levant-SMC2019_for_students.pdf

בעיות בקרה: בקרת טיסה, מיזוג מכונות לבניה, מכוניות אוטונומיות, רובוטים, drones, לוויינים

מערכת:
$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,u), & x\in\mathbb{R}^n \\ y = h(t,x) & u\in\mathbb{R}^m \\ & y\in\mathbb{R}^k \end{cases}$$

<u>המערכת לא סגורה!</u> u בידיים שלנו

יעדי בקרה, היעדים המוגדרים

1. <u>Tracking</u> בעיית עקיבה; $y=y_c(t)$ כלומר צריך להביא $y-y_c(t)\to 0$ ע"י בחירת u

2. Stabilization בעיית "ייצוב": להביא $x(t)\to 0$ ע"י בחירת u מתאים

א. $x(t)$ לא ידוע ⇐ Observation problem בעיית צפייה

ב. y מדוד עם רעשים ⇐ בעיית filtering סינון

$u \to$ [מערכת] $\to y$ Open loop מערכת חוג פתוח

<u>דוגמא</u>

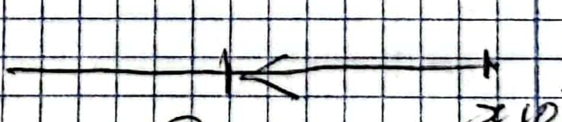
$\dot{x} = \cos t + u$

$y = x$, Stabilization

$u = -\cos t - \frac{x(0)}{5} \Rightarrow \dot{x} = -\frac{x(0)}{5}$ ~~closed loop system~~

$0 \le t \le 5$ $x \to 0$

$u = 0, \ t > 5$



צריך לספק לה את המערכת, את x כל רגע

2 נניח אם ב-$t=0$ נמדד $\hat{x} = x(0)+\varepsilon$

אז בזמן $t=\tau$ נקבל $x(\tau)=\varepsilon$ ולא אפס

Feedback principle

עקרון משוב

$$\dot{x} = \cos t + u, \quad u = -x - \cos t$$
$$y = x$$

$$\dot{x} = -x, \quad x \to 0$$

מערכת סגורה, "מעגל סגור" closed-loop system

צריך מדידה רציפה, יותר מדויק של המערכת

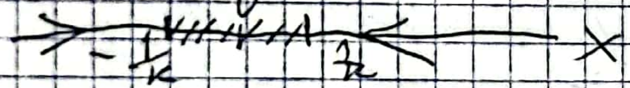
אז מאפיינים במבנה מערכת הבקרה, control system

תהליך הבקרה control process => מושג פיזיקלי

uncertainty אי וודאות

$$\dot{x} = a(t) + b(t)u \qquad a(t)\in[-1,1]$$
$$y = x \qquad b(t)\in[1,2]$$

Solution: $u = -kx, \quad k \gg 1$ (High gain)



$u = -2\,\mathrm{sign}\,x$ Sliding Mode control

$|\dot{x}| \geq 2-1 = 1, \qquad t > |x(0)| \Rightarrow x = 0$

לא ברור איך להגיע לגמרי | זמן סופי
אבל אפילו יציבות תוך | Finite time

שלמות המערכת

עם אופטימיזציה 3

$$u = -(2+x^2)\,\text{sign}\,x$$

טענה: זמן ההתכנסות ל $x=0$ מוגבל באופן אחיד לכל $x(0)$

(יציבות תוך זמן קבוע Fixed-time stability)

הוכחה (כמעט)

$$\dot{x} = a(t) - b(t)(2+x^2)\,\text{sign}\,x$$

$|a| \le 1, \quad b \in [1,2] \quad , \quad \dot{x} \in [-1,1] - [1,2](2+x^2)\,\text{sign}\,x$

לכן כאשר $x \neq 0$: $\dot{x}x < 0$ $\rightarrow\mid\leftarrow$

ללא הוכחות, נכנסים ל $x=0$ ⇐ נשארים בו.

$$|\dot{x}| \ge 2 + x^2 - 1 = 1 + x^2$$

זמן התכנסות:

$$T = \int_0^{|x(0)|} \frac{dx}{1+x^2} \le \int_0^1 \cancel{\dots}$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$$

$$\le \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \le \int_0^1 dx + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1 + \lim_{s\to\infty}\left(1 - \frac{1}{s}\right) = 2$$

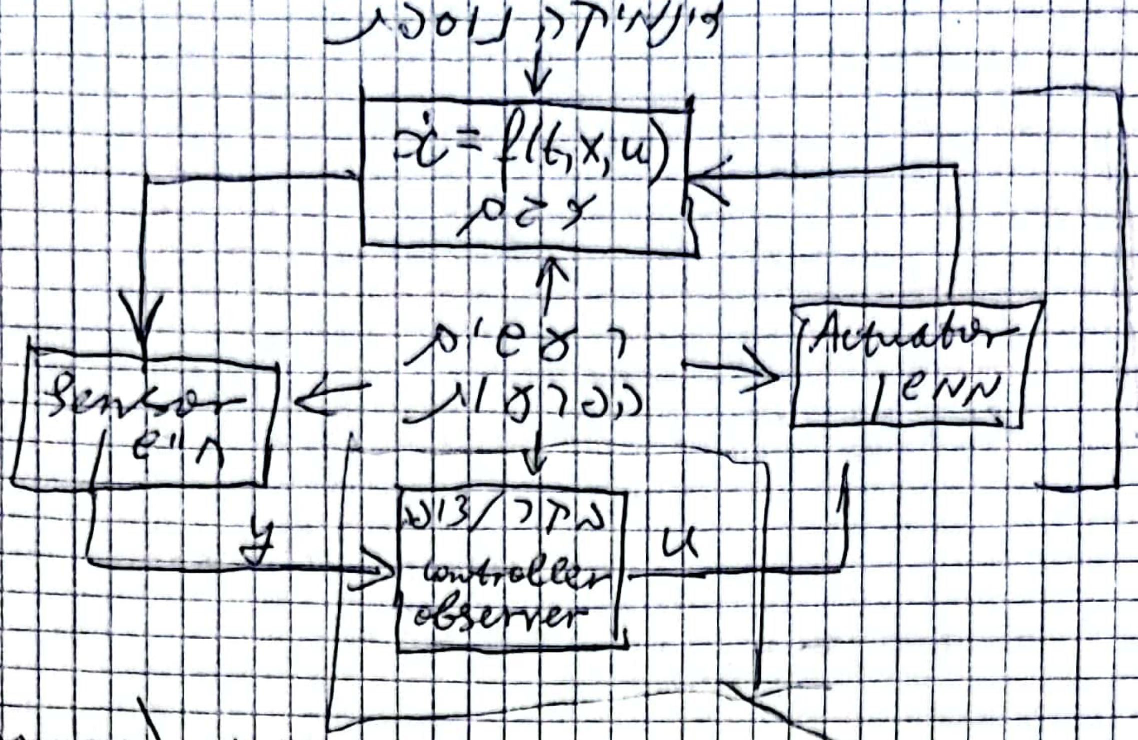
$$\boxed{T \le 2}$$

לצערי לא ישים במציאות

בקרה מ"ה אמת

אות מערכת מושלמת

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x,u) \\ y &= h(t,x) \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow$$



מימוש בגוף ממשי, דינמיקה בעיצה (אם ישנה)

החלוקה למערכת, הפרעות, חיישן וממשק

היא לא אמיתית

הרעיון של המהנדס הוא לטפל

בהפרעות, חיישן, ממשק ורעשים

וגם בכך שדינמיקת הבקר בצורה

discrete

אחר כך מתחילים משהו מ"imperfections"

לומדים מה קורה, simulation

אחר כך ניסוי בחיים אמיתיים

בדרך כלל מניחים ש- $\dot{x}=f(t,x,u)$

$y=h(t,x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^m$, $y\in\mathbb{R}^k$

h, f – חלקים (כמובן לא נכון)

אז אם $u=u(t,x)$ גם חלק הרגולציה

[illegible] בלתי אפשרי

[illegible] משפט!

לכן הבקרה, קלסית הרבה פעמים

לא לינארית

מערכות, קלסיות לינאריות

ניקח מערכת אוטונומית

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u), & f(x_0,u_0)=0 \\ y = h(x), & h(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ליניאריזציה

$$\begin{cases} (x-x_0)^{\cdot} = \underbrace{f'_x(x_0,u_0)}_{A}(x-x_0) + \overbrace{f'_u(x_0,u_0)}^{B}(u-u_0) \\ \qquad + \underbrace{o(x-x_0,u-u_0)}_{o(|x-x_0|+|u-u_0|)} \\ \underbrace{y-y_0}_{\Delta y} = h'(x_0)\underbrace{(x-x_0)}_{\Delta x} + o(x-x_0) \end{cases}$$

Send

$$\begin{cases} \Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u \\ \Delta y = C\Delta x \end{cases}$$

Linear Time-Invariant System

LTI system

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{y} = C\tilde{x} \end{cases}$$

מתכננים

בקר בזרה, $\tilde{u} = K\tilde{x}$

אז $u = u_0 + \tilde{u} = u_0 + K(x-x_0)$

אם $\tilde{x}$ לא ידוע, לכן צריך לבנות

Observer בונה

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - \tilde{y})$$

אז מציבים אות בקרה,

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - (y-y_0))$$

$$\Rightarrow \quad u = u_0 + K\hat{x}$$

ומקווים לטוב!

(בגבולות סבירים)

סימון O ו-o

נתונים $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{n_1},\ g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{n_2}$

נסמן מקוצר ש $x\to x_0 \iff$ "$x\approx x_0$"

$x_0\in\mathbb{R}^m$

$f(x)=o(g(x))$ "f קטן משמעותית מ-g"

כלומר, (o קטן)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|}=0$$

(וכן $g\neq 0$ בסביבת x_0, $x\neq x_0$)

$$f(x)=o(g(x))\iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \|x-x_0\|<\delta \Rightarrow \|f(x)\|\le\varepsilon\|g(x)\|$$

$$f(x)=O(g(x))\iff \exists C>0,\ \delta>0\quad 0<\|x-x_0\|<\delta\Rightarrow\|f(x)\|\le C\|g(x)\|$$

"מאותו סדר גודל"

מגדירים בצורה דומה כאשר x_0 שווה ∞

דוגמאות

$\boxed{x\to 0}$ $x^2=O(x),\ x^2=o(x),\ x^2=o(1),\ x=O(10^6)$

$\ln x=o\left(\frac{1}{x}\right),\ x=o\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$

$\boxed{x\to\infty}$ $1=o(x),\ \cos x=O(1000)$

$\ln x=o(x^{\alpha})$, $\alpha>0$; $x^{\alpha}=o(\ln x)$, $\alpha\le 0$

7

בעיית "צום" ערך לינאריזציה

$x \in \mathbb{R}$ $\quad \dot{x} = x^2 + u = u + o(x)$, $t \geq 0$

$u \in \mathbb{R}$

$$u_0 = x_0 = 0$$

$$\dot{\tilde{x}} = u, \quad u = -\tilde{x} = -x$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = -x + x^2$$

$$\longrightarrow \underset{0}{|} \longleftarrow \underset{1}{|} \longrightarrow$$

$$x(0) < 1 \Rightarrow x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$$

$$x(0) = 1 \Rightarrow x(t) = 1 \quad \forall t > 0$$

$$x(0) > 1 \Rightarrow x(t) \to \infty$$

תוך זמן קצוב

$$\underset{x(0)>1}{T} = \int_{x(0)}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - x} < \underbrace{\int_{x(0)}^{2} \frac{dx}{x^2 - \cancel{x}}}_{x(0) < 2 \text{ אם}} + \underbrace{\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{\frac{3}{4}x^2}}_{\frac{2}{3}} < \infty$$

רואים שהייצוב מקומי, רק בסביבת 0

אולם, מערכת אפשר לייצב

תוך זמן קצוב

$$\dot{x} = x^2 + u, \quad u = -x^2 - x^3 - x^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = -x^{\frac{1}{3}} - x^3 \qquad \longrightarrow \underset{0}{|} \longleftarrow$$

$$T \leq \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}} + x^3} \leq \int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} =$$

$$= \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{2} x^{-2} \Big|_1^{\infty} \right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

מה אם לינאריזציה של $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,u) \\ y = h(t,x) \end{cases}$ לאורך מסלול $x_*(t), u_*(t)$, $h(t, x_*(t)) = 0$

מייצב את $\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A(t)\tilde{x} + B(t)\tilde{u} \\ \tilde{y} = C(t)\tilde{x} \end{cases}$

יציבות לפי ליאפונוב Lyapunov

$$\dot{x} = f(t,x)\ ,\ f(t,x_0)=0\ ,\ t\ge t_0$$

מצב מנוחה equilibrium

$x\in\mathbb{R}^n,\ f\in C$

(כמו מערכת סגורה)

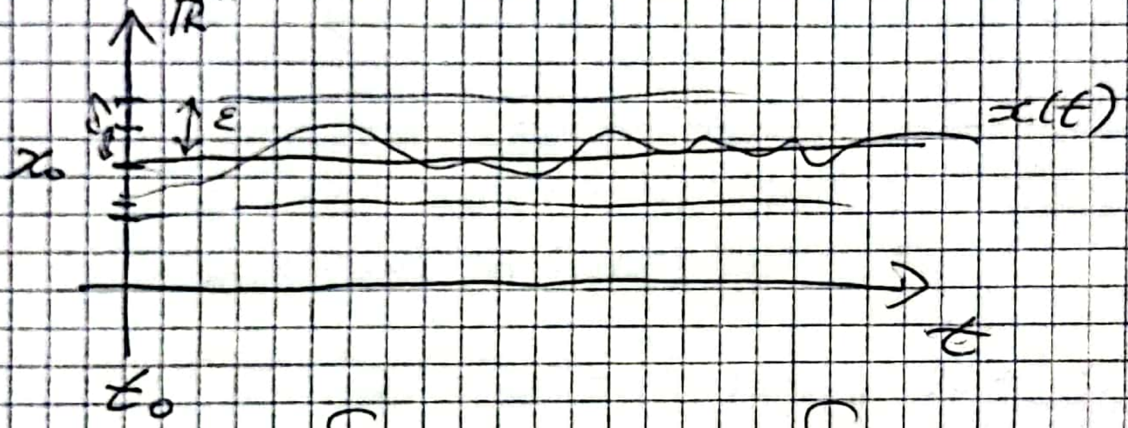
הגדרה מצב מנוחה x_0 נקרא

יציב לפי Lyapunov אם

1. קיים $\delta_0>0$ כך שלכל $\delta_0 > \|x(t_0)-x_0\|$ קיים פתרון $x(t)$ מוגדר ב-$t\in[t_0,\infty)$
2. לכל פתרון $x(t)$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x(t)$$

$$\|x(t_0)-x_0\|<\delta \Rightarrow \forall t\ge t_0\ \|x(t)-x_0\|<\varepsilon$$



בעצם זו תלות רציפה של הפתרון

בקטע אינסופי $[t_0,\infty)$

בתנאי התחלה $x(t_0)$

הגדרה x_0 - יציב אסימפטוטית אם

$(1,2)+3)\ \|x(t_0)-x_0\|<\delta_0 \Rightarrow x(t)-x_0\to 0$

לכן לפי default הנגזרת ליניארי/ok
היא יציבה.

הגדרת יציבות אסימפטוטית

__הגדרה:__ נקודת שיווי x_0 (בזמן t_0)
נקראת יציבה אסימפטוטית גלובלית
אם $\delta_0=\infty$,

$$\forall x(t_0)\quad \lim_{t\to\infty}\left(x(t)-x_0\right)=0$$

משפט Lyapunov

$$\dot{x}=f(t,x),\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad f(t,x_0)\equiv 0$$

$$\|x-x_0\|\le\gamma,\quad t\ge t_0$$

$V(x)$ נקראת פונקציית ליאפונוב אם

1. $v\in C^1,\ v:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$
גזירה ברציפות.
2. מוגדרת חיובית (positive definite)
$\forall x\ v(x)>0,\ v(x)=0 \iff x=x_0$
3. a. $\dot{v}=\frac{d}{dt}v(x(t))=\frac{\partial v}{\partial x}(x)\cdot\underbrace{f(t,x)}_{\dot{x}}\le 0$
כ"ש

אז x_0 יציב לפי ~~...~~ Lyapunov

3. b. $\dot{v}=\frac{\partial v}{\partial x}(x)f(t,x)\le -w(x)\le 0$

כאשר $w(x)$ רציפה, $w\in C,\ w:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$
ומוגדרת חיובית
$w(x)>0,\ w(x)=0\iff x=x_0$

אז x_0 יציב אסימפטוטית
(לוקלית בינתיים)

אם $\int_0^\gamma$, $\gamma=\infty$, f מוגדר בכל x

$t\ge t_0$

אם V, W מוגדרים ב-$x\in\mathbb{R}^n$ (בכל)

c.3 $\forall M>0$ $\{x\in\mathbb{R}^n \mid V(x)\le M\}$

חסום (קבוצה קומפקטית)

או (שקול)

$\forall \{x_k\}$ $x_k\to\infty \Rightarrow V(x_k)\to\infty$

(V is "radially unbounded")

$\Leftarrow$ x_0 - נש"מ יציבה אסימפטוטית

גלובלית

משפט Kurzweil (1957)

$\dot{x}=f(x)$, $f\in C$, $f(0)=0$

0 נש"מ יציבה אסימפטוטית

(גלובלית או לוקלית)

$\Leftrightarrow$ $\exists V, W \in C^\infty$ המקיימות c 1,2,3 או b 1,2,3

$\left(\tilde{W}=-\dot{V}\right.$ not smooth$\left.\right)$

~~W=W~~

הוכחה

לפי 1-3 c קיימת Lyapunov פונקציה

אך רק רציפה, לא ...

$$\dot{V}=\frac{\partial V}{\partial x}(x)\cdot f(x)\le -W(x)\le 0$$

$$-\tilde{W}(x)\in C$$

יציבות בקירוב הראשון

$$\dot x = Ax + R(t,x), \quad x\in\mathbb{R}^n$$

מניחים $R(t,x) = o(\|x\|) = o(x)$

uniformly in t

$$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall t\quad \|x\|<\delta \Rightarrow \|R(t,x)\|\le \varepsilon\|x\|$$

משפט

$\text{Spec}\,A \subset \mathbb{C}_- = \{\lambda\in\mathbb{C} \mid \text{Re}\,\lambda<0\}$

$\Leftarrow$ $x=0$ יציב אסימפטוטית

משפט

$\text{Spec}\,A \cap \mathbb{C}_+ \ne \emptyset$, $\mathbb{C}_+ = \{\lambda\in\mathbb{C} \mid \text{Re}\,\lambda>0\}$

$\Leftarrow$ $x=0$ לא יציב

(יש מסלולים שבורחים מכל סביבה קטנה מספיק)

דוגמא

$$\dot x = f(x),\quad f\in C^1,\quad f(0)=0,\quad x\in\mathbb{R}^n$$

$$\dot x = \frac{\partial f}{\partial x}(0)x + R(x), \quad R(x)=o(x)$$

לפי הגדרת הנגזרת

$$\dot x = Ax + o(x), \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$$

מטריצת Jacobi

$\text{Spec}\,A\subset\mathbb{C}_- \Rightarrow$ יציבות אסימפטוטית

$\text{Spec}\,A\cap\mathbb{C}_+\ne\emptyset \Rightarrow$ אי יציבות

דוגמה

$$\ddot x + 2\dot x + x + x^2 = 0, \quad x\in\mathbb{R} \qquad \left.\begin{array}{l} x(0)=0 \\ \dot x(0)=0 \end{array}\right\}$$ נק' שיווי משקל

$$y_1 = x, \quad y_2 = \dot x$$

$$\begin{pmatrix}\dot y_1\\ \dot y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 - 2y_2 - y_1^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ y_1^2\end{pmatrix}$$

יציבות אס' לפי קירוב

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2+x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2+x_2^2) \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \lambda^2+1$$

הכרעה לא [illegible]

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\dot{V} = 2x_1(x_2 - x_1(x_1^2+x_2^2)) + 2x_2(-x_1 - x_2(x_1^2+x_2^2))$$

$$= -(x_1^2+x_2^2)^2 = -w(x) \le 0$$

יציבות אסימפטוטית גלובלית

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1(x_1^2+x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(x_1^2+x_2^2) \end{cases}$$

$$\dot{V} = (x_1^2+x_2^2)^2 = V^2 \Rightarrow V \to \infty$$

$$V = \|x\|^2$$

יש התפוצצות בזמן סופי

Finite time escape

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1(x_1^2+x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 0.01x_2 + x_2(x_1^2+x_2^2) \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.01 \end{pmatrix}, \quad p(\lambda) = \lambda^2 + 0.01\lambda + 1$$

יציבות אס' לוקלית

אין התפוצצות אם מתחילים מ-0

מקרה לינארית, מבוא.

Controllability.

היעד: $\dot{x} = f(t,x,u)$, $(t_0,x_0) \xrightarrow{u(t)} (t_1,x_1)$

$\dot{x} = Ax + Bu$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$

משפט (Kalman 1960)

$$\text{Controllability} \iff \operatorname{rank}\underbrace{[B, AB, \dots, A^{n-1}B]}_{\text{controllability matrix } W} = n$$

הוכחה:

נניח $x(0) = x_0$, $t_0 = 0$

$$\underbrace{x(t) = x_h}_{\text{פתרון הומוגני}} + x_p \qquad x_p = e^{At}C(t)$$

וריאצית המקדמים

$$\cancel{Ae^{At}C} + e^{At}\dot{C} = \cancel{Ae^{At}}C + Bu$$

$$\dot{C} = e^{-At}Bu(t), \quad C = \int_0^t e^{-As}Bu(s)\,ds \; + \cancel{C} \to 0$$

לא חובה

$$x_p = e^{At}\int_0^t e^{-As}Bu(s)\,ds = \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)\,ds$$

פתרון כללי:

$$x = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)\,ds$$

היעד: למצוא $u(t)$ כך ש

$$x_1 = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)\,ds$$

$x_1 := x_1 - e^{At}x_0$ זה שקול למרחב של היעד

$$x_1 = \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)\,ds$$

להגיע מכל x_1 תוך זמן t נתון

1. $\operatorname{rank} W < n \Rightarrow$ אין controllability

$\operatorname{rank} W < n \Rightarrow \exists\, C^T \in \mathbb{R}^n$: קיים $C[B\ AB\ \dots\ A^{n-1}B] = 0$

$$C\cdot x_1(t) = \int_0^t Ce^{A(t-s)}Bu(s)\,ds = \int_0^t \underbrace{C\left(I + \frac{A}{1!}(t-s) + \frac{A^2}{2!}(t-s)^2 + \dots\right)B}_{0}\,u(s)\,ds = 0$$

$p(A) = 0$ כי ~~[illegible]~~ [illegible] משפט Hamilton

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

פולינום אופייני

$\Rightarrow A^n$ — צירוף לינארי של $I, A, \dots, A^{n-1}$

2. כיוון! $\text{rank } W = n \Rightarrow \text{controllability}$

הוכחה:

$$x_1 = \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds$$

נחפש $u(s)$ בצורה,

$$u(s) = \underset{m\times n}{B^T} \underset{n\times n}{e^{A^T(t-s)}} \underset{n\times 1}{\xi} \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$$

12b

$$x_1 = \left(\int_0^t \underbrace{e^{A(t-s)} B}_{n\times m} \underbrace{B^T e^{A^T(t-s)}}_{m\times n} ds \right) \xi$$

sk

צריך $0 \neq \det \underbrace{\int_0^t e^{A(t-s)} B B^T e^{A^T(t-s)} ds}$

G Gramian, ברור $G^T = G$

$\xi^T G \xi$ התבנית הריבועית $\Leftarrow\Rightarrow \det G \neq 0$

מוגדרת חיובית

$$\xi^T G \xi = \int_0^t \underbrace{\xi^T e^{A(t-s)} B B^T e^{A^T(t-s)} \xi}_{\text{מכפלה סקלרית ריבוע}} ds \overset{\text{נניח}}{=} 0$$

$$\Rightarrow \xi^T e^{A(t-s)} B \equiv 0 \quad \forall s \in [0, t]$$

$$\Leftrightarrow \xi e^{As} B \equiv 0 \quad \forall s \in [0, t]$$

$$\Leftarrow \xi e^{As} B\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \xi e^{As} B = \frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} \xi e^{As} B = \dots = 0$$

$$\xi B = \xi A B = \xi A^2 B = \dots = 0 \Leftarrow$$

$$\xi W = 0 \Leftarrow$$

$$\Rightarrow \text{rank } W < n$$

מוכח