

אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדויקים
תרגילים בשיטות למתמטיקה שימושית 1, נושאים מתקדמים במד"ר

המורה: פרופ' א. לבנט

1. להוכיח שהפתרון של בעיית קושי $y' \cos x + y \sin x + \sin|y|^{1/2} \sin x - 2 \sin x = 0$ קושי $y(0) = -1$ מקיים את האי-שוויון $1 - 2 \cos x < y < 3 - 4 \cos x$ כאשר $0 < x < \pi/2$. רמז: להשוות עם משוואות נוחות יותר. מה קורה כאשר $0 < x < \pi/2$? לנמק.

2. מצא פתרון בעיית קושי $y' = 2 \arctan y + \frac{3}{2} y \cos \varepsilon - \varepsilon(e^{2t} y + y^2) - \frac{1}{2} \pi$ $y(0) = \cos \varepsilon, y'(0) = \varepsilon$, $\ddot{y} = 2 \arctan y + \frac{3}{2} y \cos \varepsilon - \varepsilon(e^{2t} y + y^2) - \frac{1}{2} \pi$ לינארי לגבי $\varepsilon \approx 0$ כאשר t משתנה בקטע סגור כלשהו סביב 0.

3. למצוא את הפתרון הכללי של מערכת המשוואות כאשר ידוע פתרון אחד:
הפתרון הפרטי $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$
$$\begin{cases} \dot{x} = (1 + e^{-t} - te^{-t})x + (te^{-t} - e^{-t})y \\ \dot{y} = (e^{-t} - te^{-t})x + (1 + te^{-t} - e^{-t})y \end{cases}$$

4. למצוא פתרון כללי למשוואה $(t^2 - 1)\ddot{x} + 4t\dot{x} + 2x = 6t$ אם ידועים שני פתרונות

$$x_1 = t, \quad x_2 = \frac{t^2 + t + 1}{t + 1}$$

5. האם יש פתרונות יציבים למשוואה $\ddot{x} - 2\ddot{x} + 3\dot{x} \sin t - x \cos 5t = 0$? לנמק.

6. לבדוק את היציבות האסימפטוטית של הפתרון לבעיית קושי

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1, \ddot{x}(0) = 0, \quad \ddot{x} - (t^2 + 1)^{-1} \dot{x} + \dot{x} + tx = e^t$$

7. להוכיח שלכל פתרון של המשוואה $\ddot{x} + (3t + 8)/(t + 1) \cdot \dot{x} = 0$ יש לא יותר מ-2 אפסים בקטע $[20, 23]$.

8. להוכיח שלכל פתרון של המשוואה $\ddot{x} + 2(t + 1/t)x = 0$ יש לפחות נקודת קיצון אחת בקטע $[3, 7]$.

9. מה הוא שטח התחום שאליו עובר הריבוע $|x| \leq 0.5, |y| \leq 0.5$ כעבור 5 יחידות זמן כתוצאה מהתנועה מתוארת על-ידי מערכת המשוואות

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 3xy^2 \\ \dot{y} = \ln(x + 1) - y^3 \end{cases}$$

10. מה הוא נפח התחום שאליו עוברת הקובייה $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$ כעבור 3 יחידות זמן כתוצאה מהתנועה מתוארת על-ידי מערכת המשוואות? מה אפשר להגיד על יציבות הפתרון האפסי? לנמק.

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2xy/(1 + y^2 + z^2) + 5y \\ \dot{y} = 2y - z^3 - \ln(1 + y^2 + z^2) \\ \dot{z} = -x^7 + y + 3z \end{cases}$$

11. מה הם הערכים של $\alpha \in \mathbf{R}$ שבשבילם הנקודה הקריטית בראשית יציבה לפי הקירוב הראשון?

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin(\alpha x - 3y) + x \cos y \\ \dot{y} = \alpha e^{\alpha x - 2y} + \ln(1 + \alpha x) + 2x - \alpha \end{cases}$$

12. מה הם הערכים של $\alpha \in \mathbf{R}$ שבשבילם יש פתרון קבוע יציב לפי הקירוב הראשון. מה הוא הפתרון?

$$\ddot{x} + (\alpha^2 + 1)^2 \cos(\alpha \ddot{x} + \dot{x}) + 3\alpha \sin \dot{x} - \ln(1 - 2\alpha \ddot{x}) - x^2 = 0$$

13. לצייר את הדיוקן הפזי של המשוואה $\ddot{x} = -x(x^2 - 1)$ ולמיין את הנקודות הקריטיות. מהן הזוויות שאיתן הקווים חותכים את הציר $\dot{x} = 0$? לחשב את השיפועים של הקווים הפזיים היוצאים ונכנסים לנקודות הקריטיות.

14. לצייר את הדיוקן הפזי של המשוואה $\ddot{x} = (x^2 - 1)(x + 2)$ ולמיין את הנקודות הקריטיות. מהן הזוויות שאיתן הקווים חותכים את הציר $\dot{x} = 0$? לחשב את השיפועים של הקווים הפזיים היוצאים ונכנסים לנקודות הקריטיות.

15. איזה בעיות שפה צמודות לעצמן? לנמק.

$$\begin{cases} (u' \sin x)' + u = 0 \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}, \begin{cases} u'' + u' + u = 0 \\ u(0) = 0, u'(1) + u(1) = 0 \end{cases}, \begin{cases} (u' \cos x)' + u \sin x = 0 \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

16. למצוא את הערכים העצמיים (אפשר בצורה גרפית) ואת הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם – ליאוביל

$$\begin{cases} u'' + u + \lambda u = 0 \\ u(0) = 0, u(1) + 3u'(1) = 0 \end{cases}$$

17. למצוא את הערכים העצמיים (אפשר בצורה גרפית) ואת הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם – ליאוביל

$$\begin{cases} u'' + u + \lambda u = 0 \\ u(0) = 0, u(\pi/2) + u'(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

18. מצא את פונקציית גרין, ובטא דרכה את הפתרון לבעיית ערך השפה דרך אינטגרלים מסוימים של פונקציות אלמנטריות קונקרטיות (לא לחשב את האינטגרלים),

$$\begin{cases} u'' + u = e^{-\sqrt[3]{x}} \\ u(0) = 0, u(\pi/2) + u'(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

19. לא רלוונטי לאחר 2010

א. למצוא את הערך של $\alpha \in \mathbf{R}$ שעבורו יש פתרון בצורת טור לפי הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם – ליאוביל

$$\text{המתאימה לבעיית השפה} \quad \begin{cases} u'' + u = 1 + \alpha \sin x \\ u(0) = 0, u(\pi) = 0 \end{cases}, \text{ כך שהוא מקיים את המשוואה ב- } (\pi, 0).$$

ב. מה המספר של פתרונות? למצוא את כל הפתרונות.

20. לא רלוונטי לאחר 2010

א. למצוא את הערך של $\alpha \in \mathbf{R}$ שעבורו יש פתרון לבעיית השפה בצורת הטור לפי הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם – ליאוביל המתאימה. מה המספר של פתרונות?

$$\begin{cases} u'' + u = \sin x + \alpha \cos x \\ u'(0) = 0, u'(\pi) = 0 \end{cases}$$

ב. למצוא את כל הפתרונות.

21. לפתח את הפונקציה $f(x) = 1$ לטור פוריה לפי הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם – ליאוביל

$$\begin{cases} u'' + 4u + 4\lambda u = 0 \\ u(0) = 0, u'(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

22. למצוא את הנקודות הקריטיות של המערכת $\begin{cases} \dot{x} = y - x - x^2 \\ \dot{y} = 3x - y - x^2 \end{cases}$ ולבדוק את יציבותן.

23. למצוא את הנקודות הקריטיות של המערכת $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 3x^2 + 4y^2 \\ \dot{y} = x + 2y + 3x^2 - 4y^2 \end{cases}$ ולבדוק את יציבותן.

24. מצא את הפתרונות הקבועים של המשוואה $\ddot{x} + \sin(x\dot{x}) + x^2 - 1 = 0$ ובדוק את יציבותם.

25. לצייר את הדיוקנים הפזיים של המערכות, למיין את הנקודות הקריטיות.

, $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 7y \\ \dot{y} = 2x - 6y \end{cases}$, $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 3y \\ \dot{y} = -9x + 7y \end{cases}$, $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + 1 \\ \dot{y} = 9x - 2y \end{cases}$, $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x + y + 2 \end{cases}$

$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y - 2 \\ \dot{y} = -5x + y \end{cases}$, $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 2x - 2y + 2 \end{cases}$, $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y \\ \dot{y} = 4x - 5y \end{cases}$, $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 8y + 5 \\ \dot{y} = 2x - 5y + 3 \end{cases}$

26. למצוא תחום קומפקטי כזה שכל הקווים הפזיים נכנסים אליו כדי להישאר בו לתמיד

$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + 0.01 \cos(t^3 + xy) \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}$

27. למצוא תחום קומפקטי כזה שכל הקווים הפזיים המתחילים בו שואפים אסימפטוטית ל-0 בלי לצאת מהתחום,

$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y + |x|^{3/2} \sin(tx + 2019) \\ \dot{y} = 4x - 6y + y^2 \sin(tx) \end{cases}$

28. לבדוק את יציבות פתרונות המשוואות

; $\ddot{x} + \pi\dot{x} + x = 0$; $\ddot{x} + 2\dot{x} + \dot{x} + 3x = 1$; $x^{(4)} + \ddot{x} - 2\ddot{x} + \dot{x} + x = \sin t$
; $x(0) = 0$, $\dot{x} = -|x|$; $\dot{x} = -x^3 + x^2$, $x(0) = 0$; $\dot{x} = -x^3$, $x(0) = 0$
. $x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0$, $\ddot{x} + \dot{x} + \pi\dot{x} + 3x = x^2$

29. מה הוא הסדר המינימלי של משוואה $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$ עם מקדמים ממשיים קבועים כזאת שפונקציות $y = t^4$, $y = t^2 \cos t$ מקיימות אותה (לנמק) מה היא המשוואה?

30. מה הוא הסדר המינימלי k של משוואה דיפרנציאלית $y^{(k)} + a_1(t)y^{(k-1)} + \dots + a_{k-1}(t)\dot{y} + a_k(t)y = 0$ עם מקדמים ממשיים רציפים, כזאת שפונקציה $y = t^6$ מקיימת אותה לכל t (לנמק) מה היא המשוואה (דוגמא)?

31. ידוע שהפולינום האופייני $p(\lambda)$ של המשוואה הדיפרנציאלית $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = \sin t$ עם מקדמים ממשיים קבועים מתחלק ב $(\lambda^2 + 1)^2$. מה אפשר להגיד על יציבות הפתרונות? לנמק.

32. מה אפשר להגיד על יציבות אסימפטוטית ו/או ניטראלית (רגילה) של הפתרונות למשוואה הדיפרנציאלית עם מקדמים קבועים $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = t$ אם ידוע ש $a_n = -1$, אם ידוע ש $a_n = 0$, אם ידוע ש $a_n = a_{n-1} = 0$? לנמק.

33. ידוע שלמשוואה הדיפרנציאלית $y^{(4)} + a_1 \ddot{y} + a_2 \ddot{y} + a_3 \dot{y} + a_4 y = \sin t$ עם מקדמים ממשיים קבועים יש פתרון פרטי $y_p = t \cos(2t) + \alpha \cos t + \beta \sin t$. למצוא את המספרים a_1, a_2, a_3, a_4 .

34.

א. מצא את המקדמים $c_0, \dots, c_4$ של פיתוח טיילור $x = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + o(t^4)$ בסביבה של $t = 0$ לפתרון בעיית קושי

$$\ddot{x} - t\dot{x} + x \sin t = \ln(1+t), \quad x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1$$

ב. להעריך את השארית $R(t) = x(t) - c_0 - c_1 t - c_2 t^2$ דרך מציאת הקבועים $0 < M, \varepsilon > 0$ שעבורם בסביבה $|t| \leq \varepsilon$ מתקיימת ההערכה $|R(t)| \leq M |t|^3$.