

משך הבחינה: 3 שעות

חומר מותר לשימוש: שני דפים A4 אישיים הממלאים בכתב יד משני הצדדים.

יש לענות על 4 שאלות בלבד ולציין את מספרי השאלות במחברת.

כל שאלה שווה ל-25 נקודות.

1.

א. (12 נק') להעריך מלמטה מספר נקודות קיצון של פתרונות המשוואה $\ddot{x} + \frac{4t^2 + 3t}{t^2 + 7}x = 0$ בקטע [1003,1013].

ב. (13 נק') למצוא את הערכים העצמיים (אפשר בצורה גרפית) ואת הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם – ליאוביל

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u'(0) - u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

2.

א. (8 נק') מה הוא נפח התחום שאליו עוברת הקובייה $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$ כעבור 20 יחידות זמן כתוצאה מהתנועה מתוארת על-ידי מערכת המשוואות

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos^2 x - x \sin y + \sin z \\ \dot{y} = \sin xz - \cos y \\ \dot{z} = -\arctan(x + y) + z \sin 2x \end{cases}$$

ב. (17 נק') לצאר את הדיוקן הפזי של המשוואה $\ddot{x} = 3 - 2x^2 - x^4$, למיין את הנקודות הקריטיות. למצוא זוויות חיתוכי הקווים עם ציר x .

3.

א. למצוא את הערך של $\alpha \in \mathbf{R}$ שעבורו יש פתרון פורמלי בצורת טור לפי הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם –

$$\begin{cases} u'' + \frac{1}{4}u = \cos x + \alpha \cos(\frac{1}{2}x) \\ u'(0) = 0, u(\pi) = 0 \end{cases}$$

ב. מה המספר של פתרונות? למצוא את כל הפתרונות.

4.

א. (13 נק') מה הערכים של α שבשבילם הפתרון $x = 0$ של המשוואה הבאה יציב אסימפטוטית בקירוב הראשון? המשוואה היא $\ddot{x} + \sin(3\ddot{x} - \alpha\dot{x}) - \cos(\pi/2 + 2\alpha\dot{x} - \alpha x) + 5x \cos x = 0$.

ב. (12 נק') לצייר את הדיוקנים הפזיים של המערכות $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + 2 \\ \dot{y} = 2x - 2y + 2 \end{cases}$, למיין את

הנקודות הקריטיות.

5. למצוא תחום קומפקטי סביב הראשית, שכל הקווים הפזיים נכנסים אליו תוך זמן סופי כדי להישאר בו לתמיד,

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 5y + 0.01 \cos(x^2 - y^3 + t^2) \\ \dot{y} = -6x - 8y \end{cases}$$

בהצלחה!