דוגמאות לתרגול

$$e^{t} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots \qquad \sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots \qquad \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots$$

דוגמא

$$\ddot{x} + \cos t\, \dot{x} - x = t^2 \qquad x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0$$

$$x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + o(t^4)$$

$$\alpha_i = ? \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

להעריך את השארית R בגודל,

$$x = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \cancel{\alpha_4 t^4} + R(t), \quad R = O(t^4)$$

בגבול,

$$|t| \le \varepsilon \Rightarrow |R(t)| \le M|t|^4$$

$$M = ?, \quad \varepsilon = ?$$

$$x = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \dots \qquad \alpha_0 = 1$$

$$\dot{x} = \alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2 + 4\alpha_4 t^3 + \dots \qquad \alpha_1 = 0$$

$$\ddot{x} = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 t + 12\alpha_4 t^2 + \dots$$

$$2\alpha_2 + 6\alpha_3 t + 12\alpha_4 t^2 + \dots + \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \dots\right)\left(\alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2 + \dots\right)$$

$$-\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots\right) = t^2$$

$$\begin{array}{l|l}
t^0 & 2\alpha_2 + \alpha_1 - \alpha_0 = 0 \\
t^1 & 6\alpha_3 + 2\alpha_2 - \alpha_1 = 0 \\
t^2 & 12\alpha_4 - \frac{\alpha_1}{2} + 3\alpha_3 - \alpha_2 = 1
\end{array}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}(-\overset{0}{\alpha_1} + \overset{1}{\alpha_0}) = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{3}\alpha_2 + \frac{1}{6}\alpha_1 = -\frac{1}{6}$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{12}\left(1 + \frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3\right)$$

$$= \frac{1}{12}\left(1 + \frac{1}{2} + 3\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

$$X = 1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + o(t^5)$$

18)

המשך הערכת השארית

ידוע $x(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + R(t)$, $R(t) = O(t^4)$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall |t| \le \varepsilon \quad |R(t)| \le M t^4$, $M, \varepsilon - ?$

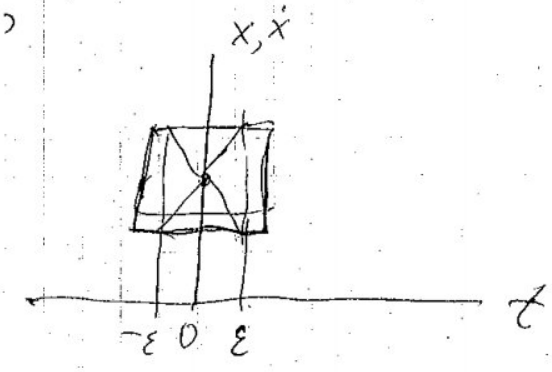
נוסחת שארית טיילור בצורת לגרנז' Lagrange

$$R(t) = \frac{x^{(4)}(\theta t)}{4!} t^4, \quad \theta \in (0,1)$$

$$M \ge \max_{[-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{x^{(4)}}{24},$$

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$$

$$\Omega = \left\{ (t, x, \dot{x}) \;\middle|\; \begin{array}{l} |t| \le 2 \\ |x| \le 2 \\ |\dot{x}| \le 1 \end{array} \right\}$$



אפשר להאריך את הפתרון עד שפת Ω

נעריך את הזמן שבו המסלול לא עוזב את Ω.

1. $$x(t) = \overset{1}{x(t_0)} + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(t)\,dt$$

$$|x(t)| \le |x(t_0)| + \left| \int_{t_0}^{t} \dot{x}(t)\,dt \right| \le 1 + |t - t_0| \max_{\Omega} |\dot{x}| = 1 + |t - t_0| = 1 + |t|$$

כדי ש $\underset{\text{מיד}}{|x| \le 2}$ $\Leftarrow$ $|t| \le 1$ מתאים את כל

2. $$\dot{x}(t) = \overset{0}{\dot{x}(t_0)} + \int_{t_0}^{t} \ddot{x}(t)\,dt, \quad \dot{x}(t) \le |\dot{x}(t_0)| + |t - t_0| \max_{\Omega} |\ddot{x}|$$

$$\max_{\Omega} |\ddot{x}| = \max_{\Omega} |-\cos t \cdot \dot{x} + x + t^2| \le 1 \cdot 1 + 2 + 4 \le 8$$

$$|\dot{x}| \le |t| \cdot 8 \Rightarrow |\dot{x}| \le 1$$

משמע נשארת ב-Ω

$1, 2 \Rightarrow |t| \le \frac{1}{8}$ גם $|t| \le \frac{1}{8}$ המסלול לא עוזב את Ω

$\varepsilon > \frac{1}{8}$ (כפיר

אפשר לפ״ק !

$$\Omega_1 = \begin{cases} |t| \le \varepsilon = \frac{1}{8} \\ |x| \le 2 \\ |\ddot{x}| \le 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

(לא חייבים)

או $|x| \le 1 + \frac{1}{8}$ "Ω_2"

לא נכנס את זה

$$|\dddot{x}| \le \max_{\Omega_1} |\dddot{x}| \le 1\cdot 1 + 2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 \le 4$$

$$\ddddot{x} = \sin t \cdot \dot{x} - \cos t \cdot \ddot{x} + \dot{x} + 2t$$

$$|\ddddot{x}| \le 1\cdot 1 + 1\cdot 4 + 1 + \frac{1}{4} \le 7$$

$$x^{IV} = \cos t\,\dot{x} + 2\sin t\,\ddot{x} - \cos t\,\dddot{x} + \ddot{x} + 2$$

$$|x^{IV}| \le 1\cdot 1 + 2\cdot 4 + 1\cdot 7 + 4 + 2 = 1 + 8 + 7 + 6 = 22$$

$$M = \frac{\max_{|t|\le\varepsilon} |x^{IV}|}{4!} = \frac{22}{24} \le 1, \quad M = 1$$ (הגבלנו;

$$\ddot{x} = 1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + R(t), \quad |t| \le \frac{1}{8} \Rightarrow |R(t)| \le t^4$$