



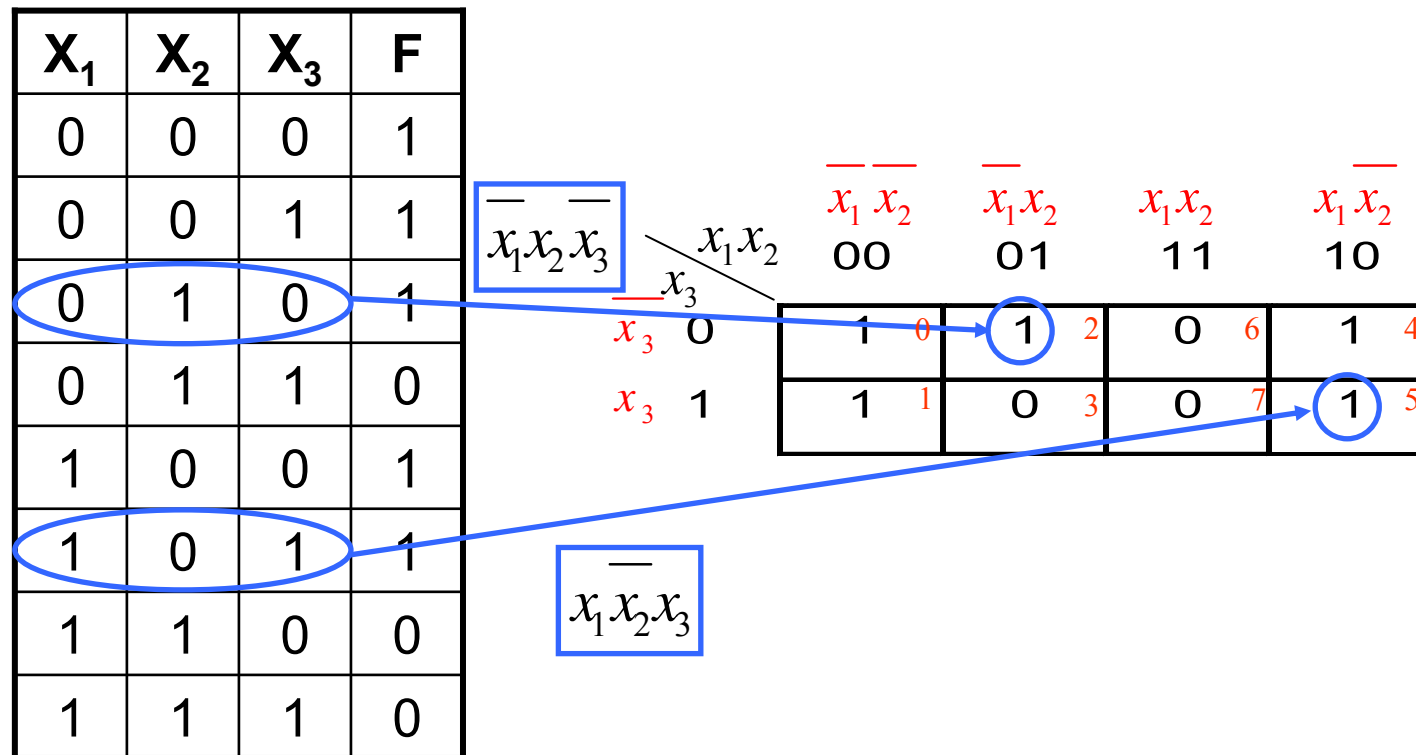
תרגול מספר 3

מפות קרנו Karnough

- המפה משמשת לתיאור טבלת האמת
- מבנה המפה מאפשר פישוט של פונקציות בולאניות באופן ויזואלי/גיאומטרי

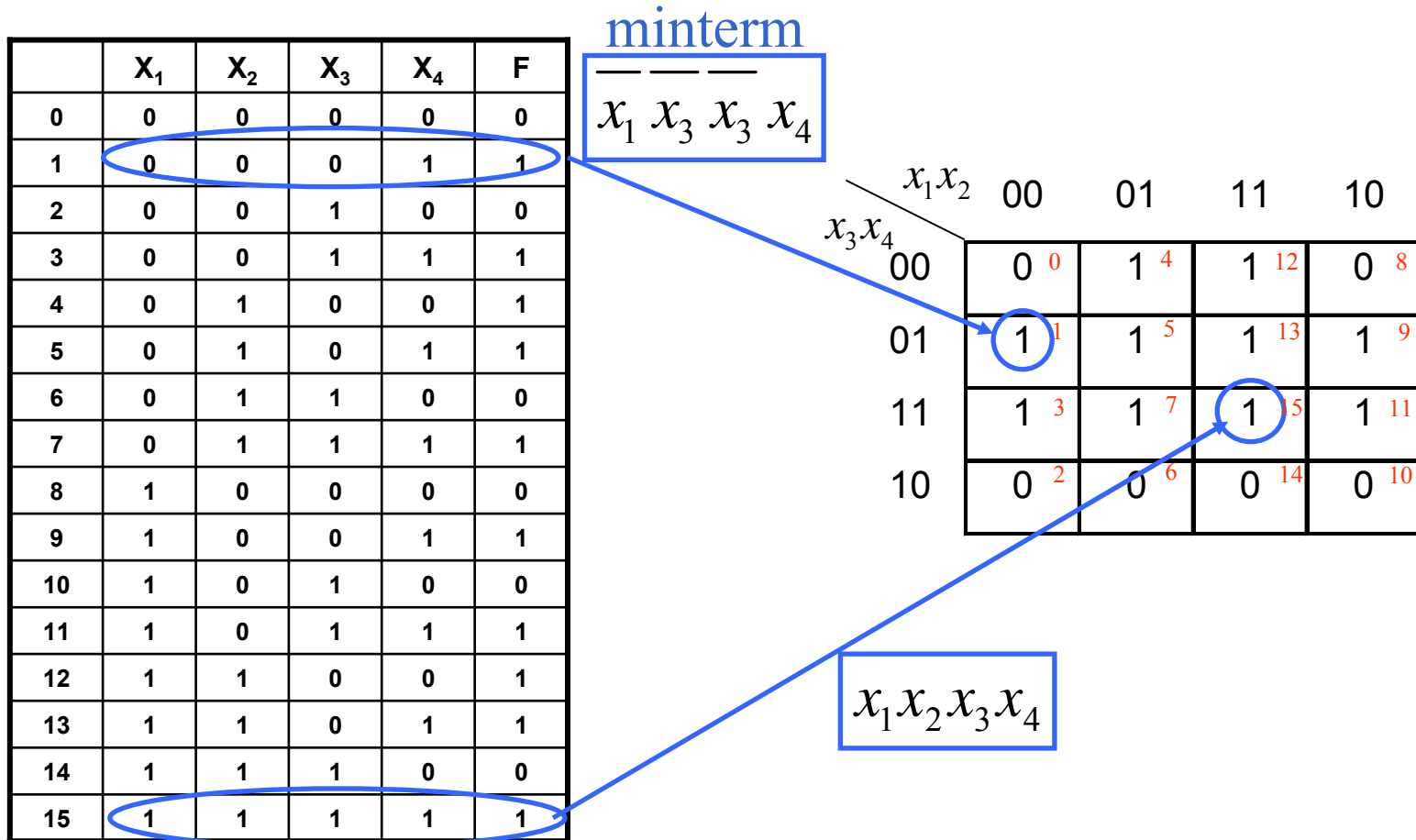
בניית מפת קרנו Karnough ב-3 משתנים

■ מבנה המפה עבור פונקציה ב-3 משתנים $f(x_1, x_2, x_3)$



בניית מפת קרנו Karnough ב-4 משתנים

■ מבנה המפה עבור פונקציה ב-4 משתנים $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$



פישוט בעזרת מפת קרנו

- מבנה המפה מאפשר את פישוט הפונקציה ע"י איתור מקבצי אחדות בגדלים 2,4,8.
- במבנה המפה כל שני תאים שכנים במאונך או במאוזן אך לא באלכסון נבדלים במשתנה/סיבית אחת בלבד.
- הפישוט מסתמך על כללי האלגברה הבאים:
$$\overline{x\overline{y}} + xy = x(\overline{\overline{y}} + y) = x \cdot 1 = x$$
- כל מקבץ מניב מחובר בפונקציה המפושטת.
- הפונקציה המפושטת תתקבל מכסוי כל האחדות בעזרת מספר המקבצים הקטן ביותר.
- ערכו המפושט של מקבץ הוא מכפלת המשתנים אשר לא עוברים שינוי:
- אם ערך המשתנה X הוא אפס ניקח \overline{X} אחרת ניקח X

פישוט בעזרת מפות קרנו

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} + \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 + \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 + \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 + x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} + x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 + x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} + x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 + x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} + x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 + x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} + x_1 x_2 x_3 x_4$$

$x_1 x_2$	00	01	11	10
$x_3 x_4$ 00	0	1	1	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

$$f = x_4 + \overline{x_2} \overline{x_3}$$

$$\begin{aligned} & \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} + \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 + \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 = \\ & \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} (\overline{x_1} + x_1) + \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 (\overline{x_1} + x_1) = \\ & \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} + \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 = \overline{x_2} \overline{x_3} (\overline{x_4} + x_4) = \overline{x_2} \overline{x_3} \end{aligned}$$

צעדים למציאת מקבצים

- הקף את התאים אשר מכילים אחדות מבודדות (ללא שכנים).
- זהה תאים המכילים אחד אשר ניתן לשלבם במקבץ בגודל 2 עם תא שכן באופן יחיד. הקף זוגות אלו. התעלם מתאים אשר ניתן לשלבם בזוג ביותר מאופן אחד.
- זהה את התאים אשר ניתן לשלבם ברביעייה עם שלושה תאים אחרים באופן יחיד. אם הם אינם מופיעים בזוג שסומן כבר, הקף את הרביעייה. התעלם מתאים אשר ניתן לשלבם ברביעייה ביותר מאופן אחד.
- חזור על התהליך עבור שמיניות.
- אם נותרו אחדות אשר לא כוסו. כסה אותם באופן כלשהוא זה עם זה או עם מקבצים שנמצאו בשלבים הקודמים תוך שימוש במספר מינימלי של מקבצים.

דוגמא

x_1x_2	00	01	11	10
x_3x_4 00	1	0	1	0
01	1	1	1	1
11	1	0	1	1
10	0	1	0	0

דוגמא

x_1x_2	00	01	11	10
x_3x_4 00	1	0	1	0
01	1	1	1	1
11	1	0	1	1
10	0	1	0	0

דוגמא

x_1x_2	00	01	11	10
x_3x_4 00	1	0	1	0
01	1	1	1	1
11	1	0	1	1
10	0	1	0	0

דוגמא

x_1x_2	00	01	11	10
x_3x_4 00	1	0	1	0
01	1	1	1	1
11	1	0	1	1
10	0	1	0	0

דוגמא

x_1x_2	00	01	11	10
x_3x_4 00	1	0	1	0
01	1	1	1	1
11	1	0	1	1
10	0	1	0	0

The table above is a 4x4 Karnaugh map for a 4-variable function. The columns are labeled x_1x_2 and the rows are labeled x_3x_4 . The values in the cells are: (00,00)=1, (01,00)=0, (11,00)=1, (10,00)=0; (00,01)=1, (01,01)=1, (11,01)=1, (10,01)=1; (00,11)=1, (01,11)=0, (11,11)=1, (10,11)=1; (00,10)=0, (01,10)=1, (11,10)=0, (10,10)=0. There are four groups of 1s circled: a blue circle around (00,00) and (11,00); a red circle around (01,10); a green circle around (11,01), (11,11), and (10,11); and a purple circle around (00,01), (01,01), (11,01), and (10,01).

דוגמא

x_1x_2	00	01	11	10
x_3x_4 00	1	0	1	0
01	1	1	1	1
11	1	0	1	1
10	0	1	0	0

The table shows a 4x4 grid of cells. The columns are labeled x_1x_2 (00, 01, 11, 10) and the rows are labeled x_3x_4 (00, 01, 11, 10). The cells contain binary values (0 or 1). Several cells containing '1' are circled: (00,00), (11,00), (01,01), (11,01), (10,01), (11,11), and (01,10). There are also several overlapping colored lines (blue, green, purple, black) connecting various cells, likely representing groupings for a logic simplification process.

מינימליות

■ זהירות – מקבצים מיותרים !

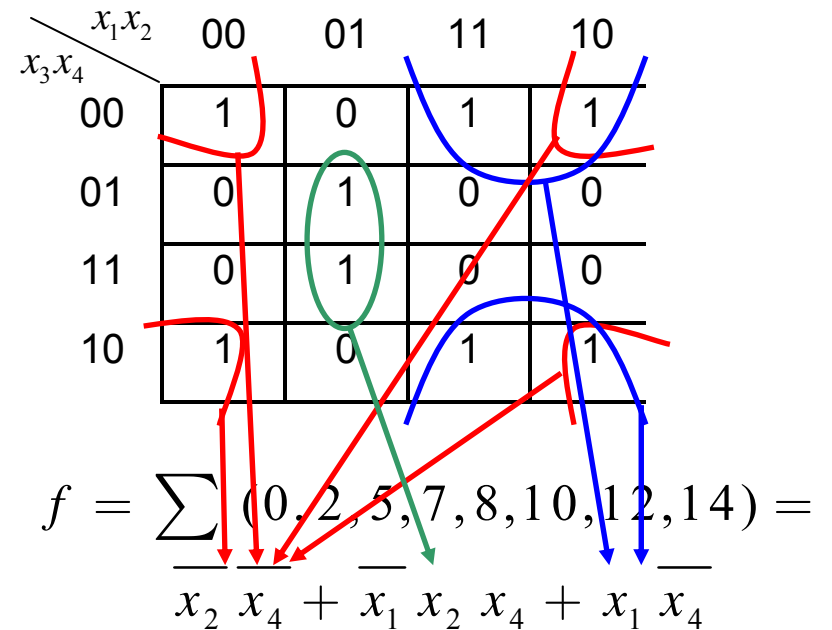
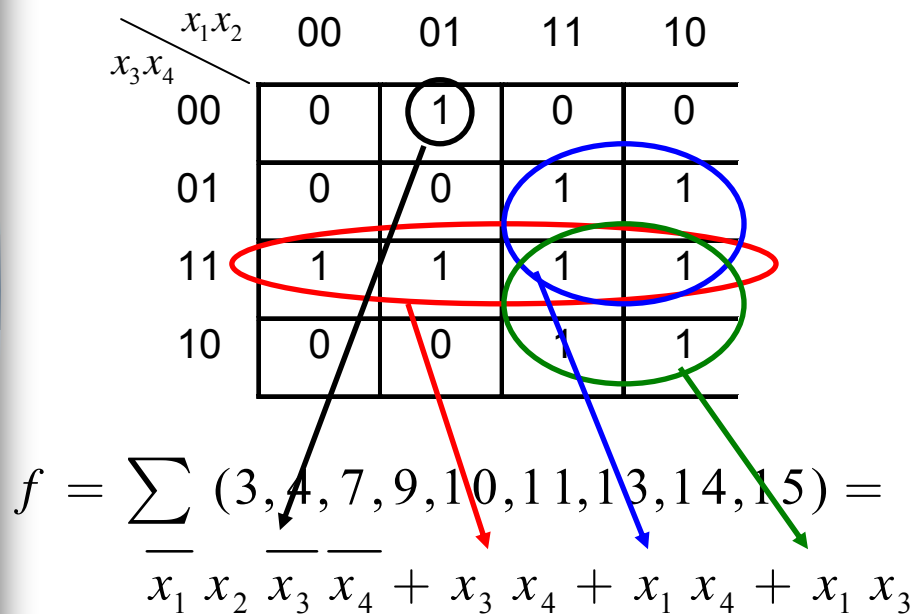
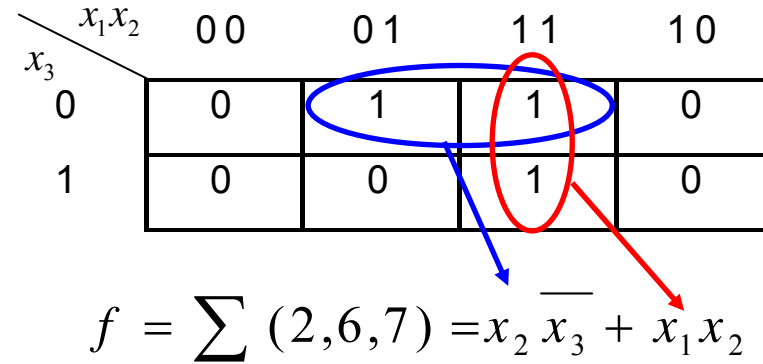
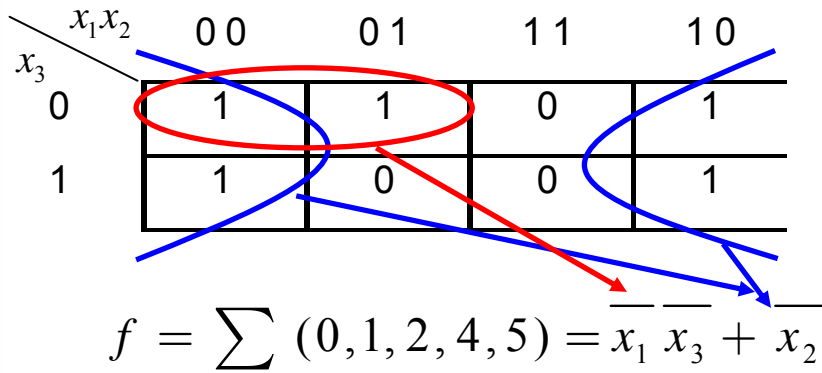
$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

מיותר

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	0	0	1
11	1	1	0	0
10	1	0	0	1

מיותר

דוגמאות לפישוט





Don't care conditions

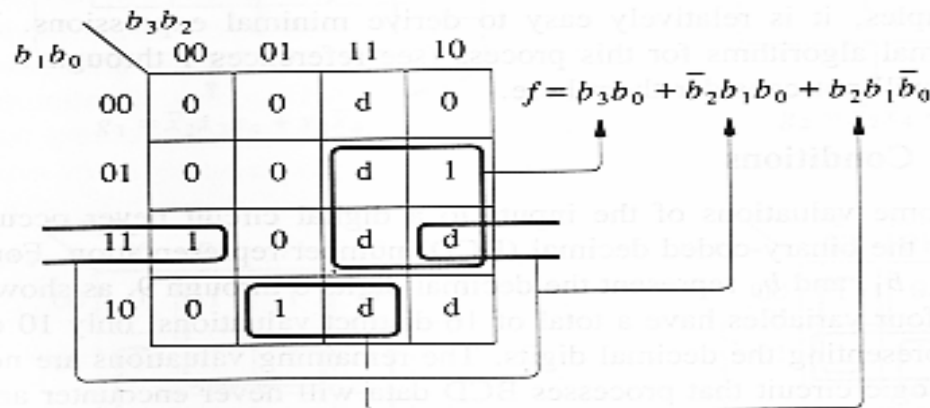
- לעיתים ישנן כניסות בטבלת אמת אשר לא עושים בהן שימוש.
- כניסות אלה מסומנות ב-*don't care* וניתן להתייחס אליהן כ-0 או כ-1 (ג'וקר). מסומן ב- ϕ או ב-*d*
- הערך שבוחרים בו הוא הערך שאיתו מגיעים לצורה מינימלית.

Don't care conditions

Decimal digit represented	Binary coding				f
	b_3	b_2	b_1	b_0	
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
unused	1	0	1	0	d
	1	0	1	1	d
	1	1	0	0	d
	1	1	0	1	d
	1	1	1	0	d
	1	1	1	1	d
	1	1	1	1	d

$$f = \sum (3, 6, 9) + d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

Figures taken from the book:
Switching and finite automata theory
 by Kohavi, Zvi, McGraw-Hill, 1978
 All rights reserved



תרגיל

■ נתונות הפונקציות: $f(a,b,c,d) = \sum (5,6,13) + d(0,1)$

$f_1(a,b,c,d) = \sum (0,1,5,6,8,9,13)$

■ מצא $\overline{f_2}$ בייצוג קנוני מסוג POS המקיימת: $f = f_1 \cdot \overline{f_2}$

■ פתרון

$\begin{array}{c cccc} & ab \\ cd & \end{array}$	00	01	11	10	
00	ϕ				
01	ϕ	1	1		
11					
10		1			

f

=

$\begin{array}{c cccc} & ab \\ cd & \end{array}$	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1	1	1
11				
10		1		

f_1

•

$\begin{array}{c cccc} & ab \\ cd & \end{array}$	00	01	11	10
00	ϕ	ϕ	ϕ	0
01	ϕ	1	1	0
11	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
10	ϕ	1	ϕ	ϕ

$\overline{f_2}$

ונקבל ש: $\overline{f_2} = \prod (8,9) \cdot \phi(0,1,2,3,4,7,10,11,12,14,15)$