תרגול מספר 3

מפות קרנו Karnough

- המפה משמשת לתיאור טבלת האמת
- מבנה המפה מאפשר פישוט של פונקציות בולאניות באופן ויזואלי/גיאומטרי

בניית מפת קרנו Karnough ב-3 משתנים

- מבנה המפה עבור פונקציה ב-3 משתנים $f(x_1, x_2, x_3)$

X_1	X_2	X_3	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$\boxed{\overline{x_1}x_2\overline{x_3}}$

x_3 \ x_1x_2	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$ 00	$\overline{x_1}x_2$ 01	x_1x_2 11	$x_1\overline{x_2}$ 10
$\overline{x_3}$ 0	1 (0)	1 (2)	0 (6)	1 (4)
x_3 1	1 (1)	0 (3)	0 (7)	1 (5)

$\boxed{x_1\overline{x_2}x_3}$

בניית מפת קרנו Karnough ב-4 משתנים

- מבנה המפה עבור פונקציה ב-4 משתנים $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$

	X_1	X_2	X_3	X_4	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

minterm

$\boxed{\overline{x_1}\,\overline{x_3}\,\overline{x_3}\,x_4}$

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0 [0]	1 [4]	1 [12]	0 [8]
01	1 [1]	1 [5]	1 [13]	1 [9]
11	1 [3]	1 [7]	1 [15]	1 [11]
10	0 [2]	0 [6]	0 [14]	0 [10]

$\boxed{x_1x_2x_3x_4}$

פישוט בעזרת מפת קרנו

- מבנה המפה מאפשר את פישוט הפונקציה ע"י איתור מקבצי אחדות בגדלים 2,4,8.
- במבנה המפה כל שני תאים שכנים במאונך או במאוזן אך **לא** באלכסון נבדלים במשתנה/סיבית אחת בלבד.
- הפישוט מסתמך על כללי האלגברה הבאים:

$$x\overline{y}+xy=x(\overline{y}+y)=x\cdot 1=x$$

- כל מקבץ מניב מחובר בפונקציה המפושטת.
- הפונקציה המפושטת תתקבל מכסוי **כל** האחדות בעזרת מספר המקבצים **הקטן** ביותר.
- ערכו המפושט של מקבץ הוא מכפלת המשתנים אשר לא עוברים שינוי:
- אם ערך המשתנה X הוא אפס ניקח $\overline{\mathrm{X}}$ אחרת ניקח X

פישוט בעזרת מפות קרנו

$$f = \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} +$$
$$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 + \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4 +$$
$$x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4 + x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 +$$
$$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4 + \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4 +$$
$$x_1\,x_2\,x_3\,x_4 + x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4$$

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

$$f = x_4 + x_2\,\overline{x_3}$$

$$\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4 + x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4 =$$
$$x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\left(\overline{x_1} + x_1\right) + x_2\,\overline{x_3}\,x_4\left(\overline{x_1} + x_1\right) =$$
$$x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_2\,\overline{x_3}\,x_4 = x_2\,\overline{x_3}\left(\overline{x_4} + x_4\right) = x_2\,\overline{x_3}$$

צעדים למציאת מקבצים

- הקף את התאים אשר מכילים אחדות מבודדות (ללא שכנים).
- זהה תאים המכילים אחד אשר ניתן לשלבם במקבץ בגודל 2 עם תא שכן באופן **יחיד**. הקף זוגות אלו. התעלם מתאים אשר ניתן לשלבם בזוג ביותר מאופן אחד.
- זהה את התאים אשר ניתן לשלבם ברביעייה עם שלושה תאים אחרים באופן **יחיד**. אם הם אינם מופיעים בזוג שסומן כבר, הקף את הרביעייה. התעלם מתאים אשר ניתן לשלבם ברביעייה ביותר מאופן אחד.
- חזור על התהליך עבור שמיניות.
- אם נותרו אחדות אשר לא כוסו. כסה אותם באופן כלשהוא זה עם זה או עם מקבצים שנמצאו בשלבים הקודמים תוך שימוש במספר **מינימלי** של מקבצים.

דוגמא

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	1	1	1	1
11	1	0	1	1
10	0	1	0	0

דוגמא

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	1	1	1	1
11	1	0	1	1
10	0	1	0	0

דוגמא

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	1	1	1	1
11	1	0	1	1
10	0	1	0	0

דוגמא

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	1	1	1	1
11	1	0	1	1
10	0	1	0	0

דוגמא

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	1	1	1	1
11	1	0	1	1
10	0	1	0	0

דוגמא

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	1	1	1	1
11	1	0	1	1
10	0	1	0	0

מינימליות

- **<u>זהירות</u>** –מקבצים מיותרים !

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	0	0	1
11	1	1	0	0
10	1	0	0	1

מיותר

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

מיותר

דוגמאות לפישוט

$x_3 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	0	0	1

$$f = \sum (0,1,2,4,5) = \overline{x_1}\,\overline{x_3} + \overline{x_2}$$

$x_3 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	0	1	0

$$f = \sum (2,6,7) = x_2\,\overline{x_3} + x_1 x_2$$

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	0	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	1	1

$$f = \sum (3,4,7,9,10,11,13,14,15) = \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_3 x_4 + x_1 x_4 + x_1 x_3$$

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	0	0
11	0	1	0	0
10	1	0	1	1

$$f = \sum (0,2,5,7,8,10,12,14) = \overline{x_2}\,\overline{x_4} + \overline{x_1}\,x_2\,x_4 + x_1\,\overline{x_4}$$

Don’t care conditions

- לעיתים ישנן כניסות בטבלת אמת אשר לא עושים בהן שימוש.
- כניסות אלה מסומנות ב-don’t care וניתן להתיחס אליהן כ-0 או כ-1 (ג’וקר). מסומן ב-ϕ או ב-***d***
- הערך שבוחרים בו הוא הערך שאיתו מגיעים לצורה מינימלית.

Don’t care conditions

Decimal digit represented	b_3	b_2	b_1	b_0	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
unused	1	0	1	0	d
	1	0	1	1	d
	1	1	0	0	d
	1	1	0	1	d
	1	1	1	0	d
	1	1	1	1	d

Binary coding: $b_3\ b_2\ b_1\ b_0$

$$f=\sum(3,6,9)+d(10,11,12,13,14,15)$$

b_1b_0 \ b_3b_2	00	01	11	10
00	0	0	d	0
01	0	0	d	1
11	1	0	d	d
10	0	1	d	d

$$f=b_3b_0+\bar{b}_2b_1b_0+b_2b_1\bar{b}_0$$

Figures taken from the book:
Switching and finite automata theory
by Kohavi, Zvi, McGraw-Hill, 1978

תרגיל

- נתונות הפונקציות:

$$f(a,b,c,d)=\sum(5,6,13)+d(0,1)$$

$$f_1(a,b,c,d)=\sum(0,1,5,6,8,9,13)$$

- מצא $\overline{f_2}$ בייצוג קנוני מסוג POS המקיימת: $f = f_1 \cdot \overline{f_2}$
- <u>**פתרון**</u>

f:

cd \ ab	00	01	11	10
00	ϕ			
01	ϕ	1	1	
11				
10		1		

$=$

f_1:

cd \ ab	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1	1	1
11				
10		1		

$\cdot$

$\overline{f_2}$:

cd \ ab	00	01	11	10
00	ϕ	ϕ	ϕ	0
01	ϕ	1	1	0
11	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
10	ϕ	1	ϕ	ϕ

ונקבל ש: $\overline{f_2}=\prod(8,9)\cdot\phi(0,1,2,3,4,7,10,11,12,14,15)$