תרגול מספר 2

משתנים ופונקציות לוגיים

- **משתנים לוגיים/בולאניים**
  - מסומנים כמשתנים 'רגילים' - x,y,z
  - יכולים לקבל אחד משני ערכים - True/False
  - מקצרים ומשתמשים ב - 1/0.
  - למה ? אין/יש זרם כאשר משתנה מתאר חוט חשמלי.
- **פונקציות לוגיות**
  - מסומנות: (משתנה לוגי,משתנה, ...)*f*, לדוגמא: *f*(x,y,z)
  - התנהגות פונקציה מתוארת על ידי ***טבלת אמת***.
  - הטבלה מפרטת מתי הפונקציה מקבלת 0 או 1 על פי ערכי הארגומנטים שלה.

טבלאות אמת

- דוגמאות:

X	Y	F(X,Y)
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

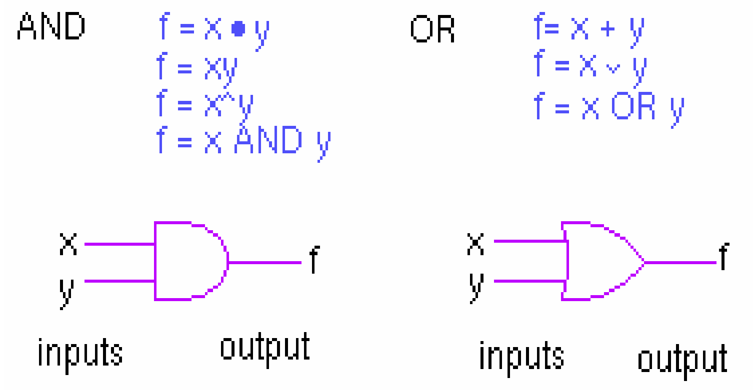
X	Y	Z	F(X,Y,Z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

שערים לוגיים

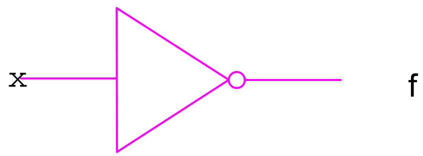
- אבני הבניין לתיאור פורמלי של פונקציות בוליאניות.

X	Y	F=XY	F=X+Y
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

X	F=X'
0	1
1	0



NOT f=x'



הצגה קנונית של פונקציות בוליאניות

- Sum of products
מתארים את הפונקציה על פי המקרים שבהם היא 1.

X	Y	Z	F	#
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	2
0	1	1	1	3
1	0	0	1	4
1	0	1	0	5
1	1	0	1	6
1	1	1	0	7

- מסמנים:

$$F = SUM(2,3,4,6) = \sum(2,3,4,6) =$$
$$X'YZ' + X'YZ + XY'Z' + XYZ' =$$
$$\overline{X}Y\overline{Z} + \overline{X}YZ + X\overline{Y}\overline{Z} + XY\overline{Z}$$

הצגה פורמלית של פונקציות בוליאניות

- Product of sums

מתארים את הפונקציה על פי המקרים שבהם היא 0.

X	Y	Z	F	#
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	2
0	1	1	1	3
1	0	0	1	4
1	0	1	0	5
1	1	0	1	6
1	1	1	0	7

$$F = PROD(0,1,5,7) = \prod (0,1,5,7) =$$
$$(X+Y+Z)\cdot(X+Y+Z')\cdot$$
$$(X'+Y+Z')\cdot(X'+Y'+Z') =$$
$$(X+Y+Z)\cdot(X+Y+\overline{Z})\cdot$$
$$(\overline{X}+Y+\overline{Z})\cdot(\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z})$$

משפטי אלגברה בוליאנית

$$\overline{\overline{X}}=X$$

$$X+0=X \qquad X\times 1=X$$

$$X+1=1 \qquad X\times 0=0$$

$$X+X=X \qquad X\times X=X$$

$$X+\overline{X}=1 \qquad X\times \overline{X}=0$$

$$X+XY=X \qquad X(X+Y)=X$$

$$XY+X\overline{Y}=X \qquad (X+Y)(X+\overline{Y})=X$$

$$X+\overline{X}Y=X+Y \qquad X(\overline{X}+Y)=XY$$

$$X+YZ=(X+Y)(X+Z)$$

$$X(Y+Z)=XY+XZ$$

$$XY+\overline{X}Z=(X+Z)(\overline{X}+Y)$$

$$XY+\overline{X}Z+YZ=XY+\overline{X}Z$$

$$(X+Y)(\overline{X}+Z)(Y+Z)=(X+Y)(\overline{X}+Z)$$

פישוט פונקציות

- **<u>המטרה</u>**: להגיע למספר מינימלי של ליטרלים תוך שימוש במשפטי האלגברה הבוליאנית וכללי דה-מורגן. ליטרל הוא משתנה או המשלים שלו (x ו- x’ הם ליטרלים שונים).
- כללי דה-מורגן:

$$\overline{X \times Y} = \overline{X} + \overline{Y}$$

$$\overline{X + Y} = \overline{X} \times \overline{Y}$$

פישוט פונקציות

מצא ופשט את המשלים של הביטוי
:$(xy'+wz')(wx'+yz')$

$[(xy'+wz')(wx'+yz')]' = (xy'+wz')'+(wx'+yz')' =$

$(xy')'(wz')' + (wx')'(yz')' =$

$(x'+y)(w'+z) + (w'+x)(y'+z) =$

$x'w'+x'z+yw'+yz+w'y'+w'z+xy'+xz =$

$z+w'+x'w'+yz+w'z+xy'=$

$z+w'+x'w'+yz+w'z+xy'=$

$z+w'+w'z+xy' = z+w'+w'z+xy'=$

$\mathbf{z+w'+xy'}$

הוכחת זהויות

- הוכח ש:

$$x'y'z'+x'y'z+x'yz'+xy'z'+xy'z = y'+x'z'$$

הוכחה:

x+x=x

$$el = x'y'z'+x'y'z+x'yz'+xy'z'+xy'z =$$

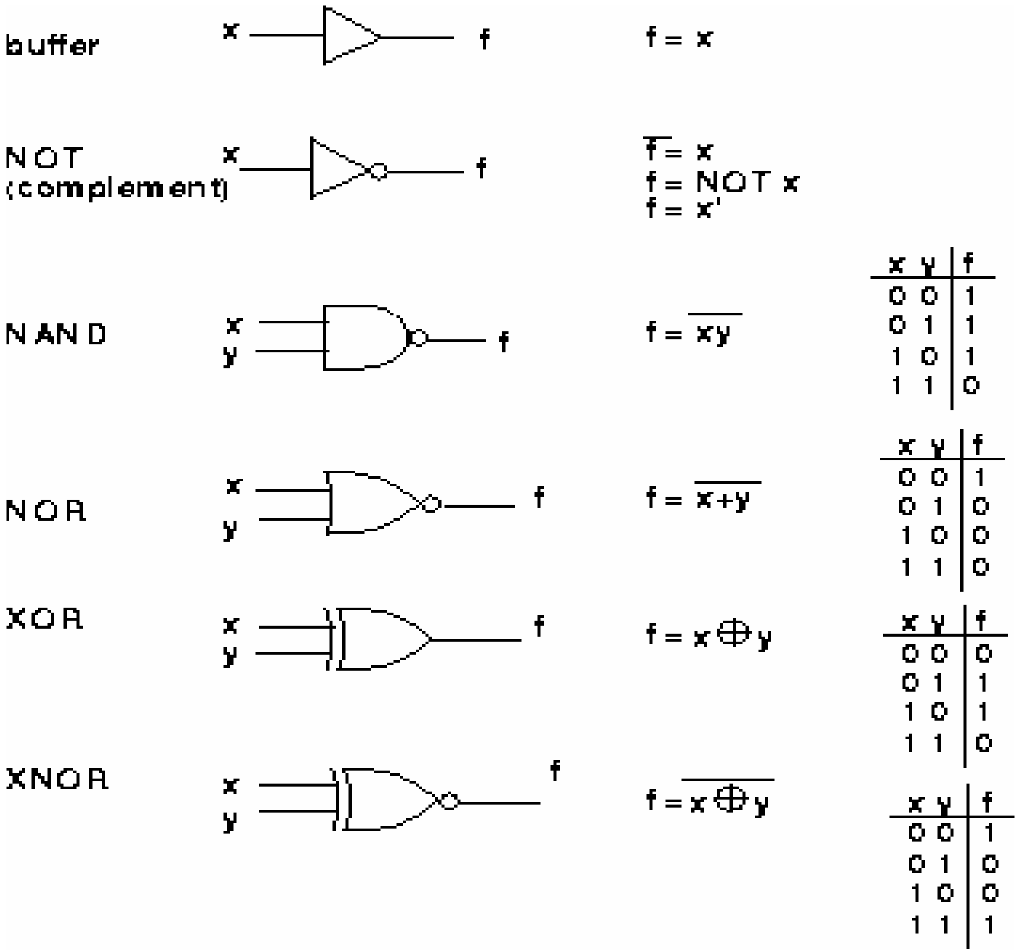
$$x'y'z'+x'y'z+x'yz'+xy'z'+ x'y'z' + xy'z =$$

$$x'y'(z'+z)+xy'(z'+z)+x'z'(y'+y) =$$

$$x'y'+xy'+x'z' = y'(x'+x)+x'z' =$$

$$\mathbf{y'+x'z'}$$ ■

NAND, NOR, XOR שערי



מערכות אוניברסליות

- בעזרת הפונקציות AND, OR, NOT ניתן לייצג כל פונקציה בינרית.
- *מערכת אוניברסלית* הינה אוסף פונקציות שמהווה בסיס חלופי לייצוג פונקציות בינריות.
- כיצד מוכיחים שאוסף מהווה בסיס ?
  שתי אפשרויות:
  א. להביע את AND, OR, NOT בעזרת קומבינציה מהאוסף הנבחן. **או**
  ב. להביע בסיס ידוע אחר בעזרת קומבינציה מהאוסף הנבחן לדוגמא NAND. גם NOR מהווה בסיס (יילמדו בהרצאה).

מערכות אוניברסליות

- <u>דוגמא:</u>

הוכח ש NAND מהווה מערכת אוניברסלית

<u>פתרון:</u>

נביע בעזרת NAND את OR,AND ו NOT :

$$NAND: f\left(x,y\right)=\overline{xy}$$

$$NOT: \overline{x}=\overline{xx}=f\left(x,x\right)$$

$$OR: x+y=\overline{\overline{x}}+\overline{\overline{y}}=\overline{\overline{x}\;\overline{y}}=f\left(\overline{x},\overline{y}\right)=f\left(f\left(x,x\right),f\left(y,y\right)\right)$$

$$AND: xy=\overline{\overline{xy}}=\overline{\overline{xy}\;\overline{xy}}=f\left(f\left(x,y\right),f\left(x,y\right)\right)$$

מערכות אוניברסליות

- דוגמא: הוכח ש $\{f,0\}$ מהווה מערכת אוניברסלית באשר

$f(x,y)=x'+y$

פתרון:

נביע את NAND בעזרת $\{f,0\}$:

$$f(x,f(y,0)) = x' + f(y,0) = x' + y' + 0 = (xy)'$$

האינטואיציה: נשים לב לכך ש- $x'+y$ דומה בצורתו ל- $x'+y'$ שזה לפי כללי דה-מורגן NAND לכן צריך ליצר את NOT. ואת זאת ניתן לקבל מ: $f(y,0)$

מערכות אוניברסליות

- דוגמא: הוכח ש $\{f,1\}$ מהווה מערכת אוניברסלית באשר

$$f(x,y,z)=x'y'+x'z'+y'z'$$

פתרון:

נביע את NOR בעזרת $\{f,1\}$:

$$f(x,y,1) = x'y'+x'1'+y'1' = (x+y)'+x'0+y'0 = (x+y)'$$

האינטואיציה: $x'y'$ לפי כללי דה-מורגן זה NOR לכן צריך לאפס את שני המחוברים האחרונים ב-f.

מערכות אוניברסליות

- נתונות הפונקציות:

$f1(x,y,z)=sum(0,2,4,6,7);\ f2(x,y)=xy';\ f3(x,y)=x+y'$

<u>א</u>. הראה ש: (f2,f3) אוניברסלית

<u>ב</u>. בטא את f1 בעזרת {f2,f3}

פתרון:

א. נבטא את {NOT,AND} בעזרת {f2,f3}

$NOT : f3(f2(x,x),x) = f2(x,x)+x' = xx'+x' = 0+x' = x'$

$AND : f2(x,f3(f2(y,y),y)) = f2(x,f3(yy',y)) =$
$f2(x,yy'+y') = f2(x, 0+y') = xy''=xy$

מערכות אוניברסליות

- ב.

$$f1(x,y,z) = sum(0,2,4,6,7) =$$ צמצום

$$x'y'z'+x'yz'+xy'z'+xyz'+xyz =$$

$$x'z'+xy+xy'z' = x'z'+x(y+y'z') =$$

$$x'z'+x(y+z') =$$

$$x'z' + xy + xz' = xy+z' =$$

$$f3(\ f2(x,f3(f2(y,y),y))\ ,\ z)$$