# מַכְפְּלוֹת פְּרוֹ־סוֹפִיּוֹת*

מאת

משה ירדן, אוניברסיטת תל אביב

C:\Jarden\Notes\Melnikov\Freeprod

כד באיר, תשס"ה

* עבוד של המאמר Subgroups and homology of free products of profinite groups מאת O. V. Melnikov

**מכפלה חפשית פנימית**

נקבע עבור כל העבודה **תְצורה כמעט מלאה** $\mathcal{C}$ של חבורות סופיות. במלים אחרות $\mathcal{C}$ הוא משפחה של חבורות סופיות הסגורה תחת לקיחת מנות, מכפלות מסֻיָּבות ולקיחת חבורות חלקיות. לחלופין, $\mathcal{C}$ היא משפחה של חבורות סופיות הסגורה תחת לקיחת מנות, מכפלות ישרות ותת חבורות. אם $F$ היא חבורה מֻפשטת ו $N_1, N_2$ הן תת חבורות נורמליות של $F$ המקיְמות $F/N_1, F/N_2 \in \mathcal{C}$, אזי גם $F/(N_1 \cap N_2) \in \mathcal{C}$. גבול הפוך של חבורות־$\mathcal{C}$ נקרא **חבורת פרו־$\mathcal{C}$**. כמו משפחת חבורות־$\mathcal{C}$ גם משפחת חבורות פרו־$\mathcal{C}$ סגורה תחת לקיחת מנות, מכפלות ישרות ותת חבורות סגורות.

המשפחה $\mathcal{C}$ תקֻנה **מלאה** אם היא סגורה תחת לקיחת מנות, חבורות חלקיות והרחבות. גם במקרה זה משפחות חבורות פרו־$\mathcal{C}$ סגורה תחת לקיחת מנות, חבורות חלקיות והרחבות. רֹב התוצאות בעבודה תהיינה נכונות במקרה ש $\mathcal{C}$ כמעט מלאה, באחדות נאֱלץ להניח ש $\mathcal{C}$ מלאה.

*הגדרה: מכפלה חפשית פנימית.* יהי $T$ מרחב פרו־סופי, תהי $G$ חבורה פרו־$\mathcal{C}$ ולכל $t \in T$ תהי $G_t$ **תת חבורה סגורה** של $G$. נאמר ש $G$ **הנו מכפלה פרו־$\mathcal{C}$ חפשית של תת החבורות** $G_t$, $t \in T$, ונסמן $G = \coprod^{\mathcal{C}}_{t\in T} G_t$ אם מתקיְמים התנאים הבאים:

(1א) ההעתקה $t \to G_t$ של $T$ לתוך $\mathrm{Subgr}(G)$ רציפה בִפְרישות. במִלים אחרות, לכל תת חבורה פתוחה $H$ של $G$ תת הקבוצה $\{t \in T \mid G_t \le H\}$ של $T$ פתוחה.

(1ב) $G_s \cap G_t = 1$ לכל $s, t \in T$, $s \neq t$.

(1ג) כל העתקה רציפה $\gamma_0$ של תת המרחב $\bigcup_{t\in T} G_t$ של $G$ לתוך חבורה פרו־$\mathcal{C}$ $C$ שצמצומה לכל אחת מהחבורות $G_t$ הנו הומומורפיזם נִתנת להרחבה באפן יחיד להומומורפיזם $\gamma\colon G \to C$.

אם $\mathcal{C}$ הנו תצורת כל החבורות הסופיות, נאמר תחת התנאים של "מכפלה חפשית פנימית" ש $G$ היא **מכפלה חפשית** של תת החבורות $G_t$, $t \in T$.

במקרה ש $T$ הנו מרחב סופי בדיד, מתלכדת הגדרת המכפלה החפשית עם ההגדרה הרגילה:

**למה סופי:** *תהי $T$ קבוצה סופית, תהי $G$ חבורה פרו־$\mathcal{C}$. נניח ש $G$ היא מכפלה פרו־$\mathcal{C}$ חפשית של החבורות $G_t$, $t \in T$. אזי לכל חבורה פרו־$\mathcal{C}$ $C$ ולכל אסף $\gamma_t\colon G_t \to C$, $t \in T$, של הומומורפיזמים קיָם הומומורפיזם יחיד $\gamma\colon G \to C$ המרחיב כל אחד מההומומורפיזמים $\gamma_t$.*

*הוכחה:* מתנאי (1ב) נובע שאפשר להרחיב את אסף ההעתקות $\gamma_t$ להעתקה רציפה $\gamma_0\colon \bigcup_{t\in T} G_t \to C$ (כאן משתמשים בסופיות של $T$). תנאי (1ג) אומר שקיֶמת ל $\gamma_0$ הרחבה יחידה להומומורפיזם $\gamma\colon G \to C$, כנדרש. ∎

**למה גיל־מור:** *בסימונים וההנחות של הגדרה "מכפלה חפשית פנימית" הקבוצה $E = \bigcup_{t\in T} G_t$ סגורה ב $G$.*

*הוכחה:* נוכיח שהקבוצה $G \smallsetminus E$ פתוחה ב $G$. נתבונן אפוא באבר $x \in G \smallsetminus E$. לכל $s \in T$ האבר $x$ אינו שַיָך לתת החבורה הסגורה $G_s$ של $G$. לכן, קיֶמת תת חבורה נורמלית פתוחה $N_s$ של $G$ כך ש $xN_s \cap G_s = \emptyset$ ולכן $xN_s \cap G_sN_s = \emptyset$. לפי (א1), הקבוצה $U_s = \{t \in T \mid G_t \le G_sN_s\}$ היא סביבה פתוחה של $s$ ב $T$. אֹסף הקבוצות הפתוחות $U_s$ מכסה את $T$. הואיל ו $T$ דחוס, קיימים $s_1, \ldots, s_n \in T$ כך ש $T = \bigcup_{i=1}^n U_{s_i}$. נתבונן בתת החבורה הפתוחה $N = \bigcap_{i=1}^n N_{s_i}$. הקבוצה $xN$ הנה סביבה פתוחה של $x$ ב $G$ המקיֶמת $xN \cap E = \emptyset$. אחרת היה קיָם $s \in E$ כך ש $xN \cap G_s \neq \emptyset$. עבורו היה קים $i$ כך ש $s \in U_{s_i}$ ולכן, $xN \cap G_s \subseteq xN_{s_i} \cap G_{s_i}N_{s_i}$ ומכאן ש $xN_{s_i} \cap G_{s_i}N_{s_i} \neq \emptyset$, בנִגוד לבחירת $N_{s_i}$. ∎

תהי $G = \mathop{\circledast}\limits_{t\in T}^{\mathcal{C}} G_t$ מכפלה פרו־$\mathcal{C}$ חפשית ותהי $S$ תת קבוצה סגורה של $T$. נסמן

$$G(S) = \langle G_s \mid s \in S\rangle.$$

**למה מכפלה חפשית:** *תהי $G$ חבורה פרו־$\mathcal{C}$.*

(א) *תהי $H$ תת חבורה סגורה של $G$. נניח שכל הומומורפיזם של $H$ לתוך חבורה פרו־$\mathcal{C}$ $A$ נִתן להרחבה באפן יחיד להומומורפיזם $G \to A$. אזי $G = H$.*

(ב) *יהיו $G_1, \ldots, G_n$ חבורות חלקיות סגורות של $G$. נניח שכל $n$־ית הומומורפיזמים $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ נִתנת להרחבה באפן יחיד להומומורפיזם $\alpha\colon G \to A$. אזי $G = G_1 *_{\mathcal{C}} \cdots *_{\mathcal{C}} G_n$.*

*הוכחת א:* לפי ההנחה נִתנת העתקת הזהות $\mathrm{id}_H\colon H \to H$ להרחבה להומומורפיזם $\eta\colon G \to H$. נסמן ב $i$ את העתקת השכון של $H$ לתוך $G$. אזי, גם $\mathrm{id}_G$ וגם $i \circ \eta$ מרחיבים את $i$. לכן, $i \circ \eta = \mathrm{id}_G$. בפרט, $g = i(\eta(g)) \in H$ לכל $g \in G$. מכאן נובע ש $G = H$.

*הוכחת ב:* מההנחה נובע שכל הומומורפיזם של $H = \langle G_1, \ldots, G_n\rangle$ לתוך חבורה פרו־סופית $A$ נִתן להרחבה להומומורפיזם של $G$ לתוך $A$ באפן יחיד. לכן, לפי (א), $G = H$. בצרוף ההנחה של (ב), זה מספיק להוכיח ש $G = G_1 *_{\mathcal{C}} \cdots *_{\mathcal{C}} G_n$. ∎

**למה חֲלֻקה:** *תהי $G = \mathop{\circledast}\limits_{t\in T}^{\mathcal{C}} G_t$ מכפלה פרו־$\mathcal{C}$ חפשית ותהי $T = \dot\bigcup_{i\in I} T_i$ חֲלֻקה לקבוצות פתוחות־סגורות. אזי $G = \mathop{\circledast}\limits_{i\in I}^{\mathcal{C}} G(T_i)$ ולכל $i \in I$ מתקיֵם $G(T_i) = \mathop{\circledast}\limits_{t\in T_i}^{\mathcal{C}} G_t$. בפרט, $G = G(T) = \langle G_t \mid t \in T\rangle$.*

*הוכחה:* תהי $A$ חבורה פרו־$\mathcal{C}$ ולכל $i \in I$ יהי $\alpha_i\colon G(T_i) \to A$ הומומורפיזם. צמצומו ל $\bigcup_{t\in T_i} G_t$ הנו מורפיזם לתוך $A$. בפרט $\alpha_i(1) = 1$. לפי (ב1), $\bigcup_{t\in T_i} G_t \cap \bigcup_{t\in T_j} G_t = 1$ אם $i \neq j$. לכן, ההעתקה $\alpha_0\colon \bigcup_{t\in T} G_t \to A$ שצמוצמה ל $G_t$ שוה לצמצום $\alpha_i$ ל $G_t$ אם $t \in T_i$ הנה מורפיזם. מ (ג1) נובע ש $\alpha_0$ נִתן להרחבה להומומורפיזם $\alpha\colon G \to A$. לפי "למה מכפלה חפשית" $G = \mathop{\circledast}\limits_{i\in I}^{\mathcal{C}} G_i$.

נקבע עתה $i \in I$. כדי להוכיח ש $G_i = \mathop{\circledast}\limits_{t\in T_i}^{\mathcal{C}} G_t$ נשים ראשית לב לכך שנכונותם של התנאים (א1) ו (ב1) ל $T$ גוררת את נכונותם ל $T_i$. נותר לנו אפוא להוכיח את תנאי (ג1) ל $T_i$. יהי אפוא $\gamma_i\colon \bigcup_{t\in T_i} G_t \to C$ מורפיזם

לתוך חבורה פרו־$\mathcal{C}$. כמו בסעיף הראשון של ההוכחה, נרחיב אותו למורפיזם $\gamma_0\colon \bigcup_{t\in T} G_t \to C$ על ידי שנגדיר $\gamma_0(g) = 1$ לכל $g \in G_t$ המקַיֵם $t \in T \smallsetminus T_i$. מורפיזם זה נִתן להרחבה (לפי (1ג)) להומומורפיזם $\gamma\colon G \to C$. הצמצום של $\gamma$ ל $G_i$ הנו הומומורפיזם $\gamma_i'\colon G_i \to C$ המרחיב את $\gamma_i$. הרחבה זו היא יחידה כי הקבוצה $\bigcup_{t\in T_i} G_t$ יוצרת את $G_i$. ∎

**מכפלה חפשית חיצונית**

כדי להוכיח תכונות של המכפלה החפשית הפנימית זקוקים אנו לתאור מחֻדש שלה כ"מכפלה חפשית חיצונית".

*הגדרה אלמה:* יהי $T$ מרחב פרו־סופי. **אֲלֻמָּה של חבורות פרו־$\mathcal{C}$ מעל** $T$ הנה שלישיה $\mathbf{X} = (X, \tau, T)$ שבה $X$ הנו מרחב פרו־סופי ו $\tau$ הנה העתקה רציפה מ $X$ על $T$ המקיֶמת את התנאים הבאים:

(1א) לכל $t \in T$, הסיב $X_t = \tau^{-1}(t)$ הנו חבורה פרו־סופית (בפרט $X = \bigcup_{t \in T} X_t$).

(1ב) פעֻלות החבורה ב $X_t$ רציפות במִדה שוה. במלים אחרות, אם נסמן

$$X^{(2)} = \{(x,y) \in X \times X \mid \tau(x) = \tau(y)\},$$

(כלומר, $X^{(2)}$ הנו התמונה ההפוכה של האלכסון של $T$ תחת $\tau$) אזי ההעתקה $\mu\colon X^{(2)} \to X$ המֻגדרת על ידי $\mu(x,y) = x^{-1}y$ רציפה. ∎

*דגמה אלמה קבועה:* יהיו $G$ חבורה פרו־$\mathcal{C}$ ו $T$ מרחב פרו־סופי. נסמן ב $\mathrm{pr}\colon G \times T \to T$ את ההשלכה על המרכיב השני. הסיב של אבר $t \in T$ הנו $G \times \{t\}$. נהפֹך אותו לחבורה על ידי שנגדיר $(g,t)(h,t) = (gh,t)$. אם $T_0$ הוא סביבה פתוחה של $t$ ו $N$ תת חבורה נורמלית פתוחה של $G$, אזי הסביבה $(gN \times T_0) \times (hN \times T_0)$ של $((g,t),(h,t))$ עוברת על ידי ההעתקה $\mu$ לתוך $g^{-1}hN \times T_0$. לכן, פעֻלות החבורה ב $G \times \{t\}$ רציפות במדה שוה. מכאן ש $(X, \mathrm{pr}, T)$ הנה אלֻמה המכֻנה **קבועה**. ∎

*הגדרה מורפיזם לחבורה:* **מורפיזם** של אלֻמה $(X, \tau, T)$ לתוך חבורה פרו־סופית $A$ הנו העתקה רציפה $\alpha\colon X \to A$ שצִמצומה לכל אחד מהסיבים $X_t$ הנו הומומורפיזם. ∎

*הגדרה מכפלה חיצונית:* **מכפלה חפשית פרו־$\mathcal{C}$** מעל אלֻמה $\mathbf{X} = (X, \tau, T)$ הנה זוג $(G, \omega) = (G_X, \omega_X)$ שבו $G$ חבורה פרו־$\mathcal{C}$ ו $\omega\colon \mathbf{X} \to G$ הנו מורפיזם בעל התכונה האוניברסלית הבאה:

(2) לכל מורפיזם $\gamma$ של $\mathbf{X}$ לתוך חבורה פרו־$\mathcal{C}$ $C$ קיָם הומומורפיזם יחיד $\varphi\colon G \to C$ כך ש $\gamma = \varphi \circ \omega$. ∎

**משפטון קיום ויחידות:** *מעל כל אלֻמה* $\mathbf{X} = (X, \tau, T)$ *קיֶמת מכפלה חפשית יחידה עד כדי איזומורפיזם.*

*הוכחה:* יחידות המכפלה החפשית נובעת מהתנאי האוניברסלי (2). ליתר דיוק, אם זוג נוסף $(G', \omega')$ מקיֵם את תנאי (2), אזי קיָמים הומומורפיזמים $\varphi\colon G \to G'$ ו $\varphi'\colon G' \to G$ כך ש $\varphi \circ \omega = \omega'$ ו $\varphi' \circ \omega' = \omega$. מהיחידות נובע ש $\varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}_{G'}$ ו $\varphi' \circ \varphi = \mathrm{id}_G$. לכן, כל אחד מההומומורפיזמים $\varphi$ ו $\varphi'$ הנו איזומורפיזם.

את הקיום של המכפלה החפשית נוכיח על ידי בניה ישירה. תחילה נבנה את המכפלה החפשית המֻפשטת $F$ של החבורות $X_t$ עבור $t \in T$. בפרט, נִראה את $X_t$ גם כתת חבורה של $F$. הואיל ו $X = \bigcup_{t \in T} X_t$ קיֶמת העתקה יחידה $\omega_0\colon X \to F$ שצמצומה לכל אחת מהחבורות $X_t$ הנה העתקת הזהות. לכל תת חבורה נורמלית $N$ של $F$ המקיֶמת $F/N \in \mathcal{C}$ נסמן ב $\pi_N\colon F \to F/N$ את העתקת המנה. נסמן ב $\mathcal{N}$ את אסף כל תת החבורות הנורמליות

$N$ של $F$ כך ש $F/N \in \mathcal{C}$ וההעתקה $\pi_N \circ \omega_0\colon X \to F/N$ רציפה. במלים אחרות, $w_0^{-1}(fN)$ הנה תת קבוצה פתוחה של $X$ לכל $f \in F$. מהזהות $f(N_1 \cap N_2) = fN_1 \cap fN_2$ לתת חבורות נורמליות $N_1, N_2$ של $F$, נובע שאם $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$, אזי $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}$. תנאי זה מאפשר לעבֹר להשלמה $G = \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} F/N$. היא תהיה חבורה פרו־$\mathcal{C}$. נסמן ב $\theta\colon F \to G$ את העתקת ההשלמה (כלומר, $\theta(f) = (fN)_{N\in\mathcal{N}}$ לכל $f \in F$) ותהי $\omega = \theta \circ \omega_0$. נוכיח שלזוג $(G, \omega)$ יש התכונות הנדרשות למכפלה החפשית מעל $T$.

ראשית נעיר שבסיס לקבוצות הפתוחות של $G$ מֻרכב מהקבוצות $\theta(f)\hat{N}$ שעבורן $f \in F$ ו $\hat{N}$ הנו הסגור של חבורה $N \in \mathcal{N}$. לפי למה 17.2.1(b) ב"ארתמטיקת השדות", $\omega^{-1}(\theta(f)\hat{N}) = \omega_0^{-1}(fN)$ הנה תת קבוצה פתוחה של $X$. לכן, $\omega$ רציפה.

לכל $t \in T$ ההעתקה $\omega_0$ מעתיקה את $X_t$ באפן זהותי על העֹתק שלו בתוך $F$. בפרט, $\omega_0$ הנו הומומורפיזם על $X_t$. הואיל ו $\theta$ הנו הומומורפיזם, $\omega|_{X_t}$ הנו הומומורפיזם. לכן, $\omega\colon X \to G$ הנו מורפיזם.

כדי להוכיח את התכונה האוניברסלית (2) נתבונן בחבורה פרו־$\mathcal{C}$ $C$ ובמורפיזם $\gamma\colon X \to C$. הואיל ו $\omega_0$ הנו העתקת הזהות על כל $X_t$ קיָם הומומורפיזם יחיד $\varphi_0\colon F \to C$ כך ש $\gamma = \varphi_0 \circ \omega_0$. אם $C_0$ היא תת חבורה נורמלית פתוחה של $C$ ו $f \in F$, אזי $\omega_0^{-1}(f\varphi_0^{-1}(C_0)) = \gamma^{-1}(\varphi_0(f)C_0)$ פתוחה (כי $\gamma\colon X \to C$ הנה העתקה רציפה). לכן, $\varphi_0^{-1}(C_0) \in \mathcal{N}$. מלמה 17.2.2 של "ארתמטיקת השדות" נובע שקיָם הומומורפיזם יחיד $\varphi\colon G \to C$ כך ש $\varphi \circ \theta = \varphi_0$. מכאן ש $\varphi \circ \omega = \gamma$.

לבסוף, אם $\varphi'\colon G \to C$ הנו הומומורפיזם נוסף המקיָם $\varphi' \circ \omega = \gamma$, אזי $\varphi_0' = \varphi' \circ \theta$ מקיָם $\varphi_0' \circ \omega_0 = \gamma$. לכן, $\varphi_0' = \varphi_0$ ולכן $\varphi' = \varphi$. ∎

**למה הפוכה:** *תהי $\alpha\colon X \to Y$ העתקה על של קבוצות ותהי $X_0$ תת קבוצה של $X$. נסמן*

$$Y_0 = \{y \in Y \mid \alpha^{-1}(y) \subseteq X_0\}.$$

*אזי $\alpha(X \smallsetminus X_0) = Y \smallsetminus Y_0$. בפרט, אם $X$ ו $Y$ הם מרחבים פרו־סופיים, $X_0$ הנה תת קבוצה פתוחה של $X$ ו $\alpha$ רציפה, אזי $Y_0$ הנה תת קבוצה פתוחה של $Y$.*

*הוכחה:* אם $y \in \alpha(X \smallsetminus X_0)$, אזי קיָם $x \in X \smallsetminus X_0$ כך ש $\alpha(x) = y$. בפרט, $x \in \alpha^{-1}(y) \smallsetminus X_0$. לכן, $\alpha^{-1}(y) \not\subseteq X_0$ ולכן $y \in Y \smallsetminus Y_0$. להפר, יהי $y \in Y \smallsetminus Y_0$. אזי קיָם $x \in X$ כך ש $\alpha(x) = y$ ו $x \notin X_0$. בפרט, $y \in \alpha(X \smallsetminus X_0)$.

עתה, אם $X$ ו $Y$ הנם מרחבים פרו־סופיים, $X_0$ פתוחה ו $\alpha$ רציפה, אזי $X \smallsetminus X_0$ סגורה. לכן, $\alpha(X \smallsetminus X_0)$ סגורה. מהזהות שהוכחנו נובע ש $Y \smallsetminus Y_0$ סגורה. לכן, $Y_0$ פתוחה. ∎

נשתמש ב"למה הפוכה" כדי להוכיח את הלמה הבאה המאפשרת מִצִּדה להשתמש בתכונה האוניברסלית (2) של המכפלה החפשית.

**למה הרחבה:** *תהי $(X,\tau,T)$ אֲלֻמה של חבורות פרו־סופיות. יהיו $r,s \in T$ עם $s \neq r$. אזי כל הומומורפיזם $\alpha_s$ של $X_s$ לתוך חבורה סופית $A$ נתן להרחבה למורפיזם $\alpha\colon X \to A$ כך ש $\alpha(X_r) = 1$.*

*הוכחה:* נחלק את הבניה של $\alpha$ לכמה חלקים:

**חלק א:** *הרחבה של $\alpha$ להעתקה רציפה $\alpha'\colon X \to A$.* הואיל ו $A$ סופית, כל אחת מהקבוצות $\alpha_s^{-1}(a)$ פתוחה וסגורה ב $X_s$ ומתקיֵם $X_s = \dot\bigcup_{a\in A} \alpha_s^{-1}(a)$. יהי $a \in A$ ותהי $U_a$ תת קבוצה פתוחה של $X$ המקיֶמת $X_s \cap U_a = \alpha_s^{-1}(a)$. הואיל ו $X_s$ פרו־סופי, נתן להציג את $U_a$ כאחוד $U_a = \bigcup_{i\in I} U_{a,i}$ של קבוצות פתוחות־סגורות ב $X$. אלו מקיְמות גם $\alpha_s^{-1}(a) = \bigcup_{i\in I} X_s \cap U_{a,i}$. בתור חבורה פרו־סופית, $X_s$ דחוסה. לכן גם $\alpha_s^{-1}(a)$ דחוסה וקיֶמת אפוא תת קבוצה סופית $J$ של $I$ כך ש $\alpha_s^{-1}(a) = \bigcup_{j\in J} X_s \cap U_{a,j}$. תת הקבוצה $U'_a = \bigcup_{j\in J} U_{a,j}$ של $X$ פתוחה־סגורה ומקיֶמת $\alpha_s^{-1}(a) = X \cap U'_a$. עתה נסמן

$$U''_a = U'_a \smallsetminus \bigcup_{b\in A \smallsetminus \{a\}} U'_b.$$

אזי $U''_a$ פתוחה־סגורה, $\alpha_s^{-1}(a) = X \cap U''_a$ ו $U''_a \cap U''_b = \emptyset$ לכל $b \in A$ השונה מ $a$. בעזרת הקבוצות האלו נרחיב את $\alpha_s$ להעתקה רציפה $\alpha'\colon X \to A$ על ידי $\alpha'(x) = a$ אם $x \in U''_a$ ו $\alpha'(x) = 1$ אם $x \in X \smallsetminus \bigcup_{a\in A} U''_a$.

**חלק ב:** *סביבה פתוחה של $\tau^{-1}(s)$ שעליה $\alpha'$ הנו מורפיזם.* ההעתקה $(x,y) \mapsto \alpha'(x)^{-1}\alpha'(y)$ היא צרוף של ההעתקה $\alpha' \times \alpha'\colon X^{(2)} \to A \times A$ וההעתקה $(a,b) \mapsto a^{-1}b$ מ $A \times A$ לתוך $A$. לכן, היא רציפה. כמו כן, ההעתקה $\alpha' \circ \mu\colon X^{(2)} \to A$ רציפה. לכן, ההעתקה $\eta\colon X^{(2)} \to A \times A$ המֻגדרת על ידי

$$\eta(x,y) = (\alpha'(x)^{-1}\alpha'(y),\, \alpha'(x^{-1}y))$$

רציפה. מכאן נובע עבור האלכסון $\Delta = \{(a,b) \in A \times A \mid\ a = b\}$ ש $\eta^{-1}(\Delta)$ פתוחה ב $X^{(2)}$.

מהרציפות של $\tau\colon X \to T$ נובע שגם ההעתקה $\rho\colon X^{(2)} \to T$ המֻגדרת על ידי $\rho(x,y) = \tau(x)$ רציפה. לפי "למה הפוכה", הקבוצה $S = \{t \in T \mid\ \rho^{-1}(t) \subseteq \eta^{-1}(\Delta)\}$ פתוחה ב $T$. מההגדרות נובע ש $t \in S$ אם ורק אם $\alpha'|_{X_t}$ הנו הומומורפיזם לתוך $A$. בפרט $s \in S$ (כי $\alpha'|_{X_s} = \alpha_s$ הנו הומומורפיזם). נבחר תת קבוצה פתוחה־סגורה $V$ של $T$ כך ש $s \in V \subseteq S$ ו $r \notin V$. נגדיר העתקה $\alpha\colon X \to A$ על ידי $\alpha(x) = \alpha'(x)$ עבור $x \in \tau^{-1}(V)$ ו $\alpha(y) = 1$ עבור $y \in \tau^{-1}(T \smallsetminus V)$. אזי $\alpha\colon X \to A$ הנו מורפיזם המרחיב את $\alpha'|_{\tau^{-1}(V)}$ ולכן גם את $\alpha_s$. בנוסף, $\alpha(X_r) = 1$. ∎

"למה הרחבה" מאפשרת לנו להוכיח תכונות ראשונות של המכפלה החפשית החיצונית:

**למה תכונות:** *תהי* $\mathbf{X} = (X,\tau,T)$ *אֲלֻמה של חבורות פרו־*$\mathcal{C}$ *ותהי* $(G,\omega)$ *המכפלה החפשית מעל* $\mathbf{X}$*. לכל* $t \in T$ *נסמן* $G_t = \omega(X_t)$*. אזי:*

(א) $G = \langle G_t \mid t \in T\rangle$.

(ב) $\omega$ *מעתיקה את* $X_t$ *באפן איזומורפי על* $G_t$.

(ג) *אם* $s,t \in T$ *ו* $s \neq t$*, אזי* $G_s \cap G_t = 1$.

(ד) *ההעתקה* $\omega \times \tau\colon X \to G \times T$ *מעתיקה את* $X$ *באפן הומאומורפי על תת הקבוצה הסגורה*

$$\{(g,t) \in G \times T \mid g \in G_t\}$$

*של* $G \times T$.

*הוכחת א:* ב"משפטון קיום ויחידות" בנינו את המכפלה המְפשטת החפשית $F$ של החבורות $X_t$ והגדרנו העתקה $\omega_0\colon X \to F$ שצמצומה לכל אחת מהחבורות $X_t$ הנה העתקת הזהות. כמו כן $G$ היתה ההשלמה של $F$ ביחס לאסף מסֻים $\mathcal{N}$ של תת חבורות נורמליות של $F$ בעלות אנדקס סופי וסימנו ב $\theta$ את ההעתקה הקנונית של $F$ לתוך $G$. בסימונים אלו הגדרנו $\omega = \theta \circ \omega_0$. הואיל ו $G$ הנו הסגור של $\theta(F)$, נובע מכאן ש $G$ נוצרת על ידי החבורות $G_t$, $t \in T$, כפי שהיה להראות.

*הוכחת ב:* יהי $x \in X_t$, $x \neq 1$ ונניח בשלילה ש $\omega(x) = 1$. אזי קיֶמת ל $X_t$ תת חבורה נורמלית פתוחה $N$ כך ש $x \notin N$. נסמן ב $\alpha_t\colon X_t \to X_t/N$ את העתקת המנה. הואיל ו $X_t/N \in \mathcal{C}$, מאפשרת "למת הרחבה" להרחיב את $\alpha_t$ למורפיזם $\alpha\colon X \to X_t/N$. תנאי (2) נותן הומומורפיזם $\varphi\colon G \to X_t/N$ כך ש $\varphi \circ \omega = \alpha$. בפרט, $\alpha_t(x) = \alpha(x) = \varphi(\omega(x)) = \varphi(1) = 1$ בסתירה לבחירת $N$. מסתירה זו נובע ש $\omega|_{X_t}$ הנו איזומורפיזם על $G_t$, כפי שהיה להוכיח.

*הוכחת ג:* נניח בשלילה שקים $g \in G_s \cap G_t$ כך ש $g \neq 1$. נבחר $x \in X_s$ כך ש $g = \omega(x)$. מ (ב) נובע ש $x \neq 1$. לכן קיֶמת ל $X_s$ תת חבורה נורמלית פתוחה $N$ כך ש $x \notin N$. נרחיב את העתקת המנה $\alpha_s\colon X_s \to X_s/N$ למורפיזם $\alpha\colon X \to X_s/N$ כך ש $\varphi(X_t) = 1$ ("למה הרחבה"). יהי $\varphi\colon G \to X_s/N$ הומומורפיזם כך ש $\varphi \circ \omega = \alpha$ (תנאי (2)). מבחירת $N$ נובע ש $\varphi(g) = \varphi(\omega(x)) = \alpha(x) = \alpha_s(x) \neq 1$. מצד שני, $\varphi(G_t) = \varphi(\omega(X_t)) = \alpha(X_t) = 1$. הואיל ו $g \in G_t$, נובע מכאן ש $\varphi(g) = 1$. מסתירה זו נובע ש $G_s \cap G_t = 1$.

*הוכחת ד:* מ (ב) נובע ש $\omega \times \tau$ מעתיק את $X$ באפן חד חד ערכי על הקבוצה $Y = \{(g,t) \in G \times T \mid g \in G_t\}$. הואיל ושתי ההעתקות $\omega,\tau$ רציפות והמרחבים $X,G,T$ הנם פרו־סופיים, $Y$ סגורה וההעתקה $\omega \times \tau$ הנה הומאומורפיזם. ∎

### גבולות הפוכים של אֲלֻמוֹת

נהפך את מחלקת האלֻמות של חבורות פרו־$\mathcal{C}$ לקטגוריה על ידי שנגדיר **מורפיזם** מאלֻמה $\mathbf{X} = (X, \tau, T)$ לַאלֻמה $\mathbf{X}' = (X', \tau', T')$ כזוג $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ שבו $\alpha_1\colon X \to X'$ ו $\alpha_2\colon T \to T'$ הן העתקות רציפות המקיְמות:

(1א) $\tau' \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ \tau$.

(2א) אם $\alpha_2(t) = t'$, אזי הצמצום של $\alpha_1$ ל $X_t$ הנו הומומורפיזם לתוך $X_{t'}$.

בדרך כלל נרשם $\alpha$ במקום $\alpha_1$ ובמקום $\alpha_2$.

נתבונן עכשיו במערכת הפוכה $(\mathbf{X}_i, \pi_{ji})_{i,j \le I}$ של אלֻמות של חבורות פרו־$\mathcal{C}$ שבה $\mathbf{X}_i = (X_i, \tau_i, T_i)$ לכל $i \in I$. לכל $i \ge j$ ב $I$ יש לנו תרשים חִלופי

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[r, "\tau_j"] \arrow[d, "\pi_{ji}"'] & T_j \arrow[d, "\pi_{ji}"] \\ X_i \arrow[r, "\tau_i"] & T_i \end{tikzcd}$$

הגבול ההפוך של המערכת הנו שלישיה $\mathbf{X} = (X, \tau, T)$ שבה $X = \varprojlim X_i$, $T = \varprojlim T_i$ הם מרחבים פרו־סופיים ו $\tau = \varprojlim \tau_i$ היא העתקה רציפה מ $X$ ל $T$. יתר על כן, אם נסמן ב $\pi_i$ את ההטלה של $\mathbf{X}$ על $\mathbf{X}_i$ נקבל תרשים חִלופי

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi_i"'] & T \arrow[d, "\pi_i"] \\ X_i \arrow[r, "\tau_i"] & T_i \end{tikzcd}$$

אם $t \in T$, $t_i = \pi_i(t)$ ו $X_t = \tau^{-1}(t)$, אזי $X_t = \varprojlim X_{t_i}$ הנו חבורה פרו־$\mathcal{C}$.

לבסוף, לכל $i \in I$ יהי $X_i^{(2)} = \{(x, y) \in X_i \times X_i \mid \tau_i(x) = \tau_i(y)\}$ ו $\mu_i\colon X_i^{(2)} \to X_i$ ההעתקה המֻגדרת על ידי $\mu_i(x, y) = x^{-1}y$. אזי $X^{(2)} = \varprojlim X_i^{(2)}$ ו $\mu = \varprojlim \mu_i$. בפרט, $\mu\colon X^{(2)} \to X$ הנה העתקה רציפה. מכל זה עולה ש $\mathbf{X}$ הנו אלֻמה של חבורות פרו־$\mathcal{C}$.

לכל $i \in I$ יהי $(G_i, \omega_i)$ המכפלה החפשית מעל האלֻמה $\mathbf{X}_i$. אם $i \ge j$, אזי $\omega_i \circ \pi_{ji}\colon X_j \to G_i$ הנו מורפיזם. לכן, קיָם הומומורפיזם יחיד מ $G_j$ ל $G_i$ שנסמנו שוב ב $\pi_{ji}$ כך שהתרשים הבא חלופי:

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[r, "\omega_j"] \arrow[d, "\pi_{ji}"'] & G_j \arrow[d, "\pi_{ji}"] \\ X_i \arrow[r, "\omega_i"] & G_i \end{tikzcd}$$

נסמן $G = \varprojlim G_i$ ו $\omega = \varprojlim \omega_i$. אזי, $G$ הנה חבורה פרו־$\mathcal{C}$, $\omega\colon X \to G$ הנה העתקה רציפה ולכל $i \in I$ התרשים הבא חלופי:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\pi_i"'] & G \arrow[d, "\pi_i"] \\ X_i \arrow[r, "\omega_i"] & G_i \end{tikzcd}$$

לכל $t \in T$ הגבול ההפוך של האיזומורפיזמים $\omega_i\colon X_{i,t_i} \to G_{i,t_i}$ (באשר $t_i = \pi_i(t)$) נותן איזומורפיזם $\omega\colon X_t \to G_t$.

**למת המשכה:** *יהיו $Y$ מרחב פרו־סופי, $X$ תת קבוצה סגורה של $Y$ ו $f$ העתקה רציפה של $X$ לתוך קבוצה סופית $A$ עם הטופולוגיה הבדידה. אזי $f$ נִתנת להרחבה להעתקה רציפה $g\colon Y \to A$.*

*הוכחה:* לכל $a \in A$ הסיב $X_a = f^{-1}(a)$ הנו תת קבוצה פתוחה וסגורה של $X$ ו $X = \dot\bigcup_{a\in A} X_a$. כמו כן קיֶמת לכל $a \in A$ תת קבוצה פתוחה $Y_a$ של $Y$ כך ש $X_a = Y_a \cap X$. את $Y_a$ אפשר להציג כאחוד של קבוצות פתוחות וסגורות ב $Y$, כלומר $Y_a = \bigcup_{i\in I(a)} Y_{ai}$. הן מקיְמות, $X_a = \bigcup_{i\in I(a)} Y_{ai} \cap X$. הואיל ו $X_a$ סגורה ולכן דחוסה ו $Y_{ai} \cap X$ פתוחות ב $X$ קיֶמת ל $I(a)$ תת קבוצה סופית $J(a)$ כך ש $X_a = \bigcup_{j\in J(a)} Y_{ai} \cap X$. הקבוצה $Y'_a = \bigcup_{j\in J(a)} Y_{aj}$ פתוחה וסגורה ב $Y$ ומקיֶמת $X_a = Y'_a \cap X$. לכן גם הקבוצה $Y''_a = Y'_a \smallsetminus \bigcup_{b\in A\smallsetminus\{a\}} Y'_a$ פתוחה וסגורה ב $Y$. אם $x \in X_a$ אזי $x \in Y'_a$ ו $x \notin Y'_b$ לכל $b \neq a$ (אחרת, $x \in X_b$, בסתירה להצגה המקורית של $X$). לכן $x \in Y''_a$. במִלים אחרות, $X_a = Y''_a \cap X$. בנוסף על זה הקבוצות $Y''_a$, $a \in A$, זרות זו לזו. לבסוף נבחר $c \in A$ ונסמן $Y^*_c = Y \smallsetminus \bigcup_{a\in A} Y''_a$. אזי גם $Y^*_c$ פתוחה וסגורה ו $Y = Y^*_c \cup \dot\bigcup_{a\in A} Y''_a$. ההעתקה $g\colon Y \to A$ המֻגדרת על ידי $g(y) = a$ אם $y \in Y''_a$ ו $g(y) = c$ אם $y \in Y^*_c$ רציפה וצמצומה ל $X$ מתלכד עם $f$. ∎

**למת פרוק:** *תהי $(X_i, \pi_{ji})_{i,j\in I}$ מערכת הפוכה של מרחבים פרו־סופיים. נסמן $X = \varprojlim X_i$ ולכל $i \in I$ יהי $\pi_i = \varprojlim \pi_{ji}$. אם $\alpha\colon X \to A$ הנה העתקה רציפה לתוך מרחב סופי בדיד, אזי קיָם $j \in I$ וקיֶמת העתקה רציפה $\alpha_j\colon X_j \to A$ כך ש $\alpha_j \circ \pi_j = \alpha$.*

*הוכחה:* לכל $i \in I$ תת הקבוצה $X'_i = \pi_i(X)$ סגורה ו $\pi_{ji}$ מעתיק את $X'_j$ על $X'_i$ אם $j \geq i$. אם נצליח למצא $j \in I$ והעתקה רציפה $\alpha'_j\colon X'_j \to A$ כך ש $\alpha'_j \circ \pi_j = \alpha$ נוכל להרחיב את $\alpha'_j$ להעתקה רציפה $\alpha_j\colon X_j \to A$ כך ש $\alpha_j \circ \pi_j = \alpha$ (לפי למה ההמשכה). לכן, בלי הגבלת הכלליות נוכל להניח שכל אחת מההעתקות $\pi_i$ ו $\pi_{ji}$ הנן על.

לכל $a \in A$ תת הקבוצה $\alpha^{-1}(a)$ של $X$ פתוחה־סגורה. אסף הקבוצות $\pi_i^{-1}(U)$ שעבורן $i \in I$ ו $U_i$ פתוחה ב $X_i$ מהוה בסיס לטופולוגיה של $X$ (למה 1.1.1 ב"ארתמטיקת השדות"). בתור קבוצה פתוחה $\alpha^{-1}(a)$ הנה אחוד של קבוצות מהצורה $\pi_i^{-1}(U)$. הואיל ו $\alpha^{-1}(a)$ סגורה, קיֶמת תת קבוצה סופית $I(a)$ של $I$ ולכל $i \in I(a)$

קַיֶמת תת קבוצה פתוחה $U_i$ של $X_i$ כך ש $\alpha^{-1}(a)=\bigcup_{i\in I(a)}\pi_i^{-1}(U_i)$. נבחר $j\in I$ כך ש $i\leq j$ לכל $a\in A$ ולכל $i\in I(a)$.

לכל $a\in A$ תת הקבוצה $V_a=\bigcup_{i\in I(a)}\pi_{ji}^{-1}(U_i)$ פתוחה ב $X_j$ ו $\alpha(x)=a$ לכל $x\in\pi_j^{-1}(V_a)$. בפרט, $X_j=\dot\bigcup_{a\in A}V_a$ (כאן אנו משתמשים בהנחה שההעתקות $\pi_i$ ו $\pi_{ji}$ על) ולכן כל אחת מהקבוצות $V_a$ סגורה. נגדיר אפוא העתקה רציפה $\alpha_j\colon X_j\to A$ על ידי $\alpha_j(x)=a$ לכל $x\in V_a$. היא תקַיֶם $\alpha=\alpha_j\circ\pi_j$ כנדרש. ∎

**למה חבורת גבול:** *בסימונים דלעיל, הזוג* $(G,\omega)$ *הנו החבורה הפרו־*$\mathcal{C}$ *החפשית מעל האֲלֻמה* $\mathbf{X}$.

*הוכחה:* נותר לנו רק להראות שהזוג $(G,\omega)$ מקיֵם את התכונה האוניברסלית (2) של סעיף "מכפלה חפשית חיצונית". נתונה אפוא חבורה פרו־$\mathcal{C}$ $A$ ומורפיזם $\alpha\colon X\to A$. עלינו להראות שקיָם הומומורפיזם יחיד $\varphi\colon G\to A$ כך ש $\alpha=\varphi\circ\omega$. דרישת היחידות מאפשרת לנו להניח ש $A$ סופית.

"למה פרוק" נותנת $j\in I$ והעתקה רציפה $\alpha_j\colon X_j\to A$ כך ש $\alpha=\alpha_j\circ\pi_j$. לכל $k\geq j$ נגדיר $\alpha_k=\alpha_j\circ\pi_{kj}$. אזי $\alpha_k\colon X_k\to A$ הנה העתקה רציפה. נמצא $k$ כזה כך ש $\alpha_k\colon X_k\to A$ הנו מורפיזם. לשם כך נגדיר לכל $k\geq j$ העתקה $\beta_k\colon X_k^{(2)}\to A\times A$ על ידי $\beta_k(x,y)=(\alpha_k(x)^{-1}\alpha_k(y),\,\alpha_k(x^{-1}y))$. מרציפות הכפל בסיבי $T_k$ שב $X_k$ נובע ש $\beta_k$ רציפה (ראה גם הוכחת חלק ב של "למה הרחבה"). באפן דומה נגדיר העתקה רציפה $\beta\colon X^{(2)}\to A\times A$ על ידי $\beta(x,y)=(\alpha(x)^{-1}\alpha(y),\,\alpha(x^{-1}y))$. אזי $X^{(2)}=\varprojlim X_k^{(2)}$ ו $\beta=\varprojlim\beta_k$. בפרט נקבל ש $\beta(X^{(2)})=\bigcap_{k\geq j}\beta_k(X_k^{(2)})$ (ואכן, אם $b$ שיך לאגף ימין, אזי $\beta_k^{-1}(b)$ מהוה מערכת הפוכה של מרחבים פרו־סופיים לא ריקים. הגבול ההפוך שלהם אינו ריק. כל אבר בגבול ההפוך ישתיֵך ל $\beta^{-1}(b)$). הואיל ו $A$ הנה קבוצה סופית, קיָם $k\geq j$ כך ש $\beta(X)=\beta(X_k)$. הואיל ו $\alpha$ הנו מורפיזם, $\alpha(x^{-1}y)=\alpha(x)^{-1}\alpha(y)$ לכל $(x,y)\in X^{(2)}$. מכאן נובע ש $\alpha_k(x^{-1}y)=\alpha_k(x)^{-1}\alpha_k(y)$ לכל $(x,y)\in X_k^{(2)}$. במִלים אחרות, $\alpha_k$ הנו מורפיזם, כמבֻקש.

לפי ההנחה $G_k$ הנה המכפלה הפרו־$\mathcal{C}$ החפשית מעל $\mathbf{X}_k$. לכן, קיָם הומומורפיזם יחיד $\gamma_k\colon G_k\to A$ כך ש $\alpha_k=\gamma_k\circ\omega_k$. ההומומורפיזם $\gamma=\gamma_k\circ\pi_k$ של $G$ לתוך $A$ יקיֵם $\gamma\circ\omega=\alpha$.

לבסוף, נניח ש $\gamma'\colon G\to A$ הנו הומומורפיזם נוסף כך ש $\alpha=\gamma'\circ\omega$, לפי "למה תכונות"(א) מתקיֵם $G_i=\langle\omega_i(X_t)\mid\ t\in T_i\rangle$ לכל $i\in I$. לכן,

$$G=\varprojlim G_i=\varprojlim\langle\omega_i(X_t)\mid\ t\in T_i\rangle=\langle\omega(X_t)\mid\ t\in T\rangle=\langle G_t\mid\ t\in T\rangle.$$

הואיל ו $\gamma'$ מתלכד עם $\gamma$ על כל אחת מהחבורות $G_t$ הוא מתלכד עם $\gamma$ על כל $G$. ∎

**שקילות שתי ההגדרות של מכפלות חפשיות**

נראה כאן ששני הסוגים של המכפלות החפשיות שהגדרנו בסעיפים הקודמים שקולים זה לזה.

**למה פנימית־חיצונית:** *תהי* $G = \coprod^{*\,\mathcal{C}}_{t\in T} G_t$ *מכפלה פרו־$\mathcal{C}$ חפשית מעל מרחב פרו־סופי* $T$. *אזי קיֶמת אלֻמה* $\mathbf{X} = (X,\tau,T)$ *של חבורות פרו־סופיות וקיָם מורפיזם* $\omega\colon X \to G$ *כך ש* $(G,\omega)$ *הנה המכפלה החפשית מעל* $\mathbf{X}$ *ו* $G_t = \omega(\tau^{-1}(t))$ *לכל* $t \in T$.

*הוכחה:* נסמן $X = \{(g,t) \in G\times T \mid g \in G_t\}$ ויהי $\tau\colon X \to T$ הצמצום ל $X$ של ההטלה על $T$. במלים אחרות, $\tau(g,t) = t$ לכל $(g,t) \in X$. הסיב מעל $t \in T$ הנו $X_t = G_t \times \{t\}$ וכלל הכפל $(g,t)(h,t) = (gh,t)$ הופך את $X_t$ לחבורה איזומורפית ל $G_t$. יתר על כן, $\tau$ מעתיק את $X_t$ באֹפן איזומורפי על $G_t$.

כדי להוכיח ש $X$ הנו מרחב פרו־סופי, מספיק להוכיח ש $X$ סגור ב $G\times T$. ואכן, יהי $(g,t) \in G\times T \smallsetminus X$. אזי, $g \notin G_t$. לכן קיֶמת תת חבורה נורמלית פתוחה $H$ של $G$ כך ש $g \notin G_tH$. הקבוצה $gH$ הנה סביבה פתוחה של $g$ ב $G$. מתנאי (1א) של סעיף "מכפלה חפשית פנימית" נובע שהקבוצה $T_0 = \{t' \in T \mid G_{t'} \subseteq G_tH\}$ הנה סביבה פתוחה של $t$ ב $T$. לכן, $gH \times T_0$ הנה סביבה פתוחה של $(g,t)$ ב $G\times T$. אם $(g',t') \in gH\times T_0$, אזי $g \in g'H$ ו $G_{t'} \subseteq G_tH$ ולכן $g' \notin G_{t'}$, כלומר $(g',t') \notin X$. מכאן נובע ש $G\times T \smallsetminus X$ פתוחה ולכן $X$ סגורה.

עתה נוכיח את הרציפות במדה שוה של פעֻלות הכפל ב $X_t$. לכל אבר ב $X^{(2)}$ יש הצורה $((g,t),(h,t))$ באשר $g,h \in G$. ההעתקה $\mu\colon X^{(2)} \to X$ שאת רציפותה אנו צריכים להוכיח מעתיקה אבר זה ל $(g^{-1}h,t)$. כל סביבה של האבר האחרון ב $X$ מקיפה קבוצה מהצורה $(g^{-1}hN \times T_0) \cap X$, באשר $N$ הנה תת חבורה נורמלית פתוחה ב $G$ ו $T_0$ סביבה פתוחה של $t$ ב $T$. הקבוצה $\big((gN\times T_0)\times(hN\times T_0)\big) \cap X^{(2)}$ הנה סביבה פתוחה של $\big((g,t),(h,t)\big)$ ב $X^{(2)}$ ו $\mu$ מעתיקה אותה ל $g^{-1}hN \times T_0$.

בכך הוכחנו ש $\mathbf{X}$ הנה אלֻמה של חבורות פרו־סופיות.

לבסוף, נגדיר העתקה $\omega\colon X \to G$ כצמצום של ההטלה $G\times T \to G$ ל $X$. במלים אחרות, $\omega(g,t) = g$ לכל $(g,t) \in X$. אזי $\omega$ הנו מורפיזם. כדי לסיֵם את הוכחת הלמה עלינו להראות שיש ל $\omega$ התכונה (2) של סעיף "מכפלה חפשית חיצונית". ואכן, יהי $\alpha$ מורפיזם של $X$ לתוך חבורה פרו־$\mathcal{C}$ $A$. נגדיר העתקה $\varphi_0\colon \bigcup_{t\in T} G_t \to A$ באפן הבא: קודם כל נגדיר $\varphi_0(1) = 1$. לכל $g \in \bigcup_{t\in T} G_t$, $g \neq 1$, קיָם לפי (1ב) של הסעיף "מכפלה חפשית פנימית" יחיד $t \in T$ כך ש $g \in G_t$. נגדיר אפוא $\varphi_0(g) = \alpha(g,t)$. מן ההגדרה עולה ש $\varphi_0 \circ \omega = \alpha$ והצמצום של $\varphi_0$ לכל אחת מהחבורות $G_t$ הנו הומומורפיזם. יתר על כן, אם $A_0$ היא תת קבוצה סגורה של $A$, אזי $\omega^{-1}(\varphi_0^{-1}(A_0)) = \alpha^{-1}(A_0)$ היא תת קבוצה סגורה של $X$. הואיל וההטלה $G\times T \to G$ כהעתקה רציפה בין מרחבים פרו־סופיים הנה סגורה, גם $\omega$ סגורה. לכן, $\varphi_0^{-1}(A_0) = \omega(\alpha^{-1}(A_0))$ סגורה. מכאן נובע ש $\varphi_0$ הנה

העתקה רציפה. תכונה (1ג) של הסעיף "מכפלה חפשית פנימית" מאפשרת להרחיב את $\varphi_0$ באפן יחיד להומומורפיזם $\varphi\colon G \to A$. הוא יקיֵם $\varphi \circ \omega = \alpha$. לבסוף, אם $\varphi'\colon G \to A$ הנו הומומורפיזם נוסף המקיֵם $\varphi' \circ \omega = \alpha$, אזי הוא מתלכד עם $\varphi_0$ על $\bigcup_{t\in T} G_t$ ולכן עם $\varphi$ על $G$. בזה סיַמנו את ההוכחה ש $(G,\omega)$ הנו המכפלה החפשית מעל $\mathbf{X}$. ∎

**למה חיצונית־פנימית:** *תהי* $\mathbf{X} = (X,\tau,T)$ *אלֻמה של חבורות פרו־*$\mathcal{C}$ *ותהי* $(G,\omega)$ *המכפלה הפרו־*$\mathcal{C}$ *החפשית מעל* $\mathbf{X}$*. אזי* $G = \circledast^{\mathcal{C}}_{t\in T} G_t$*, באשר* $G_t = \omega(X_t)$ *עבור כל* $t \in T$.

*הוכחה:* שלשת חלקי ההוכחה יוכיחו בהתאמה את התנאים (1א), (1ב) ו (1ג) של סעיף "מכפלה חפשית פנימית".

**חלק א:** *ההעתקה* $t \mapsto G_t$ *רציפה בְּפרישות.* תהי $H$ תת חבורה פתוחה של $G$. אזי $\omega^{-1}(H)$ היא תת קבוצה פתוחה של $X$, לכן $X \smallsetminus \omega^{-1}(H)$ סגורה ב $X$ ולכן $\tau(X - \omega^{-1}(H))$ סגורה ב $T$. אם נסמן $S = \{t \in T \mid G_t \subseteq H\}$ נקבל באפן ישיר או לפי "למה הפוכה" ש $\tau(X \smallsetminus \omega^{-1}(H)) = T \smallsetminus S$. לכן, $S$ פתוחה ב $T$, כפי שנדרש ב (1א) של סעיף "מכפלה חפשית פנימית".

**חלק ב:** $G_s \cap G_t = 1$ *לכל* $s,t \in T$*,* $s \neq t$*.* טַעֲנה זו הנה חלק (ג) של "למה תכונות".

**חלק ג:** *התכונה האוניברסלית של* $G$*.* תהי $A$ חבורה פרו־$\mathcal{C}$ ויהי $\varphi_0\colon \bigcup_{t\in T} G_t \to A$ מורפיזם. הואיל ו $\omega(X) = \bigcup_{t\in T} G_t$, ההעתקה $\varphi_0 \circ \omega\colon X \to A$ הנה מורפיזם. לפי (2) של סעיף "מכפלה חפשית חיצונית", קיָם הומורפיזם יחיד $\varphi\colon G \to A$ כך ש $\varphi_0 \circ \omega = \varphi \circ \omega$. בפרט, $\varphi$ מרחיב את $\varphi_0$ והוא יחיד בעל תכונה זו. ∎

ההעתקות שהֻגדרו בשתי הלמות האחרונות בין שני הסוגים של המכפלות החפשיות נותנות למעשה שקילות של קטגוריות. מצד אחד נראה את המכפלה החפשית הפנימית $\circledast^{\mathcal{C}}_{t\in T} G_t$ כשלישיה $(T,G,\delta)$ שבה $T$ הוא מרחב פרו־סופי, $G$ הוא חבורה פרו־$\mathcal{C}$ ו $\delta\colon T \to \mathrm{Subgr}(G)$ העתקה והדרישות (1א)־(1ג) של סעיף "מכפלה חפשית פנימית" מתקיְמות עבור $G_t = \delta(t)$. מורפיזם $\alpha\colon \circledast^{\mathcal{C}}_{t\in T} G_t \to \circledast^{\mathcal{C}}_{t'\in T'} G_{t'}$ בין מכפלות חפשיות יהיה זוג המֻרכב מהומומורפיזם $\alpha\colon G \to G'$ של החבורות הפרו־$\mathcal{C}$ המתאימות והעתקה רציפה $\alpha\colon T \to T'$ של מרחבים פרו־סופיים כך שאם $t \in T$ ו $\alpha(t) = t'$, אזי $\alpha(G_t) \le G_{t'}$. מצד שני, אפשר להרחיב כל אֲלֻמה $(X,\tau,T)$ באפן יחיד (עד כדי איזומורפיזם טבעי) ל"אלֻמה מֻרחבת פרו־$\mathcal{C}$" $(X,\tau,T,\omega,G)$ שבה $(G,\omega)$ הנה המכפלה החפשית הפרו־$\mathcal{C}$ מעל $(X,\tau,T)$ ("משפטון קִיום ויחידות").

**משפטון שקילות:** *קַיֶמת שקילות* $(X,\tau,T,G,\omega) \rightsquigarrow G = \circledast^{\mathcal{C}}_{t\in T} G_t$ *בין קטגורית המכפלות החפשיות הפנימיות הפרו־*$\mathcal{C}$ *לקטגורית האלֻמות המֻרחבות הפרו־*$\mathcal{C}$ *המתחלפת עם גבולות הפוכים. בפרט, הגבול הֶהפוך של מכפלות חפשיות פנימיות הנו חבורה חפשית פרו־*$\mathcal{C}$ *פנימית.*

*הוכחה:* ההוכחה של למה "פנימית חיצונית" מתאימה למכפלה החפשית הפרו$\mathcal{C}$ הפנימית $G = \circledast^{\mathcal{C}}_{t\in T} G_t$ את האלֻמה המֻרחבת הפרו־$\mathcal{C}$ $(X,\tau,T,G,\omega)$ שבה $X = \{(g,t) \in G \times T \mid g \in G_t\}$, $\tau$ הנו ההטלה על המרכיב

השני ו $\omega$ הנו ההטלה על המרכיב הראשון. אם $G' = \coprod^{\mathcal{C}}_{t\in T'} G_{t'}$ הנו מכפלה חפשית פנימית נוספת ו $\alpha\colon G \to G'$ הנו מורפיזם של מכפלות פרו־$\mathcal{C}$ חפשיות פנימיות, אזי $\alpha(g) \in G_{\alpha(t)}$ לכל $t\in T$ ו $g \in G_t$. לכן, $\alpha$ משרה באפן יחיד העתקה רציפה $\alpha'$ מ $X$ לתוך $X' = \{(g',t') \in G\times T \mid g' \in G_{t'}\}$. לכן, $\alpha$ משרה באפן יחיד מורפיזם $\alpha'$ מהאלֻמה הפרו־$\mathcal{C}$ המֻרחבת $(X,\tau,T,\omega,G)$ לתוך האלֻמה הפרו־$\mathcal{C}$ המֻרחבת $(X',\tau',T',\omega',G')$. ואכן, לכל אבר ב $X$ הצורה $(g,t)$ באשר $g\in G$, $t\in T$ ו $g\in G_t$. נסמן $g' = \alpha(g)$ ו $t' = \alpha(t)$. אזי $(g',t') \in X'$ ונגדיר אפוא $\alpha'(g,t) = (g',t')$. כל סביבה של $(g',t')$ ב $X'$ מקיפה קבוצה מהצורה $U' = (g'N' \times T'_0) \cap X'$ שבה $N'$ היא תת חבורה נורמלית פתוחה ב $G'$ ו $T'_0$ היא סביבה פתוחה של $t'$ ב $T'$. נסמן $N = \alpha^{-1}(N')$ ו $T_0 = \alpha^{-1}(T'_0)$. אזי $U = (gN\times T_0)\cap X$ היא סביבה פתוחה של $(g,t)$ ב $X$ העוברת על ידי $\alpha'$ לתוך $U'$. לכן, $\alpha'$ אכן רציפה.

אם $\alpha$ הנו הזהות של מכפלה חפשית פנימית, אזי גם $\alpha'$ הנו הזהות. כמו כן, שומרת ההעתקה $\alpha \mapsto \alpha'$ על ההרכבה ולכן היא פונקטור קו־וריאנטי.

להפך, תהי $(X,\tau,T,\omega,G)$ אלֻמה פרו־$\mathcal{C}$ מֻרחבת. אזי, לפי "למה חיצונית־פנימית", קיָם איזומורפיזם טבעי $G = \coprod^{\mathcal{C}}_{t\in T} G_t$. לפי "למה תכונות"(ד), ההעתקה $\tau\times\omega$ מעתיקה את $X$ באֹפן הומאומורפי על הקבוצה $X' = \{(g,t) \in G\times T \mid g \in G_t\}$. לכן, הפונקטור $(X,\tau,T,\omega,G) \rightsquigarrow (X',\tau',T,\omega',G)$ שבה $\tau'$ ו $\omega'$ הם ההטלות המתאימות, מקטגורית האלֻמות הפרו־$\mathcal{C}$ המֻרחבות לתוך עצמה איזומורפי לפונקטור הזהות. בכוון ההפוך, אם נצא ממכפלה חפשית פרו־$\mathcal{C}$ פנימית, נעבר לאלֻמה הפרו־$\mathcal{C}$ המֻרחבת המתאימה נחזר למכפלה הפרו־$\mathcal{C}$ החפשית הפנימית שיצאנו ממנה. לכן, הפונקטורים הנם שקילויות בין הקטגוריות.

לבסוף נתבונן במערכת הפוכה $(G_i,\pi_{ji})_{i,j\in I}$ של מכפלות חפשיות פרו־$\mathcal{C}$ פנימיות $G_i = \coprod^{\mathcal{C}}_{t\in T_i} G_{i,t}$. לכל $i\in I$ יהי $X_i = \{(g,t) \in G_i\times T_i \mid g \in G_{i,t}\}$ ויהיו $\tau_i$ ו $\omega_i$ ההטלות המתאימות. תהי $\mathbf{X}_i = (X_i,\tau_i,T_i,\omega_i,G_i)$ האלֻמה המֻרחבת המתאימה. אזי $(\mathbf{X}_i,\pi_{ji})_{i,j\in I}$ שבה $\pi_{ji}$ הם ההרחבות הטבעיות של המורפיזמים הנתונים היא מערכת הפוכה של אלֻמות פרו־$\mathcal{C}$ מֻרחבות. יהי $\mathbf{X} = (X,\tau,T,\omega,G)$ הגבול של המערכת. לפי "למה חבורת גבול", $(\varprojlim G_i,\omega)$ הנה החבורה הפרו־$\mathcal{C}$ החפשית מעל $\mathbf{X}$. לכן, $G = \varprojlim G_i = \coprod^{\mathcal{C}}_{t\in T} G_t$. ∎

**משפטון גבול הפוך:** *יהי $G = \coprod^{\mathcal{C}}_{t\in T} G_t$ מכפלה פרו־$\mathcal{C}$ חפשית מעל מרחב פרו־סופי $T$. אזי, $G \cong \varprojlim G_i$ הנו גבול הפוך של מכפלות פרו־$\mathcal{C}$ חפשיות. $G_i = \coprod^{\mathcal{C}}_{t_i\in T_i} G_{t_i}$ מעל מרחבים סופיים בדידים $T_i$, יתר על כן, אם $t\in T$ ו $t = \varprojlim t_i$, אזי $G_t = \varprojlim G_i$.*

*הוכחה:* בתור מרחב פרו־סופי $T$ הנו גבול הפוך של מערכת הפוכה $(T_i,\pi_{ji})_{i,j\in I}$ של מרחבים סופיים בדידים $T_i$ שבו כל אחת מההעתקות $\pi_{ij}$ הנה על. לכל $i \in I$ נסמן ב $\pi_i\colon T\to T_i$ את ההטלה על המרכיב ה $i$־י. אזי, $T = \bigcup_{t_i\in T_i} \pi_i^{-1}(t_i)$ הנו חלֻקה לקבוצות פתוחות־סגורות. לפי "למה חלקה", $G = \coprod^{\mathcal{C}}_{t_i\in T_i} G(\pi_i^{-1}(t_i))$.

באשר, $G(\pi_i^{-1}(t_i)) = \langle G_t \mid t\in\pi_i^{-1}(t_i)\rangle$.

אם $i \ge j$ ו $\pi_{ji}(t_j) = t_i$, אזי $G(\pi_j^{-1}(t_j)) \subseteq G(\pi_i^{-1}(t_i))$. נגדיר אפוא את

$$\pi_{ji}\colon G(\pi_j^{-1}(t_j)) \to G(\pi_i^{-1}(t_i))$$

כהעתקת השִכון. מ"למת חבורת הגבול" נובע ש $G = \varprojlim \coprod^{\mathcal{C}}_{t_i\in T_i} G(\pi_i^{-1}(t_i))$. ההעתקה של $G$ למרכיב ה $i$־י הנה הזהות.

לבסוף, יהי $t = \varprojlim t_i$. אזי, $\varprojlim G(\pi_i^{-1}(t_i)) = \bigcap_{i\in I} G(\pi_i^{-1}(t_i))$. כדי להוכיח ש $G_t = \varprojlim G(\pi_i^{-1}(t_i))$ נתבונן ב $g \in G \smallsetminus G_t$. נבחר תת חבורה פתוחה $H$ של $G$ המקיפה את $G_t$ ואינה מכילה את $g$. לפי (או) של סעיף "מכפלה חפשית פנימית", הקבוצה $\{s\in T \mid G_s \le H\}$ היא סביבה פתוחה של $t$ ב $T$. סביבה זו מקיפה תת קבוצה פתוחה־סגורה $S$ המכילה את $t$. לכן, קיָם $i\in I$ כך ש $\pi_i^{-1}(t_i) \subseteq S$. עבורו מתקיֵם, $G(\pi_i^{-1}(t_i)) \le H$. לכן, $g \notin G(\pi_i^{-1}(t_i))$. לכן, $G_t = \bigcap_{i\in I} G(\pi_i^{-1}(t_i))$, כנדרש. ∎

*הערה הכללה:* יהי $t\in T$ ב"משפטון גבול הפוך". אזי $\{t\}$ הנו החתוך של כל הקבוצות הפתוחות־סגורות $U$ של $T$ המכילות את $t$. החלק האחרון של הוכחת "משפטון גבול הפוך" מוכיח ש $G_t = \bigcap_U G(U)$. זהו מקרה פרטי של "משפט החתוך" בסעיף הבא. ∎

*הערה גבול חלֻקות:* נתבונן במקרה הפרטי של "משפטון גבול הפוך" (למעשה של הוכחת המשפטון) שבו $\mathbb{U}$ הנו אֹסף כל החלֻקות של $T$ לקבוצות פתוחות־סגורות. הואיל ו $T$ דחוס, כל $\mathcal{U}\in\mathbb{U}$ הנה קבוצה סופית. נגדיר יחס סדר חלקי על $\mathbb{U}$ על ידי שנקבע ש $\mathcal{U}' \ge \mathcal{U}$ אם $\mathcal{U}'$ **עדינה** מ $\mathcal{U}$. במלים אחרות, כל $U'\in\mathcal{U}'$ מוכלת באיזו שהיא $U\in\mathcal{U}$. בפרט $|\mathcal{U}'| \ge |\mathcal{U}|$. ההעתקה $\pi_{\mathcal{U}',\mathcal{U}}$ מ $\mathcal{U}'$ ל $\mathcal{U}$ תתאים לכל $U'\in\mathcal{U}'$ את הקבוצה היחידה $U\in\mathcal{U}$ המקיפה את $U'$. המרחב $T$ איזומורפי לגבול ההפוך $\varprojlim \mathcal{U}$. באיזומורפיזם זה עובר כל $t\in T$ למערכת $(U_{t,\mathcal{U}})_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}}$, באשר $U_{t,\mathcal{U}}$ הנה הקבוצה היחידה ב $\mathcal{U}$ המכילה את $t$. הפעלת הוכחת "משפטון גבול הפוך" למקרה זה נותנת ש

$$G = \varprojlim_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}} \coprod^{*}_{U\in\mathcal{U}} G(U). \quad ∎$$

## תכונות של מכפלות חפשיות פנימיות

נשתמש ב"משפטון השקילות" כדי להוכיח תכונות של מכפלות חפשיות פנימיות.

**למה הרחבה פנימית:** *יהי* $G = \coprod^{\mathcal{C}}_{t \in T} G_t$ *מכפלה חפשית ויהיו* $r, s \in T$ *שונים זה מזה. אזי כל הומומרפיזם* $\alpha_s\colon G_s \to A$ *נִתן להרחבה להומומורפיזם* $\alpha\colon G \to A$ *כך ש* $\alpha(G_r) = 1$.

*הוכחה:* לפי "למה פנימית־חיצונית" קיֶמת אלֻמה $\mathbf{X} = (X, \tau, T)$ ומורפיזם $\omega\colon X \to G$ כך ש $(G, \omega)$ הנה המכפלה הפרו־$\mathcal{C}$ החפשית מעל $\mathbf{X}$. "למה הרחבה" מאפשרת להרחיב את ההומורפיזם $\alpha_s \circ \omega\colon X_s \to A$ למורפיזם $\alpha'\colon X \to A$ כך ש $\alpha'(X_r) = 1$. יהי $\alpha\colon G \to A$ ההומומורפיזם היחיד המקיֵם $\alpha \circ \omega = \alpha'$. הואיל ו $\omega$ מעתיק את $X_r$ ו $X_s$ באפן איזומורפי על $G_r$ ו $G_s$ בהתאמה, יש ל $\alpha$ התכונות הנדרשות. ∎

**למה סגורה:** *כל תת קבוצה סגורה* $S$ *של מרחב פרו־סופי* $T$ *הנה חתוך של תת קבוצות פתוחות־סגורות של* $T$.

*הוכחה:* תהי $t \in T \smallsetminus S$. לכל $s \in S$ קיֶמת סביבה פתוחה־סגורה $U_{ts}$ שאינה מכילה את $t$. אֹסף הקבוצות $U_{ts}$ באשר $s$ עובר על כל אברי $S$ מכסה את $S$. הואיל ו $S$ דחוסה, אסף חלקי סופי מכסה את $S$. אחוד הקבוצות באסף החלקי הנו תת קבוצה פתוחה־סגורה $V_t$ של $T$ המקיפה את $S$ ואינה מכילה את $t$. לכן, $S = \bigcap_{t \in T \smallsetminus S} V_t$ כנדרש. ∎

נזכיר שאם $G = \coprod^{\mathcal{C}}_{t \in T} G_t$ הוא מכפלה חפשית ו $S$ הוא תת קבוצה סגורה של $T$, אזי $G(S)$ מסמן את תת החבורה $\langle G_s \mid s \in S \rangle$.

**למה סגורה - מכפלה חפשית:** *יהיו* $G = \coprod^{\mathcal{C}}_{t \in T} G_t$ *מכפלה חפשית,* $S$ *תת קבוצה סגורה של* $T$ *אזי* $G(S) = \coprod^{\mathcal{C}}_{s \in S} G_s$*. יתר על כן, אם* $\mathcal{T} = \{T_i \mid i \in I\}$ *היא משפחה של קבוצות פתוחות־סגורות של* $T$ *הסגורה תחת חתוכים סופיים כך ש* $S = \bigcap_{i \in I} T_i$*, אזי* $G(S) = \bigcap_{i \in I} G(T_i)$.

*הוכחה:* נניח תחילה ש $S$ פתוחה־סגורה. אזי $T = S \mathbin{\dot\cup} (T \smallsetminus S)$ הנו חלֻקה של $T$ לקבוצות פתוחות־סגורות. בפרט, לפי "למה חלקה", $G(S) = \coprod^{\mathcal{C}}_{t \in S} G_t$.

במקרה הכללי נותנת "למה סגורה" משפחה $\mathcal{T} = \{T_i \mid i \in I\}$ של קבוצות פתוחות־סגורות שחתוכן שוה ל $S$. החתוך של מספר סופי של קבוצות פתוחות־סגורות ב $T$ הנו שוב פתוח־סגור. לכן, בלי הגבלת הכלליות נוכח להניח שהמשפחה $\mathcal{T}$ סגורה תחת חתוכים סופיים.

נניח עתה ש $\mathcal{T}$ היא משפחה כלשהיא כנאמר בחלק השני של הלמה. נסדר את $I$ באפן חלקי כך ש $i \le j$ אם $T_j \subseteq T_i$. במקרה זה נגדיר את ההעתקות $\pi_{ji}\colon T_j \to T_i$ ו $\pi_{ji}\colon G(T_j) \to G(T_i)$ כהכלות. בפרט, אם $t \in T_j$, אזי $\pi_{ji}\colon G_t \to G_t$ הנה העתקת הזהות. כמו כן, $\bigcap_{i \in I} G(T_i) = \varprojlim G(T_i)$.

לפי "משפטון שקילות", $\varprojlim G(T_i) = \coprod^{\mathcal{C}}_{s \in S} G'_s$, באשר $G'_s = \varprojlim G_s = G_s$ לכל $s \in S$. לכן, $\bigcap_{i \in I} G(T_i) = \coprod^{\mathcal{C}}_{s \in S} G_s$. במלים אחרות, זהינו את $\coprod^{\mathcal{C}}_{s \in S} G_s$ עם תת חבורה סגורה של $G$ כך ש $G_s$ מזֻהה

עם עצמו לכל $s \in S$. לפי "למה יצירה", $\coprod_{s\in S}^{\mathcal{C}} G_s$ נוצרת על ידי תת החבורות שלה $G_s$ באשר $s \in S$. לכן, $G(S) = \coprod_{s\in S}^{\mathcal{C}} G_s$ ו $G(S) = \bigcap_{i\in I} G(T_i)$. ∎

**למה שלישיה:** *יהיו $A, B, C$ חבורות פרו־$\mathcal{C}$. בעזרת "למה סגורה" נראה חבורות אלו ואת המכפלות הפרו־$\mathcal{C}$ החפשיות $A *_{\mathcal{C}} B$ ו $B *_{\mathcal{C}} C$ כחבורות חלקיות של המכפלה הפרו־$\mathcal{C}$ החפשית $A *_{\mathcal{C}} B *_{\mathcal{C}} C$. אזי, $(A *_{\mathcal{C}} B) \cap (B *_{\mathcal{C}} C) = B$.*

*הוכחה:* מספיק להוכיח ש $(A *_{\mathcal{C}} B) \cap (B *_{\mathcal{C}} C) \subseteq B$. לשם כך נתבונן בהומומורפיזם $\varphi\colon A *_{\mathcal{C}} B *_{\mathcal{C}} C \to A *_{\mathcal{C}} B *_{\mathcal{C}} C$ שצמצומיו ל $A$ ול $B$ הן העתקות הזהות ושצמצומו ל $C$ הנה ההעתקה הטריביאלית. אזי $\varphi$ מעתיק את $A *_{\mathcal{C}} B$ באפן זהותי על עצמו. בפרט, אם $g \in (A *_{\mathcal{C}} B) \cap (B *_{\mathcal{C}} C)$, אזי $g \in A *_{\mathcal{C}} B$ ולכן, $\varphi(g) = g$. מצד שני $g \in B *_{\mathcal{C}} C$ ו $\varphi$ מעתיק את $B *_{\mathcal{C}} C$ על $B$. לכן, $\varphi(g) \in B$. מכאן נובע ש $g \in B$. לכן, $(A *_{\mathcal{C}} B) \cap (B *_{\mathcal{C}} C) \subseteq B$. ∎

**למה חתוך סופי:** *יהיו $G = \coprod_{t\in T} G_t$ מכפלה חפשית ו $U_1, \ldots, U_n$ קבוצות פתוחות־סגורות של $T$. אזי $\bigcap_{i=1}^{n} G(U_i) = G(\bigcap_{i=1}^{n} U_i)$.*

*הוכחה:* אנדוקציה על $n$ מוכיחה שמספיק להוכיח את המשפט עבור $n = 2$. לשם כך נתבונן בחֲלֻקות הבאות לקבוצות־סגורות פתוחות:

$$U_1 = (U_1 \smallsetminus U_2) \mathbin{\dot\cup} (U_1 \cap U_2)$$
$$U_2 = (U_1 \cap U_2) \mathbin{\dot\cup} (U_2 \smallsetminus U_1)$$
$$U_1 \cup U_2 = (U_1 \smallsetminus U_2) \mathbin{\dot\cup} (U_1 \cap U_2) \mathbin{\dot\cup} (U_2 \smallsetminus U_1).$$

לפי "למה חלקה"

$$G(U_1) = G(U_1 \smallsetminus U_2) *_{\mathcal{C}} G(U_1 \cap U_2)$$
$$G(U_2) = G(U_1 \cap U_2) *_{\mathcal{C}} G(U_2 \smallsetminus U_1)$$
$$G(U_1 \cup U_2) = G(U_1 \smallsetminus U_2) *_{\mathcal{C}} G(U_1 \cap U_2) *_{\mathcal{C}} G(U_2 \smallsetminus U_1).$$

לכן, לפי "למה שלישיה",

$$\begin{aligned} G(U_1) \cap G(U_2) &= \big(G(U_1 \smallsetminus U_2) *_{\mathcal{C}} G(U_1 \cap U_2)\big) \cap \big(G(U_1 \cap U_2) *_{\mathcal{C}} G(U_2 \smallsetminus U_1)\big) \\ &= G(U_1 \cap U_2) \end{aligned}$$

כפי שהיה להוכיח. ∎

**משפטון החתוך:** *יהיו* $G = \prod^{\mathcal{C}}_{*\, t\in T} G_t$ *מכפלה פרו־$\mathcal{C}$ חפשית ו* $\{S_i \mid i \in I\}$ *אסף של קבוצות סגורות ב* $T$*. נסמן* $S = \bigcap_{i\in I} S_i$*. אזי* $G(S) = \bigcap_{i\in I} G(S_i)$.

*הוכחה:* לכל $i \in I$ נסמן ב $\mathcal{U}_i$ את אסף כל הקבוצות הפתוחות־סגורות ב $T$ המקיפות את $S_i$. נסמן ב $\mathcal{W}$ את אסף החתוכים $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ שבהם $U_1, \ldots, U_n \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$. לפי "למה סגורה ־ מכפלה חפשית" $G(S_i) = \bigcap_{U\in\mathcal{U}_i} G(U)$ לכל $i \in I$ ו $G(S) = \bigcap_{W\in\mathcal{W}} G(W)$. מ"למה חתוך סופי" נובע שאם $W = U_1 \cap \cdots U_n$ ו $U_1, \ldots, U_n \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$, אזי $G(W) = G(U_1) \cap \cdots \cap G(U_n)$. לכן,

$$G(S) = \bigcap_{W\in\mathcal{W}} G(W) = \bigcap_{i\in I} \bigcap_{U\in\mathcal{U}_i} G(U) = \bigcap_{i\in I} G(S_i),$$

כפי שהיה להראות. ∎

**כלל הצרוף:** *תהי* $G = \prod^{\mathcal{C}}_{*\, t\in T} G_t$ *מכפלה פרו־$\mathcal{C}$ חפשית ותהי* $\delta\colon T \to S$ *העְתקה רציפה על של מרחבים פרו־סופיים. אזי,* $G = \prod^{\mathcal{C}}_{*\, s\in S} G(\delta^{-1}(s))$.

*הוכחה:* נציג את $S$ כגבול הפוך $S = \varprojlim R_i$ של מערכת הפוכה $(R_i, \pi_{ji})_{j,i\in I}$ של מרחבים סופיים בדידים. לכל $i \in I$ מתקיֵם, $T = \dot\bigcup_{r_i\in R_i} \delta^{-1}(\pi_i^{-1}(r_i))$. לכן, לפי "למה חלקה",

$$G = \prod^{\mathcal{C}}_{*\, r_i\in R_i} G(\delta^{-1}(\pi_i^{-1}(r_i))). \tag{1}$$

כאשר $i$ עובר על אברי $I$, עוברים האגפים הימניים של (1) על מערכת הפוכה של חבורות שבה ההומומורפיזמים המקשרים הם הכלות. לפי "משפטון שקילות" מקבלים בגבול

$$G = \prod^{\mathcal{C}}_{*\, s\in S} \varprojlim G(\delta^{-1}(\pi_i^{-1}(\pi_i(s)))) \tag{2}$$

הואיל וההומומורפיזמים המקשרים הם הכלות והואיל ו $\bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(\pi_i(s)) = \{s\}$ לכל $s \in S$, מקבלים לפי "משפטון החתוך" שלכל $s \in S$ מתקיֵם

$$\begin{aligned}
\varprojlim G(\delta^{-1}(\pi_i^{-1}(\pi_i(s))) &= \bigcap_{i\in I} G(\delta^{-1}(\pi_i^{-1}(\pi_i(s))) \\
&= G\big(\bigcap_{i\in I} \delta^{-1}(\pi_i^{-1}(\pi_i(s)))\big) \\
&= G\big(\delta^{-1}\big(\bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(\pi_i(s))\big)\big) \\
&= G(\delta^{-1}(s))
\end{aligned}$$

לכן, לפי (2), $G = \mathop{\bar{\ast}}\nolimits^{\mathcal{C}}_{s\in S} G(\delta^{-1}(s))$. ∎

יהי $G$ חבורה פרו־סופית, יהי $T$ קבוצה ולכל $t \in T$ יהי $G_t$ תת חבורה סגורה של $G$. נסמן ב $[G_t \mid t \in T]$ את תת החבורה הנורמלית הסגורה של $G$ הנוצרת על ידי כל החבורות $G_t$, $t \in T$.

**למה חבורה חלקית:** *יהי $G = \mathop{\bar{\ast}}\nolimits^{\mathcal{C}}_{t\in T} G_t$ מכפלה פרו־$\mathcal{C}$ חפשית. לכל $t \in T$ תהי $H_t$ תת חבורה סגורה של $G_t$ כך ש $\bigcup_{t\in T} H_t$ סגור ב $G$.*

(א) *נסמן $H = \langle H_t \mid t \in T\rangle$. אזי $H \cap G_t = H_t$ לכל $t \in T$.*

(ב) *אם $G_t \triangleleft H_t$ לכל $t \in T$, נסמן $H = [H_t \mid t \in T]$. אזי $H \cap G_t = H_t$ לכל $t \in T$.*

*הוכחה:* "למה פנימית־חיצונית" נותנת אֲלֻמה $\mathbf{X} = (X, \tau, T)$ ומורפיזם $\omega\colon X \to G$ כך ש $(G, \omega)$ הנה המכפלה החפשית מעל $\mathbf{X}$ ו $G_t = \omega(X_t)$, באשר $X_t = \tau^{-1}(t)$ לכל $t \in T$. בפרט, $\omega(X) = \bigcup_{t\in T} G_t$. מכאן שהקבוצה $Y = \omega^{-1}(\bigcup_{t\in T} H_t)$ סגורה ב $X$ ולכן הִנה מרחב פרו־סופי.

יהי עתה $t \in T$ מספיק שנוכיח שאם $g \in G_t \smallsetminus H_t$, אזי $g \notin H$. לצרך זה ונסמן $Y_t = X_t \cap Y$. לפי "למה תכונות" מעתיק $\omega$ את $X_t$ באפן איזומורפי על $G_t$. לכן, $\omega$ מעתיק את $Y_t$ באפן איזומורפי על $H_t$.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[rr, "\omega"] \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] & & \bigcup_{t\in T} G_t \arrow[r, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] & G \arrow[dd, dash] \\
X_t \arrow[rr] \arrow[dd, dash] & & G_t \arrow[dd, dash] & & \\
& Y \arrow[rr, dash] \arrow[dl, dash] & & \bigcup_{t\in T} H_t \arrow[r, dash] \arrow[dl, dash] & H \\
Y_t \arrow[rr] & & H_t & &
\end{tikzcd}$$

יהי $x \in X_t$ האבר היחיד המקיֵם $\omega(x) = g$. אזי $x \in X_t \smallsetminus Y_t$. לכן קיָם הומומורפיזם $\psi_t$ של $X_t$ על חבורה סופית $C$ כך ש $\psi_t(x) \notin B$, באשר $B = \psi_t(Y_t)$. אם $H_t \triangleleft G_t$, אזי $B \triangleleft C$. "למה הרחבה" מאפשרת להרחיב את $\psi_t$ למורפיזם $\psi\colon X \to C$. בפרט, $\psi(x) \notin B$, $\psi(Y_t) = B$ ו $\psi^{-1}(B)$ הוא תת קבוצה פתוחה של $X$. נסמן $S = \{s \in T \mid Y_s \subseteq \psi^{-1}(B)\}$. אזי, $t \in S$ ו $T \smallsetminus S = \tau(X \smallsetminus \psi^{-1}(B))$. הואיל ו $\tau$ רציף, $T \smallsetminus S$ סגור ב $T$ ולכן, $S$ פתוח ב $T$. מכאן שקיֶמת תת קבוצה פתוחה־סגורה $V$ של $T$ המכילה את $t$ ומוכלת ב $S$. נוכל אפוא להגדיר מורפיזם $\gamma\colon X \to C$ על ידי $\gamma(z) = \psi(z)$ לכל $z \in \tau^{-1}(V)$ ו $\gamma(z) = 1$ לכל $z \in \tau^{-1}(T \smallsetminus V)$. בפרט, $\gamma(x) = \psi(x)$, כי $\tau(x) = t \in V$. יהי $\varphi\colon G \to C$ הומומורפיזם כך ש $\gamma = \varphi \circ \omega$. אזי, $\varphi(H_s) = \varphi(\omega(Y_s)) = \gamma(Y_s) \subseteq B$ לכל $s \in T$. אם $H_s \triangleleft G_s$ לכל

$s \in T$ ו $H = [H_s \mid s \in T]$, אזי $B \lhd C$. בשני המקרים, $\varphi(H) \leq B$. אלו היה $g \in H$, היינו מקבלים $\psi(x) = \gamma(x) = \varphi(\omega(x)) = \varphi(g) \in B$, בנגוד לאמור לעיל. סתירה זו אומרת ש $g \notin H$, כנדרש. ∎

**משפטון מנה א:** *תהי $G = \mathop{\ast}_{t\in T}^{\mathcal{C}} G_t$ מכפלה פרו־$\mathcal{C}$ חפשית. לכל $t \in T$ תהי $N_t$ תת חבורה נורמלית סגורה של $G_t$. נניח ש $\bigcup_{t\in T} N_t$ סגור ב $G$. נסמן $N = [N_t \mid t \in T]$. אזי $G/N = \mathop{\ast}_{t\in T} G_t N/N$.*

*הוכחה:* עינו להוכיח את התכונות (1א), (1ב) ו (1ג) של של סעיף "מכפלה חפשית פנימית".

**הוכחת (1א):** ההעתקה $HN/N \mapsto H$ של $\mathrm{Subgr}(G)$ לתוך $\mathrm{Subgr}(G/N)$ הנה רציפה בְּקַפִּידה ובפרט בפרישׂות. הואיל וההעתקה $t \mapsto G_t$ של $T$ לתוך $\mathrm{Subgr}(G)$ רציפה בפרישות (תכונה (1א) בסעיף "מכפלה פנימית חפשית"), גם ההעתקה $t \mapsto G_t/N_t$ של $T$ לתוך $\mathrm{Subgr}(G/N)$ רציפה בפרישות.

**הוכחת (1ב):** יהיו $s, t \in T$ שונים. כדי להוכיח ש $G_s N/N \cap G_t N/N = 1$ מספיק להתבונן באבר $g \in G_s \smallsetminus N$, ולהוכיח ש $g \notin G_t N$. לשם כך נבחר חֲלֻקה $T = T_s \cup T_t$ של $T$ לקבוצות פתוחות־סגורות כך ש $s \in T_s$ ו $t \in T_t$. לפי "למה חלקה", $G = G(T_s) *_{\mathcal{C}} G(T_t)$. נתבונן בהומומורפיזם $\alpha\colon G \to G(T_s)/G(T_s) \cap N$ המֻגדר על $G(T_s)$ כהעתקת המנה ועל $G(T_t)$ כהעתקה הטריביאלית. אם $r \in T$, $N_r \leq G(T_s) \cap N$ במקרה שבו $r \in T_s$ ו $N_r \leq G(T_t)$ במקרה שבו $r \in T_t$. בכל מקרה $\alpha(N_r) = 1$. לכן, $\alpha(N) = 1$. בנוסף, $\alpha(G_t) = 1$, כי $G_t \leq G(T_t)$. לכן, $\alpha(G_t N) = 1$. מאידך, $\alpha(g) \neq 1$, כי $g \in G(T_s) \smallsetminus G(T_s) \cap N$. לכן, $g \notin G_t N$, כפי שהיה להוכיח.

**הוכחת (1ג):** נסמן ב $\pi\colon G \to G/N$ את העתקת המנה. יהי $\gamma_0\colon \bigcup_{t\in T} G_t N/N \to A$ מורפיזם לתוך חבורה פרו־סופית $A$. אזי, $\gamma_0 \circ \pi\colon \bigcup_{t\in T} G_t \to A$ הנו מורפיזם הנִתן להרחבה להומומורפיזם $\tilde{\gamma}\colon G \to A$. לכל $t \in T$ מתקיֵם $\tilde{\gamma}(N_t) = \gamma_0(\pi(N_t)) = \gamma_0(1) = 1$. לכן, $\tilde{\gamma}(N) = 1$. מכאן ש $\tilde{\gamma}$ מתפרק בצורה $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \pi$, באשר $\gamma\colon G/N \to A$ הנו הומומורפיזם. מהבניה עולה ש $\gamma$ מרחיב את $\gamma_0$.

אם $\gamma'\colon G/N \to A$ הנו הומומורפיזם נוסף המרחיב את $\gamma_0$, אזי $\gamma' \circ \pi$ מרחיב את $\gamma_0 \circ \pi$ על $\bigcup_{t\in T} G_t$. לכן, $\gamma \circ \pi = \gamma' \circ \pi$. הואיל ו $\pi$ על, $\gamma = \gamma'$, כנדרש. ∎

**משפטון מנה ב:** *יהיו $G = \mathop{\ast}_{t\in T}^{\mathcal{C}} G_t$ מכפלה פרו־$\mathcal{C}$ חפשית ו $N$ תת חבורה נורמלית סגורה של $G$. לכל $t \in T$ נסמן $N_t = G_t \cap N$. אזי $G/N = \mathop{\ast}_{t\in T}^{\mathcal{C}} G_t N/N$ אם ורק אם $N = [N_t \mid t \in T]$.*

*הוכחה:* נניח קודם ש $N = [N_t \mid t \in T]$. לפי "למה גיל־מור", הקבוצה $\bigcup_{t\in T} G_t$ סגורה ב $G$. לכן הקבוצה $\bigcup_{t\in T} N_t = \bigcup_{t\in T}(G_t \cap N) = \left(\bigcup_{t\in T} G_t\right) \cap N$ סגורה ב $G$. לפי "משפטון מנה א", $G/N = \mathop{\ast}_{t\in T}^{\mathcal{C}} G_t N/N$.

להפך, נניח ש $G/N = \mathop{\ast}_{t\in T}^{\mathcal{C}} G_t N/N$. נסמן $N_0 = [N_t \mid t \in T]$. אזי $N_0$ הוא תת חבורה נורמלית סגורה של $G$ המוכלת ב $N$. בפרט, $G_t \cap N_0 = N_t$ לכל $t \in T$. לפי החלק של המשפטון

שהוכח כבר, $G/N_0 = \mathop{\prod\!\!\!\!\!\!*\;}\nolimits^{\mathcal{C}}_{t\in T} G_tN_0/N_0$. בפרט, לפי "למה גיל־מור", תת הקבוצה $\bigcup_{t\in T} G_tN_0/N_0$ של $G/N_0$ סגורה. נתבונן עתה בהעתקת המנה $\pi\colon G/N_0 \to G/N$. נסמן את צמצומה ל $\bigcup_{t\in T} G_tN_0/N_0$ ב $\pi_0$. אזי $\pi_0\colon \bigcup_{t\in T} G_tN_0/N_0 \to \bigcup_{t\in T} G_tN/N$ חד חד ערכי ועל. הואיל ו $\pi$ העתקה סגורה והקבוצה $\bigcup_{t\in T} G_tN_0/N_0$ סגורה, $\pi_0$ הנו הומאומורפיזם. בפרט, $\pi_0^{-1}$ גם הוא הומאומורפיזם שצמצומו לכל $G_tN/N$ הנו איזומורפיזם של חבורות פרו־סופיות. מתכונה (1ג) בסעיף "מכפלה חפשית פנימית" נובע שנתן להרחיב את $\pi_0^{-1}$ להומומורפיזם $\pi'\colon G/N \to G/N_0$. נתבונן בהומומורפיזם $\pi' \circ \pi\colon G/N_0 \to G/N_0$. צמצומו ל $\bigcup_{t\in T} G_tN_0/N_0$ הנו הזהות. לכן, מיחידות ההרחבה ב (1ג) של סעיף "מכפלה חפשית פנימית" נובע ש $\pi' \circ \pi = \mathrm{id}_{G/N_0}$. בפרט, $\mathrm{Ker}(\pi) = 1$. לכן, $N = N_0 = [N_t \mid t \in T]$. ∎

בסעיף זה נתבונן בתצורות כמעט מלאות $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ ונטפל בקשר בין מכפלות פרו־$\mathcal{C}$ חפשיות לבין מכפלות פרו־$\mathcal{B}$ חפשיות.

לכל חבורה פרו־סופית $G$ נסמן ב $N_{\mathcal{B}}(G)$ את החתוך של כל תת החבורות הנורמליות הפתוחות $M$ של $G$ שעבורן $G/M \in \mathcal{B}$. מתכונות התצורה נובע ש $G/N_{\mathcal{B}}(G)$ היא חבורה פרו־$\mathcal{B}$. יתר על כן, אם $\varphi$ הנו אפימורפיזם של $G$ על חבורה פרו־$\mathcal{B}$ $H$, אזי $N_{\mathcal{B}}(G) \le \mathrm{Ker}(\varphi)$ ולכן קיָם אפימורפיזם $\bar{\varphi}\colon G/N \to H$ כך ש $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$, באשר $\pi\colon G \to G/N$ הנו העתקת המנה.

**למה מנה פרו־$\mathcal{B}$:** *תהי ו $G = \coprod_{t\in T}^{\mathcal{C}} G_t$ מכפלה פרו־$\mathcal{C}$ חפשית. נסמן $N = N_{\mathcal{B}}(G)$ ולכל $t \in T$ נסמן $N_t = N_{\mathcal{B}}(G_t)$. אזי,*

(א) *יהיו $r, s \in T$, $r \ne s$. אזי כל אפימורפיזם $\gamma_s\colon G_sN/N \to B$ על חבורת־$\mathcal{B}$ נתן להרחבה להומומורפיזם $\gamma\colon G/N \to B$ כך ש $\gamma(G_rN/N) = 1$.*

(ב) *$G_t \cap N = N_t$ לכל $t \in T$.*

(ג) *$G/N = \coprod_{t\in T}^{\mathcal{B}} G_tN/N$.*

*הוכחת א:* יהיו $\pi_s\colon G_s \to G_sN/N$ ו $\pi\colon G \to G/N$ העתקות המנה. לפי "למה הרחבה פנימית" נתן להרחיב את ההעתקה $\gamma_s \circ \pi_s\colon G_s \to B$ לאפימורפיזם $\tilde{\gamma}\colon G \to B$ כך ש $\tilde{\gamma}(G_r) = 1$. הואיל ו $B \in \mathcal{B}$ מתקיֵם $\tilde{\gamma}(N) = 1$. לכן, קיָם הומומורפיזם $\gamma\colon G/N \to B$ כך ש $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \pi$. הומומורפיזם זה מרחיב את $\gamma_s$ ומקיֵם $\gamma(G_rN/N) = 1$, כנִדרש.

*הוכחת ב:* אם $M$ הוא תת חבורה נורמלית של $G$ כך ש $G/M \in \mathcal{B}$, אזי $G_tM/M$ בתור חבורה חלקית של $G/M$ שיָכת ל $\mathcal{B}$. מהאיזומורפיזם, $G_tM/M \cong G_t/G \cap M$ נובע ש $G_t/G_t \cap M \in \mathcal{B}$. לכן, $N_t \le G \cap M \le M$. אם נקח את החתוך על כל ה $M$־ים האפשריים, נקבל ש $N_t \le N$.

להפך, תהי $L$ תת חבורה נורמלית פתוחה של $G_t$ כך ש $G_t/L \in \mathcal{B}$. לפי "למה הרחבה פנימית" נִתן להרחיב את העתקת המנה $\pi_t\colon G_t \to G_t/L$ לאפימורפיזם $\pi\colon G \to G_t/L$. הגרעין $M = \mathrm{Ker}(\pi)$ יקיֵם $G/M \in \mathcal{B}$ ו $G_t \cap M = L$. לכן, $N \subseteq M$ ו $G_t \cap N \le G_t \cap M = L$. אם נִתן ל $L$ לעבֹר על כל תת החבורות מהצורה הנ"ל, נקבל ש $G_t \cap N \le N_t$. צרוף של מסקנה זאת למסקנה של הפסקה הקודמת נותן ש $G_t \cap N = N_t$.

הוכחת ג: לכל $t \in T$, $G_tN/N$ בתור תת חבורה של $G/N$ הנה חבורת פרו־$\mathcal{B}$. שאסף החבורות האלו מקיֵם את התנאים (1א), (1ב) ו (1ג) של הסעיף "מכפלה חפשית פנימית" ביחס לתצורה $\mathcal{B}$.

כדי להוכיח את תנאי (1א) של הסעיף "מכפלה חפשית פנימית" נזכֹר קודם שההעתקה $T \to \mathrm{Subgr}(G)$ הנִתנת על ידי $t \mapsto G_t$ רציפה בפרישות. ההעתקה $\mathrm{Subgr}(G) \to \mathrm{Subgr}(G/N)$ הנִתנת על ידי $H \to HN/N$

רציפה (אפִלו בקפידה). לכן, צרוף שתי ההעתקות הנו העתקה רציפה בפרישות $T \to \mathrm{Subgr}(G/N)$ המֻגדרת על ידי $t \to G_tN/N$, כנדרש.

יהיו עתה $r, s \in T$, $r \neq s$. נניח בשלילה שקיָם $\bar{g} \in G_rN/N \cap G_sN/N$ כך ש $\bar{g} \neq 1$. לכן, קיָם אפימורפיזם $\gamma_s\colon G_sN/N \to B$ על חבורת־$\mathcal{B}$ כך ש $\gamma_s(\bar{g}) \neq 1$. לפי (א) קיָם הומומורפיזם $\gamma\colon G/N \to B$ המרחיב את $\gamma_s$ ומקיֵם $\gamma(G_rN/N) = 1$. בפרט, $\gamma(\bar{g}) = 1$. מצד שני, $\gamma(\bar{g}) = \gamma_s(\bar{g}) \neq 1$. סתירה זו מוכיחה ש $G_rN/N \cap G_sN/N = 1$ כנדרש.

ההוכחה של (1ג) של הסעיף "מכפלה חפשית פנימית" דומה להוכחת (1ב): יהי $\gamma_0\colon \bigcup_{t\in T} G_tN/N \to B$ מורפיזם. תהי $\pi\colon G \to G/N$ העתקת המנה. אזי הצמצום של $\gamma_0 \circ \pi$ ל $\bigcup_{t\in T} G_t$ הנו מורפיזם שנסמנו ל $\tilde{\gamma}_0$. מורפיזם זה נִתן להרחבה באפן יחיד להומומורפיזם $\tilde{\gamma}\colon G \to B$ המעתיק את $N$ ל 1. לכן, קיָם אפימורפיזם $\gamma\colon G/N \to B$ כך ש $\gamma \circ \pi = \tilde{\gamma}$. הצמצום של $\gamma$ ל $\bigcup_{t\in T} G_tN/N$ הנו ההרחבה המבֻקשת של $\gamma_0$. היחידות של $\gamma$ נובעת מהיחידות של $\tilde{\gamma}$.

מכל זה עולה ש $G/N = \mathop{\ast\!\!\prod}_{t\in T}^{\mathcal{B}} G_tN/N$. ∎

הלמה הבאה תראה שכל מכפלה פרו־$\mathcal{B}$ חפשית הנה מנה של מכפלה פרו־$\mathcal{C}$ חפשית כפי שחלק (ג) של "למה מנה פרו־$\mathcal{B}$" מציג.

**למה השואה:** *לכל מכפלה פרו־$\mathcal{B}$ חפשית $G_{\mathcal{B}} = \mathop{\ast\!\!\prod}_{t\in T}^{\mathcal{B}} G_t$ מתאימה באפן טבעי מכפלה פרו־$\mathcal{C}$ חפשית $G_{\mathcal{C}} = \mathop{\ast\!\!\prod}_{t\in T}^{\mathcal{C}} G_t$ של אותן החבורות $G_t$ ואפימורפיזם $\varphi\colon G_{\mathcal{C}} \to G_{\mathcal{B}}$ כך שלכל $t \in T$ מעתיק $\varphi$ את העֹתק של $G_t$ החלקי ל $G_{\mathcal{C}}$ באפן זהותי על העֹתק של $G_t$ החלקי ל $G_{\mathcal{B}}$. יתר על כן, $\mathrm{Ker}(\varphi) = N_{\mathcal{B}}(G_{\mathcal{C}})$.*

*הוכחה:* נסמן $X = \{(g,t) \in G_{\mathcal{B}} \times T \mid g \in G_t\}$ ויהיו $\omega_{\mathcal{B}}\colon X \to G_{\mathcal{B}}$ ו $\tau\colon X \to T$ ההטלות המתאימות. לפי "למה פנימית־חיצונית" $\mathbf{X} = (X, \tau, T)$ הנה אלֻמה של חבורות פרו־$\mathcal{C}$ ו $\omega_{\mathcal{B}}$ מורפיזם. יתר על כן, לכל $t \in T$ מעתיק $\omega_{\mathcal{B}}$ את $X_t = \tau^{-1}(t)$ באפן איזומורפי על $G_t$. תהי $(G_{\mathcal{C}}, \omega_{\mathcal{C}})$ המכפלה הפרו־$\mathcal{C}$ החפשית מעל $\mathbf{X}$. לפי "למה חיצונית־פנימית", $G_{\mathcal{C}} = \mathop{\ast\!\!\prod}_{t\in T}^{\mathcal{C}} G_t$ באשר $G_t = \omega_{\mathcal{C}}(X_t)$. הואיל ו $G_{\mathcal{B}}$ היא גם חבורת פרו־$\mathcal{C}$ נובע מהתכונה האוניברסלית של הזוג $(G_{\mathcal{C}}, \omega_{\mathcal{C}})$ שקיָם אפימורפיזם $\varphi\colon G_{\mathcal{C}} \to G_{\mathcal{B}}$ כך ש $\varphi \circ \omega_{\mathcal{C}} = \omega_{\mathcal{B}}$. בפרט, $\varphi$ מעתיק את העֹתק של $G_t$ המוכל ב $G_{\mathcal{C}}$ באפן איזומורפי על העֹתק של $G_t$ המוכל ב $G_{\mathcal{B}}$. בלי הגבלת הכלליות נוכל לראות העתקה זו כהעתקת הזהות. נסמן $N = N_{\mathcal{B}}(G_{\mathcal{C}})$ ו $K = \mathrm{Ker}(\varphi)$. הואיל ו $G_{\mathcal{B}}$ היא חבורה פרו־$\mathcal{B}$, נובע ש $N \le K$. לכן, $\varphi$ משרה אפימורפיזם $\bar{\varphi}\colon G/N \to G_{\mathcal{B}}$ כך ש $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$ באשר $\pi\colon G_{\mathcal{C}} \to G/N$ היא העתקת המנה. כמו בחלק האחרון של הוכחת "למה מנה פרו־$\mathcal{B}$", נובע ש $N = K$. ∎

**למה קורוש:** *תהי $I$ קבוצה סופית ו $G = \mathop{\ast\!\!\prod}_{i\in I}^{\mathcal{C}} G_i$ מכפלה פרו־$\mathcal{C}$. תהי $U$ תת חבורה פתוחה של $G$. לכל $i$ נסמן $U_i = G_i \cap U$. נניח שהתצורה $\mathcal{C}$ מלאה. אזי קיֶמת ל $G$ תת חבורה סגורה $W$ כך ש $U = W \ast_{\mathcal{C}} \mathop{\ast\!\!\prod}_{i\in I}^{\mathcal{C}} U_i$.*

*הוכחה:* לכל $i\in I$ נפריד את $G$ לְיָדוֹת כפולות: $G=\dot\bigcup_{j\in J_i}G_is_{ij}U$. לפי משפט החבורה החלקית של קורוש בקטגוריה של חבורות פרו־$\mathcal{C}$ (פה אנו משתמשים בהנחה ש $\mathcal{C}$ מלאה)

$$U\cong D*_{\mathcal{C}}\coprod\nolimits^{\mathcal{C}}_{i\in I}\coprod\nolimits^{\mathcal{C}}_{j\in J_i}G_i^{s_{ij}}\cap U. \tag{1}$$

באשר $D$ היא חבורה פרו־$\mathcal{C}$ חפשית. יתר על כן, לכל $i\in I$ קיָם $j\in J_i$ כך ש $s_{ij}=1$ (ראה למשל \Jarden\Notes\Herfort\free.tex) עבור $j$ זה, מתקיֵם $G_i^{s_{ij}}\cap U=G_i\cap U=U_i$. לכן, כל $\coprod^{\mathcal{C}}_{i\in I}U_i$ מופיע כגורם חפשי באגף ימין של (1). נסמן את המכפלה הפרו־$\mathcal{C}$ החפשית של שאר הגורמים ב $W$. אזי (1) מקבל את הצורה $U=W*_{\mathcal{C}}\coprod^{\mathcal{C}}_{i\in I}U_i$. ∎

**משפטון חבורות חלקיות:** *תהי $G=\coprod^{\mathcal{C}}_{t\in T}G_t$ מכפלה פרו־$\mathcal{C}$ חפשית. לכל $t\in T$ תהי $H_t$ תת חבורה סגורה של $G_t$ כך ש $\bigcup_{t\in T}H_t$ סגורה ב $G$. נניח שהתצורה $\mathcal{C}$ מלאה. אזי תת החבורה $H$ הנוצרת על ידי כל ה $H_t$־ים הנה מכפלה פרו־$\mathcal{C}$ חפשית, $H=\coprod^{\mathcal{C}}_{t\in T}H_t$.*

*הוכחה:* נתבונן קודם במקרה שהמרחב $T$ סופי ובדיד. תהי $C$ חבורה פרו־$\mathcal{C}$ ולכל $t\in T$ יהי $\eta_t\colon H_t\to C$ הומומורפיזם. עלינו להרחיב את האֹסף $\{\eta_t\mid t\in T\}$ להומומורפיזם $\eta\colon H\to C$. לצֹרך זה נניח בלי הגבלת הכלליות ש $C$ סופית. הנחה זו מאפשרת להרחיב את $\eta_t$ להומומורפיזם $\mu_t$ מתת חבורה פתוחה $U_t$ של $G_t$ לתוך $C$. נתבונן עתה במכפלה הקרטזית $\prod_{t\in T}G_t$ ובאפימורפיזם $\kappa\colon G\to\prod_{t\in T}G_t$ שצמצומו לכל $G_t$ הנו העְתקת הזהות. תת החבורה $\prod_{t\in T}U_t$ של $\prod_{t\in T}G_t$ פתוחה ולכן, $U=\kappa^{-1}(\prod_{t\in T}U_t)$ פתוחה ב $G$. יתר על כן, $G_t\cap U=U_t$ לכל $t\in T$. לפי "למה קורוש", $U=W*_{\mathcal{C}}\coprod^{\mathcal{C}}_{t\in T}U_t$. לכן, נתן להרחיב את האֹסף $\{\mu_t\mid t\in T\}$ להומומורפיזם $\mu\colon\coprod^{\mathcal{C}}_{t\in T}U_t\to C$. $\eta=\mu|_H$ הנו הומומורפיזם לתוך $C$ המרחיב כל אחד מה $\mu_t$־ים, כנדרש.

נִפנה עתה למקרה הכללי ונוכיח קודם שההעתקה $\delta\colon T\to\mathrm{Subgr}(H)$ המֻגדרת על ידי $\delta(t)=H_t$ רציפה בִּפרישות. יהי אפוא $t\in T$ ותהי $K$ תת חבורה פתוחה של $H$ כך ש $H_t\le K$. נבחר תת חבורה פתוחה $L$ של $G$ המקיפה את $G_t$ כך ש $L\cap H\le K$. מהרציפות בפרישות של ההעתקה $s\mapsto G_s$ נובע שהקבוצה $S=\{s\in T\mid G_s\le L\}$ פתוחה ב $T$. לפי ההגדרות $t\in S$. לפי ההנחה, $\bigcup_{t\in T}H_t$ סגורה ב $G$. לכן, לפי "למה חבורה חלקית", $G_s\cap H=H_s$ לכל $s\in T$. בפרט, אם $s\in S$, נקבל ש $H_s\le K$, כנדרש. בזה הוכחנו את תנאי (1א) של סעיף "מכפלה חפשית פנימית" לגבי החבורות $H_s$.

נסמן ב $\mathbb{U}$ את אֹסף כל החלֻקות של $T$ לקבוצות פתוחות־סגורות. לפי "הערה גבול חלקות", $G=\varprojlim\coprod^{\mathcal{C}}_{U\in\mathcal{U}}G(U)$, באשר $\mathcal{U}$ עובר על $\mathbb{U}$ וההומומורפיזמים המקשרים של הגבול ההפוך הנם הכלות. בפרט, $G=\coprod^{\mathcal{C}}_{U\in\mathcal{U}}G(U)$. לכל $U\in\mathcal{U}$ נסמן $H(U)=\langle H_t\mid t\in U\rangle$. אזי, $\langle H(U)\mid U\in\mathcal{U}\rangle=\langle H_t\mid t\in T\rangle=H$. לכן, לפי הפסקה הראשונה של הוכחה זו, $H=\coprod^{\mathcal{C}}_{U\in\mathcal{U}}H(U)$.

לפי "משפטון גבול הפוך", $H=\coprod^{\mathcal{C}}_{t\in T}H'_t$, באשר $H'_t=\varprojlim H(U)=\bigcap_{U\in\mathcal{U}}H(U)$, באשר $U$ עובר על כל הסביבות הפתוחות־סגורות של $t$. עלינו להוכיח ש $H'_t=H_t$. ואכן, אם $U$ היא סביבה פתוחה־סגורה

של $t$, אזי $H(U) \leq H_t$. לכן, $H'_t \leq H_t$. להפך, נניח ש $g \in G \setminus H_t$. אזי, קיֶמת תת הרחבה פתוחה $L$ של $G$ המקיפה את $H_t$ ואינה מכילה את $g$. לפי הפסקה השניה של ההוכחה, הקבוצה $S = \{s \in T \mid H_s \subseteq K\}$ הנה סביבה פתוחה של $t$ ב $T$. לכן קיֶמת $\mathcal{U} \in \mathbb{U}$ וקיֶמת $U \in \mathcal{U}$ כך ש $t \in U \subseteq S$. בפרט, $H(U) \leq K$. מכאן ש $g \notin H(U)$. לכן, $g \notin H'_t$. מסקנה זו יחד עם הטענה $H'_t \leq H_t$ שהוכחנו לעיל גוררת ש $H_t = H'_t$. ∎

תהי $\mathcal{C}$ תצורה מלאה של חבורות סופיות ותהי $G = \coprod^{\mathcal{C}}_{i\in I} G_i$ מכפלה חפשית־$\mathcal{C}$ של מספר סופי של חבורות פרו־$\mathcal{C}$. הרפורט וריבס הוכיחו ב [HeR] ש $G_i \cap G_j^x = 1$ אם $i \neq j$ ו $x \in G$. $G_i \cap G_i^x = 1$ לכל $x \in G \smallsetminus G_i$ וכל תת חבורה סופית של $G$ מוכלת בצמוד של אחד ה $G_i$־ים. הוכחה אחרת במקצת נמצאת ב \Jarden\Notes\Herfort\. בסעיף זה נראה שמשפט הרפורט־ריבס נתן להכללה על ידי מעבר לְגבול למכפלה חפשית־ מעל מרחב פרו־סופי כלשהוא.

משפט ריבס־הרפורט: *תהי $\mathcal{C}$ תצורה מלאה של חבורות סופיות ו $G = \coprod^{\mathcal{C}}_{t\in T} G_t$ מכפלה פרו־ $\mathcal{C}$ חפשית.*

(א) *אם $s \neq r$, אזי $G_r \cap G_s^x = 1$ לכל $x \in G$.*

(ב) $G_t \cap G_t^x = 1$ *לכל* $x \in G \smallsetminus G_t$*. בפרט,* $G_t$ *הנו המשמֵר של עצמו ב* $G$.

(ג) *לכל תת חבורה סופית $A$ של $G$ קיָם $x \in G$ ו $t \in T$ כך ש $A \leq G_t^x$.*

*הוכחת א:* נניח בשלילה שקיָם $x \in G$ וקיָם $g \in G_r \cap G_s^x$ כך ש $g \neq 1$. נבחר אפימורפיזם $\alpha_r$ של $G_r$ על חבורה סופית $B$ כך ש $\alpha_r(g) \neq 1$. נרחיב את $\alpha_r$ בעזרת "למה הרחבה פנימית" להומומורפיזם $\alpha\colon G \to B$ כך ש $\alpha(G_s) = 1$. אזי $\alpha(G_s^x) = 1$. לכן $\alpha(g) = \alpha_r(g) \neq 1$ כי $g \in G_r$ ומצד שני $\alpha(g) = 1$ כי $g \in G_s^x$. סתירה זו מוכיחה ש $x$ ו $g$ כנ"ל אינם קיָמים.

*הוכחת ב:* הואיל ו $G_t$ הנה תת קבוצה סגורה של $G$, קיֶמת ל $G$ תת חבורה נורמלית פתוחה $N$ כך ש $x \notin NG_t$. מתנאי (וא) של סעיף "מכפלה חפשית פנימית" נובע שקיֶמת ל $t$ סביבה פתוחה־סגורה $U$ ב $T$ כך ש $G(U) \leq NG_t$. מכאן ש $G(U) = \langle G_u \mid u \in U\rangle \leq NG_t$ ולכן $x \notin G(U)$. נסמן עתה $U' = T \smallsetminus U$. לפי "למה חלקה", $G = G(U) *_{\mathcal{C}} G(U')$. לפי משפט הרפורט־ריבס למכפלות חפשיות של מספר סופי של גורמים, $G(U) \cap G(U)^x = 1$. הואיל ו $G_t \leq G(U)$, נובע מכאן ש $G_t \cap G_t^x = 1$, כנִטען.

*הוכחת ג:* "משפטון גבול הפוך" נותן לנו מערכת הפוכה $\langle G_i, T_i, \pi_{ji}\rangle_{i,j\in I}$ של חבורות פרו־סופיות $G_i$ ומרחבים סופיים בדידים $T_i$ כך שלכל $i \in I$ $G_i = \coprod^{\mathcal{C}}_{t_i\in T_i} G_{t_i}$ היא מכפלה פרו־$\mathcal{C}$ חפשית של מספר סופי של גורמים ו $G = \varprojlim G_i$. יהיו $\pi_i\colon G \to G_i$ ו $\pi_i\colon T \to T_i$ ההטלות על המרכיב ה $i$־י ונסמן $A_i = \pi_i(A)$. אזי $A = \varprojlim A_i$.

לכל $i \in I$ נסמן $Y_i = \{(x,t) \in G_i \times T_i \mid\ A_i \leq G_t^x\}$. לפי משפט הרפורט־ריבס למכפלה חפשית של מספר סופי של גורמים $Y_i$ אינה ריקה. הואיל ו $T_i$ סופי ו $G_i$ פרו־סופי, $Y_i$ הנה תת קבוצה סגורה של $G_i \times T_i$. אם $i \geq j$, אזי $\pi_{ji}(Y_j) \subseteq Y_i$. לכן, הגבול $Y = \varprojlim Y_i$ אינו ריק ומוכל ב $G \times T$. כל נקֻדה $(x,t) \in Y$ תקיֵם $A \leq G_t^x$, כנִדרש. ∎

## References

[HeR] W. Herfort and L. Ribes, *Torsion elements and centralizers in free products of profinite groups,* Journal für die reine und angewandte Mathematik **358** (1985), 155-161.