רשימות בגאומטריה אלגברית

מאת

עודד רותם

אוניברסיטת תל אביב, תשס"ו

הקדמה

רשימות אלו נכתבו כחלק מקריאה מודרכת שניתנה על ידי משה ירדן באוניברסיטת תל־אביב בשנת תשס"ו.

התוכנית המקורית היתה ללמוד (לפחות) את פרק 2 של [Har]. ככל שהתקדמנו, יותר מקורות התווספו, ושינויים נעשו בסדר הסעיפים. תוכן הסעיפים נשאר פחות או יותר נאמן למקור, עם כמה תוספות ודילוגים לפי גחמות הכותב.

ברצוני להודות לרן עזורי שהשתתף בחלק מההרצאות ותרם לרשימות.

עודד רותם

סימונים

נשתמש בסימונים הבאים:

$\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$	(קדם־)אלומות
$\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{U,V}$	העתקת הצמצום מ־$\mathcal{F}(U)$ ל־$\mathcal{F}(V)$
$\mathcal{F}_x$	הגבעול של $\mathcal{F}$ ב־x
$\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{U,x}$	העתקת הגבעול מ־$\mathcal{F}(U)$ ל־$\mathcal{F}_x$
$\sigma\|_V$	$\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{U,V}(\sigma)$ עבור $\sigma \in \mathcal{F}(U)$
σ_x	$\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{U,x}(\sigma)$ עבור $\sigma \in \mathcal{F}(U)$
$\Gamma(U, \mathcal{F})$	קבוצת החתכים $\mathcal{F}(U)$
$\mathcal{F}^+$	האלומה המצורפת לקדם האלומה $\mathcal{F}$
$\mathbf{Ab}$	קטגוריית החבורות האבליות
$\mathbf{Presh}(X, \mathbf{Ab})$	קטגוריית קדם האלומות (של חבורות אבליות) מעל X
$\mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab})$	קטגוריית האלומות (של חבורות אבליות) מעל X
$\mathrm{Open}(X)$	אוסף הקבוצות הפתוחות של מרחב טופולוגי X
$\mathrm{Open}^*(X)$	אוסף הקבוצות הפתוחות הלא ריקות של מרחב טופולוגי X
$\mathrm{Closed}(X)$	אוסף הקבוצות הסגורות של מרחב טופולוגי X

1. אלומות

1.1 הגדרות ותכונות בסיסיות.

נקבע מרחב טופולוגי X.

הגדרה 1.1.1 *(קדם־אלומה)*: קדם אלומה $\mathcal{F}$ מעל X ניתנת ע"י הנתונים הבאים:

(1) לכל $U \in \mathrm{Open}(X)$, חבורה אבלית $\mathcal{F}(U)$ שנקראת חבורת החתכים מעל U,

(2) לכל $U, V \in \mathrm{Open}(X)$ כך ש־$U \subseteq V$, הומומורפיזם "צמצום" $\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{V,U} \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$,

שמקיימים את התנאים הבאים:

(1) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$.

(2) לכל $U \in \mathrm{Open}(X)$, $\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$.

(3) לכל $U, V, W \in \mathrm{Open}(X)$ כך ש־$U \subseteq V \subseteq W$, מתקיים $\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{W,U} = \mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{V,U} \circ \mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{W,V}$.

הגדרה 1.1.2 *(אלומה)*: נאמר כי קדם אלומה $\mathcal{F}$ מעל X היא **אלומה** אם עבור כל $U \in \mathrm{Open}(X)$ וכל כיסוי פתוח $\{U_i\}_{i \in I}$ של U מתקיימים התנאים הבאים:

(1) אם $\sigma, \tau \in \mathcal{F}(U)$ כך ש־ $\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{U,U_i}(\sigma) = \mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{U,U_i}(\tau)$ לכל $i \in I$, אזי $\sigma = \tau$.

(2) אם נתונים $\sigma_i \in \mathcal{F}(U_i)$ לכל i, כך שלכל $i, j \in I$, $\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{U_i,U_i \cap U_j}(\sigma_i) = \mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{U_i,U_i \cap U_j}(\sigma_j)$, אזי קיים $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ כך ש־$\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{U,U_i}(\sigma) = \sigma_i$ לכל $i \in I$.

הגדרה 1.1.3 *(גבעול)*: עבור נקודה $x \in X$ וקדם אלומה $\mathcal{F}$ מעל X, נגדיר את הגבעול של $\mathcal{F}$ ב־x כך:

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U) ,$$

כאשר U עוברת על כל הסביבות הפתוחות של x.

הגדרה 1.1.4 *(נבט)*: איבר של $\mathcal{F}_x$ נקרא נבט.

הגדרה 1.1.5 *(מורפיזם)*: מורפיזם של קדם־אלומות $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ הנו אוסף של העתקות $\varphi(U) \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ עבור כל $U \subseteq X$ פתוחה, שמתחלף עם הצמצומים.

הגדרה 1.1.6 *(תת־קדם־אלומה)*: נאמר כי $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ אם לכל U, $\mathcal{F}(U) \subseteq \mathcal{G}(U)$ והעתקות הצמצום של $\mathcal{F}$ מושרות ע"י אלו של $\mathcal{G}$.

משפטון 1.1.7: *יהי* $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *מורפיזם,* $x \in X$*. אזי קיים הומומורפיזם יחיד של חבורות אבליות* $\varphi_x\colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ *כך שעבור כל סביבה פתוחה* U *של* x*, התרשים הבא חילופי:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{U,x}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\mathrm{res}^{\mathcal{G}}_{U,x}"] \\
\mathcal{F}_x \arrow[r, "\varphi_x"] & \mathcal{G}_x
\end{tikzcd}$$

ההשמה $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_x,\ \varphi \mapsto \varphi_x$ *נותנת פונקטור מתוך* $\mathbf{Presh}(X, \mathbf{Ab})$ *לתוך* $\mathbf{Ab}$.

הוכחה: המשפטון נובע מתכונות של גבולות ישרים והעובדה ש־φ מתחלף עם הצמצומים. הפונקטוריאליות נובעת מהיחידות של φ_x. ∎

1.2 האלומה המצורפת לקדם אלומה.

הגדרה 1.2.1 *(האלומה המצורפת לקדם אלומה):* תהי $\mathcal{F}$ קדם אלומה מעל מרחב טופולוגי X. אלומה $\mathcal{F}^+$ ביחד עם מורפיזם $\eta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ יקראו **אילום** של $\mathcal{F}$ אם מתקיימת התכונה האוניברסלית הבאה:

לכל אלומה $\mathcal{G}$ ומורפיזם $\theta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, קיים מורפיזם יחיד $\hat{\theta}\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ כך שהתרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\theta"'] & & \mathcal{F}^+ \arrow[dl, dashed, "\hat{\theta}"] \\
& \mathcal{G} &
\end{tikzcd}$$

כמו בכל תכונה אוניברסלית, אם אילום קיים אזי הוא יחיד עד כדי איזומורפיזם.

הגדרה 1.2.2: תהי $\mathcal{F}$ קדם־אלומה מעל X. נגדיר את אלומת החתכים האי־רציפים $D(\mathcal{F})$ באופן הבא: לכל $U \in \mathrm{Open}(X)$,

$$D(\mathcal{F})(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x.$$

אם $U, V \in \mathrm{Open}(X)$ כך ש־$V \subseteq U$, אזי הצמצום $\mathrm{res}^{D(\mathcal{F})}_{U,V}\colon D(\mathcal{F})(U) \to D(\mathcal{F})(V)$ ניתן ע"י הטלה.

אם נגדיר $\mu\colon \mathcal{F} \to D(\mathcal{F})$ כך שלכל $U \in \mathrm{Open}(X)$,

$$\mu(U)\colon \mathcal{F}(U) \longrightarrow D(\mathcal{F})(U)$$
$$\sigma \longmapsto (\sigma_x)_{x \in U}$$

אזי μ הנו מורפיזם של קדם־אלומות.

נגדיר את קדם האלומה $D_0(\mathcal{F})$ כך שלכל $U \in \mathrm{Open}(X)$,

$$D_0(\mathcal{F})(U) = \mathrm{Im}(\mu(U)) \subseteq D(\mathcal{F})(U).$$

משפטון 1.2.3 (תת־האלומה הנוצרת ע"י תת־קדם־אלומה): *יהיו $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ קדם אלומות כך ש־$\mathcal{G}$ היא אלומה. אזי קיימת תת־אלומה $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{G}$ (בהכרח יחידה) שמקיימת את התנאים הבאים:*

(1) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$

(2) *אם $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ היא תת אלומה כך ש־$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$ אזי $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{H}$ (במלים אחרות, $\mathcal{F}'$ היא תת האלומה הקטנה ביותר של $\mathcal{G}$ המקיפה את $\mathcal{F}$)*

(3) *לכל $x \in X$ מתקיים $\mathcal{F}_x = (\mathcal{F}')_x$*

(4) *אם $\mathcal{K}$ אלומה ו־$\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{K}$ מורפיזם של קדם אלומות, אזי קיים מורפיזם יחיד של אלומות $\varphi' : \mathcal{F}' \to \mathcal{K}$ כך שהתרשים הבא חלופי:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathcal{F}' \arrow[dl, dashed, "\varphi'"] \\ & \mathcal{K} & \end{tikzcd}$$

במלים אחרות, $(\mathcal{F}', \subseteq)$ הנו אילום של $\mathcal{F}$.

הוכחה: עבור $U \subseteq X$ פתוחה, נגדיר

$$\mathcal{F}'(U) = \{\sigma \in \mathcal{G}(U) \mid \forall x \in U, \exists \text{ open } V \subseteq U \text{ such that } x \in V, \sigma|_V \in \mathcal{F}(V)\}$$

אזי $\mathcal{F}'(U)$ תת חבורה של $\mathcal{G}(U)$. בנוסף, אם $U \subseteq U'$ ו־$\sigma \in \mathcal{F}'(U')$, אזי מההגדרה נובע כי $\sigma|_U \in \mathcal{F}'(U)$, ולכן $\mathcal{F}'$ היא תת־קדם־אלומה של $\mathcal{G}$.

כעת נראה ש־$\mathcal{F}'$ היא אלומה. נניח כי $U \subseteq X$ פתוחה ו־$\{U_i\}$ כיסוי פתוח של U.

אם $\sigma \in \mathcal{F}'(U)$ כך שלכל i, $\sigma|_{U_i} = 0$, אזי מכיון ש־$\mathcal{G}$ אלומה, $\sigma = 0$.

אם נתונים חתכים $\sigma_i \in \mathcal{F}'(U_i)$ לכל i שמסכימים על החיתוכים, אזי מכיון ש־$\mathcal{G}$ אלומה, קיים $\sigma \in \mathcal{G}(U)$ כך ש־$\sigma|_{U_i} = \sigma_i$ לכל i. יהי $x \in U$. אזי קיים i כך ש־$x \in U_i$. מכיון ש־$\sigma_i \in \mathcal{F}'(U_i)$, קיימת $V \subseteq U_i$ פתוחה כך ש־$x \in V$ ו־$\sigma_i|_V \in \mathcal{F}(V)$. לכן $\sigma|_V = \sigma_i|_V \in \mathcal{F}(V)$. לכן $\sigma \in \mathcal{F}'(U)$.

תנאי (1) נובע מההגדרות.

תנאי (2): תהי $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ תת־אלומה המכילה את $\mathcal{F}$. תהי $U \subseteq X$ פתוחה ו־$\sigma \in \mathcal{F}'(U)$. אזי קיים כיסוי פתוח $\{U_i\}$ של U כך שלכל i, $\sigma|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i) \subseteq \mathcal{H}(U_i)$. קבוצת החתכים $\{\sigma|_{U_i}\}$ כמובן מסכימה על החיתוכים. מכיון ש־$\mathcal{H}$ אלומה, קיים $\tau \in \mathcal{H}(U)$ כך שלכל i, $\tau|_{U_i} = \sigma|_{U_i}$. מכיון ש־$\mathcal{G}$ אלומה, מתקיים $\sigma = \tau \in \mathcal{H}(U)$. לכן $\mathcal{F}'(U) \subseteq \mathcal{H}(U)$.

תנאי (3): יהי $x \in X$. יהי $\gamma \in (\mathcal{F}')_x$. אזי קיימת סביבה פתוחה U של x וחתך $\sigma \in \mathcal{F}'(U)$ כך ש־$\gamma = \sigma_x$. לפי ההגדרה, קיימת סביבה פתוחה $V \subseteq U$ של x כך ש־$\sigma|_V \in \mathcal{F}(V)$. לכן

$$\gamma = \sigma_x = (\sigma|_V)_x \in \mathcal{F}_x.$$

לכן $\mathcal{F}_x \subseteq (\mathcal{F}')_x$. ההכלה ההפוכה ברורה.

תנאי (4): נניח כי $\mathcal{K}$ אלומה ו־$\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{K}$ מורפיזם של קדם אלומות. תהי $U \subseteq X$ פתוחה, ו־$\sigma \in \mathcal{F}'(U)$. אזי קיים כיסוי פתוח $\{U_i\}$ של U כך שלכל i, $\sigma|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)$. נגדיר

$$\tau_i = \varphi(U_i)(\sigma|_{U_i}) \in \mathcal{K}(U_i).$$

אזי אוסף החתכים $\{\tau_i\}$ מסכים על החיתוכים, ומכיון ש־$\mathcal{K}$ אלומה, קיים חתך $\tau \in \mathcal{K}(U)$ כך ש־$\tau|_{U_i} = \tau_i$ לכל i. אם $\{U'_\alpha\}$ הוא כיסוי פתוח נוסף של U כך ש־ $\sigma|_{U'_\alpha} \in \mathcal{F}(U'_\alpha)$ לכל α, ו־$\tau' \in \mathcal{K}(U)$ מקיים $\tau'|_{U'_\alpha} = \varphi(U'_\alpha)(\sigma|_{U'_\alpha})$ לכל α, אזי $\{U_i \cap U'_\alpha\}$ הוא כיסוי פתוח של U ולכל i, α מתקיים $\tau|_{U_i\cap U'_\alpha} = \tau'|_{U_i\cap U'_\alpha}$. מכיון ש־$\mathcal{K}$ אלומה, $\tau = \tau'$. לכן ההשמה $\sigma \mapsto \tau$ נותנת העתקה מוגדרת היטב $\varphi'(U) : \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{K}(U)$.

מכיון ש־$\varphi(U)$ הומומורפיזם, מהיחידות של τ הנ"ל נובע כי $\varphi'(U)$ גם הומומורפיזם. מכיון ש־φ מתחלף עם צמצומים, מהיחידות של τ נובע שוב כי גם φ' מתחלף עם צמצומים, ולכן φ' מורפיזם של אלומות.

לבסוף, אם $\sigma \in \mathcal{F}(U)$, אזי הכיסוי הפתוח המתאים של U הוא פשוט $\{U\}$, ולכן $\varphi(U)(\sigma) = \varphi'(U)(\sigma)$. מכיון ש־$\mathcal{K}$ אלומה, ברור כי φ' הוא המורפיזם היחיד שמקיים תכונה זאת. ∎

למה 1.2.4: *תהי $\mathcal{F}$ אלומה מעל X. תהי $U \in \mathrm{Open}(X)$. אם $\sigma, \tau \in \mathcal{F}(U)$ כך ש־$\sigma_x = \tau_x$ לכל $x \in U$ אזי $\sigma = \tau$.*

הוכחה: התנאי $\sigma_x = \tau_x$ לכל $x \in U$ גורר כי קיים כיסוי פתוח $\{U_i\}_{i\in I}$ של U כך ש־$\sigma|_{U_i} = \tau|_{U_i}$ לכל i. מכיון ש־$\mathcal{F}$ היא אלומה, מתקיים $\sigma = \tau$. ∎

משפטון 1.2.5: *לכל קדם אלומה $\mathcal{F}$ קיים אילום.*

הוכחה: תהי $\mathcal{F}^+$ תת־האלומה של $D(\mathcal{F})$ הנוצרת ע"י תת קדם האלומה $D_0(\mathcal{F})$. באופן מפורש, לכל $U \in \mathrm{Open}(X)$,

$$\mathcal{F}^+(U) = \{s \in \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x \mid \forall x \in U\, \exists V \subseteq U \text{open}, x \in V, \exists t \in \mathcal{F}(V), \forall y \in V, s(y) = t_y\}$$

נגדיר את $\eta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ להיות ההרכבה של $\mu\colon \mathcal{F} \to D_0(\mathcal{F})$ והשיכון $D_0(\mathcal{F}) \hookrightarrow D(\mathcal{F})$. נניח כי $\mathcal{G}$ אלומה ו־$\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ מורפיזם של קדם אלומות. יהי $s \in D_0(\mathcal{F})(U)$. אזי קיים $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ כך ש־$s = (\sigma_x)_{x\in U}$. אם $\sigma' \in \mathcal{F}(U)$ גם מקיים $s = (\sigma'_x)_{x\in U}$, אזי $\sigma'_x = \sigma_x$ לכל $x \in U$, ולכן

$$\big(\varphi(U)(\sigma)\big)_x = \varphi_x(\sigma_x) = \varphi_x(\sigma'_x) = \big(\varphi(U)(\sigma')\big)_x$$

לכל $x \in U$. לפי למה 1.2.4, $\varphi(U)(\sigma) = \varphi(U)(\sigma')$. לכן ההשמה $s \mapsto \varphi(U)(\sigma)$ הנה מוגדרת היטב, ונותנת הומומורפיזם $\varphi_0(U)\colon D_0(\mathcal{F}) \to \mathcal{G}$. כך הגדרנו מורפיזם של אלומות $\varphi_0\colon D_0(\mathcal{F}) \to \mathcal{G}$ כך שהתרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & D_0(\mathcal{F}) \arrow[dl, "\varphi_0"] \\ & \mathcal{G} & \end{tikzcd}$$

כעת נשתמש בתכונה האוניברסלית של תת־אלומה הנוצרת ע"י תת קדם־אלומה כבמשפטון 1.2.3 עבור φ_0 ונקבל מורפיזם של אלומות $\hat{\varphi}\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ כך שהתרשים הבא חילופי

$$\begin{tikzcd} D_0(\mathcal{F}) \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\varphi_0"'] & & \mathcal{F}^+ \arrow[dl, dashed, "\hat{\varphi}"] \\ & \mathcal{G} & \end{tikzcd}$$

אם נצרף את שני התרשימים הנ"ל, נקבל את התרשים החילופי הבא,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathcal{F}^+ \arrow[dl, dashed, "\hat{\varphi}"] \\ & \mathcal{G} & \end{tikzcd},$$

כנדרש. ∎

למה 1.2.6: *אם $\eta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ הנו מורפיזם האילום, אזי $\eta_x\colon \mathcal{F}_x \to (\mathcal{F}^+)_x$ הנו איזומורפיזם של חבורות אבליות לכל* $x \in X$.

הוכחה: אם U סביבה פתוחה של x, נגדיר $\mu_{U,x}\colon \mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{F}_x$ ע"י $\mu_{U,x}(s) = s(x)$. אזי המשפחה $\{\mu_{U,x}\}_{U \ni x}$ משרה העתקה $\mu_x\colon (\mathcal{F}^+)_x \to \mathcal{F}_x$, אשר מקיימת $\mu_x = \eta_x^{-1}$, כפי שניתן לבדוק. ∎

משפטון 1.2.7: *אם $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ הנו מורפיזם של קדם־אלומות, אזי קיים מורפיזם יחיד של אלומות $\varphi^+\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+$ כך שהתרשים הבא חלופי:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\eta_F"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathcal{F}^+ \arrow[d, dashed, "\varphi^+"] \\ \mathcal{G} \arrow[r, "\eta_G"'] & \mathcal{G}^+ \end{tikzcd}$$

ההשמה $\varphi \mapsto \varphi^+$, $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^+$ *מגדירה פונקטור מתוך* $\mathbf{Presh}(X, \mathbf{Ab})$ *לתוך* $\mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab})$.

הוכחה: המורפיזם φ^+ מושרה ע"י המורפיזם $\eta_G \circ \varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}^+$ ביחד עם התכונה האוניברסלית של $\mathcal{F}^+$. מהיחידות נובע כי

$$(\mathrm{id}_{\mathcal{F}})^+ = \mathrm{id}_{\mathcal{F}^+}$$
$$(\varphi \circ \psi)^+ = \varphi^+ \circ \psi^+$$

לכן מתקבל פונקטור. ∎

1.3 תכונות מקומיות של אלומות.

למה 1.3.1: *יהיו* $\varphi, \psi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *מורפיזמים של קדם־אלומות מעל* X *כך ש־*$\mathcal{G}$ *הנה אלומה. אם* $\varphi_x = \psi_x$ *לכל* $x \in X$ *אזי* $\varphi = \psi$.

הוכחה: יהיו $U \in \mathrm{Open}(X)$ ו־$\sigma \in \mathcal{F}(U)$. יהיו $\tau = \varphi(U)(\sigma), \rho = \psi(U)(\sigma)$. אזי לכל $x \in U$,

$$\begin{aligned}\tau_x &= \big(\varphi(U)(\sigma)\big)_x \\ &= \varphi_x(\sigma_x) \\ &= \psi_x(\sigma_x) \\ &= \big(\psi(U)(\sigma)\big)_x \\ &= \rho_x.\end{aligned}$$

מכיון ש־$\mathcal{G}$ אלומה, לפי למה 1.2.4, $\rho = \tau$. לכן $\varphi(U) = \psi(U)$ לכל U, ולכן $\varphi = \psi$. ∎

למה 1.3.2: *תהי* $\mathcal{F}$ *אלומה מעל* X *כך ש־*$\mathcal{F}_x = 0$ *לכל* $x \in X$*. אזי* $\mathcal{F} = 0$.

הוכחה: לכל $U \in \mathrm{Open}(X)$ ו־$\sigma \in \mathcal{F}(U)$, $\sigma_x = 0$ לכל $x \in U$. לפי למה 1.2.4 $\sigma = 0$. לכן $\mathcal{F}(U) = 0$. ∎

למה 1.3.3: *תהי* $\mathcal{F}$ *תת אלומה של אלומה* $\mathcal{G}$ *מעל* X*. אם* $\mathcal{F}_x = \mathcal{G}_x$ *לכל* $x \in X$*, אזי* $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

הוכחה: יהיו $U \in \mathrm{Open}(X)$ ו־$\sigma \in \mathcal{G}(U)$. אז לכל $x \in U$, $\sigma_x \in \mathcal{G}_x = \mathcal{F}_x$. לכן קיים כיסוי פתוח $\{U_i\}$ של U כך ש־$\sigma|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)$. מכיון שאוסף החתכים $\{\sigma|_{U_i}\}$ מסכים על החיתוכים ו־$\mathcal{F}$ הנה אלומה, קיים חתך $\tau \in \mathcal{F}(U)$ כך ש־$\sigma|_{U_i} = \tau|_{U_i}$ לכל i. מכיון ש־$\mathcal{G}$ הנה אלומה, חייב להתקיים $\sigma = \tau \in \mathcal{F}(U)$. לכן $\mathcal{G}(U) = \mathcal{F}(U)$ לכל U, ולכן $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. ∎

למה 1.3.4: *יהי $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ מורפיזם של קדם אלומות מעל X. יהי $x \in X$ ויהי $\mathcal{B}$ בסיס של סביבות פתוחות של x. אם $\varphi(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ הנו איזומורפיזם עבור כל $U \in \mathcal{B}$ אזי $\varphi_x\colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ הנו איזומורפיזם.*

הוכחה: יהי $\delta \in \mathcal{G}_x$. הואיל ו־$\mathcal{B}$ הנו בסיס של סביבות פתוחות, קיימים $U \in \mathcal{B}$ ו־$\tau \in \mathcal{G}(U)$ כך ש־$\tau_x = \delta$. מכיון ש־$\varphi(U)$ הנו על, קיים $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ כך ש־$\varphi(U)(\sigma) = \tau$, ולכן $\delta = \tau_x = \varphi_x(\sigma_x)$. לכן φ_x על.

יהי $\gamma \in \operatorname{Ker}(\varphi_x)$. אזי ע״י צמצום לסביבה קטנה מספיק, קיימים $U \in \mathcal{B}$ ו־$\sigma \in \mathcal{F}(U)$ כך ש־$\sigma_x = \gamma$ ו־$\varphi(U)(\sigma) = 0$. אבל $\varphi(U)$ חח״ע, ולכן $\sigma = 0$. לכן $\gamma = 0$, ו־φ_x חח״ע. ∎

משפטון 1.3.5: *יהי $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ מורפיזם של אלומות. אזי התנאים הבאים הנם שקולים:*

(1) *φ הוא איזומורפיזם בקטגוריה $\mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab})$*

(2) *לכל $x \in X$, $\varphi_x\colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ הוא איזומורפיזם*

(3) *לכל $U \in \operatorname{Open}(X)$, $\varphi(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ הוא איזומורפיזם*

(4) *קיים בסיס פתוח $\mathcal{B}$ לטופולוגיה של X כך שלכל $U \in \mathcal{B}$, $\varphi(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ הוא איזומורפיזם*

הוכחה: נוכיח את הגרירות הבאות:

$$\begin{tikzcd}
(1) \arrow[r, Rightarrow] & (2) \arrow[dl, Rightarrow] \\
(3) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & (4) \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

א: $(1) \Rightarrow (2)$. לכל $x \in X$, ההשמה $\mathcal{H} \to \mathcal{H}_x$ הנה פונקטור, ולכן מעבירה איזומורפיזמים (של אלומות) לאיזומורפיזמים (של חבורות אבליות).

ב: $(2) \Rightarrow (3)$. תהי $U \in \operatorname{Open}(X)$.

יהי $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ כך ש־$\varphi(U)(\sigma) = 0$. אזי לכל $x \in U$, $0 = (\varphi(U)(\sigma))_x = \varphi_x(\sigma_x)$. מכיון ש־$\varphi_x$ חח״ע, $\sigma_x = 0$ לכל $x \in U$. לפי למה 1.2.4, $\sigma = 0$. לכן $\varphi(U)$ חח״ע.

יהי $\tau \in \mathcal{G}(U)$. לכל $x \in U$, מכיון ש־φ_x היא על, קיים $\gamma^x \in \mathcal{F}_x$ כך ש־$\tau_x = \varphi_x(\gamma^x)$. לכן קיים כיסוי פתוח $\{U_i\}$ של U, כך שלכל i קיים $\sigma_i \in \mathcal{F}(U_i)$ המקיים $\tau|_{U_i} = \varphi(U_i)(\sigma_i)$. לכל i, j,

$$\varphi(U_i \cap U_j)\big(\sigma_i|_{U_i \cap U_j}\big) = \tau|_{U_i \cap U_j} = \varphi(U_i \cap U_j)\big(\sigma_j|_{U_i \cap U_j}\big).$$

אולם הוכחנו כבר ש־$\varphi(U_i \cap U_j)$ חח״ע, ולכן $\sigma_j|_{U_i \cap U_j} = \sigma|_{U_i \cap U_j}$. מכיון ש־$\mathcal{F}$ הנה אלומה, קיים $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ כך ש־$\sigma|_{U_i} = \sigma_i$ לכל i. אזי לכל i,

$$\varphi(U)(\sigma)|_{U_i} = \varphi(U_i)(\sigma|_{U_i}) = \varphi(U_i)(\sigma_i) = \tau|_{U_i}.$$

מכיון ש־$\mathcal{G}$ אלומה, $\tau = \varphi(U)(\sigma)$. לכן $\varphi(U)$ על.

ג: $(1) \Leftarrow (3)$. לכל $U \in \mathrm{Open}(X)$, נגדיר $\psi(U) = \varphi(U)^{-1} \colon \mathcal{G}(U) \to \mathcal{F}(U)$. אזי קל לבדוק ש־$\psi$ הנו מורפיזם של אלומות, ו־$\psi = \varphi^{-1}$.

ד: $(4) \Leftarrow (3)$. ניקח $\mathcal{B} = \mathrm{Open}(X)$.

ה: $(2) \Leftarrow (4)$. יהי $x \in X$. נגדיר $\mathcal{B}_x = \{U \in \mathcal{B} \mid U \ni x\}$. אזי $\mathcal{B}_x$ הנו בסיס של סביבות פתוחות של x כך ש־$\varphi(U)$ הוא איזומורפיזם לכל $U \in \mathcal{B}_x$. לפי למה 1.3.4, φ_x הוא איזומורפיזם. ∎

תוצאה 1.3.6: *תהי $\mathcal{F}$ אלומה. אזי מורפיזם האילום $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ הנו איזומורפיזם של אלומות, ולכל $U \in \mathrm{Open}(X)$, $\eta(U) \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^+(U)$ הנו איזומורפיזם.*

הוכחה: לפי למה 1.2.6, η_x הנו איזומורפיזם לכל $x \in X$. התוצאה נובעת כעת ממשפטון 1.3.5. ∎

למה 1.3.7: *יהיו $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ אלומות מעל X. נניח כי נתונים הומומורפיזמים $\psi^{(x)} \colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ לכל $x \in X$, כך שהתנאי הבא מתקיים:*

$(*)$ *לכל $U \in \mathrm{Open}(X)$, $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ ו־$x \in U$, קיימים $V \subseteq U$ פתוחה ו־$\tau \in \mathcal{G}(V)$ כך ש־$x \in V$ ו־$\psi^{(y)}(\sigma_y) = \tau_y$ לכל $y \in V$.*

אזי קיים מורפיזם יחיד של אלומות $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ כך ש־$\varphi_x = \psi^{(x)}$ לכל $x \in X$.

הוכחה: אם φ כזה קיים אז לפי למה 1.3.1 הוא יחיד.

תהי $U \in \mathrm{Open}(X)$. נגדיר את ההומומורפיזם

$$\begin{aligned} \psi(U) \colon \mathcal{F}(U) &\longrightarrow D(\mathcal{G})(U) \\ \sigma &\longmapsto \big(\psi^{(x)}(\sigma_x)\big)_{x \in U} \end{aligned}$$

התנאי $(*)$ מציין בדיוק את העובדה ש־$\psi(U)(\sigma) \in \mathcal{G}^+(U)$ לכל $\sigma \in \mathcal{F}(U)$. בנוסף ברור כי ההעתקות $\psi(U)$ מתחלפות עם צמצומים, ולכן $\psi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}^+$ הנו מורפיזם של אלומות. לפי תוצאה 1.3.6, $\eta_{\mathcal{G}} \colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}^+$ הנו איזומורפיזם של אלומות. נגדיר

$$\varphi = \eta_{\mathcal{G}}^{-1} \circ \psi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}.$$

אזי φ הנו מורפיזם של אלומות. תהי $U \in \mathrm{Open}(X)$, יהי $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ ויהי $x \in U$. אזי לפי הבניה בהוכחת למה 1.2.6 ולפי הגדרת $\psi(U)$,

$$\begin{aligned} \varphi_x(\sigma_x) &= (\eta_{\mathcal{G}})_x^{-1}\Big(\big(\psi(U)(\sigma)\big)_x\Big) \\ &= \psi(U)(\sigma)(x) \\ &= \psi^{(x)}(\sigma_x). \end{aligned}$$

לכן $\varphi_x = \psi^{(x)}$ לכל $x \in X$. ∎

למה 1.3.8: *יהי $\mathcal{B}$ בסיס פתוח לטופולוגיה של X. יהיו $\mathcal{F},\mathcal{G}$ אלומות מעל X. נניח כי נתונים הומומורפיזמים $\varphi_0(U)\colon \mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U)$ לכל $U\in\mathcal{B}$, שמתחלפים עם הצמצומים בין איברי $\mathcal{B}$. אזי קיים מורפיזם יחיד של אלומות $\varphi\colon\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ המקיים $\varphi(U)=\varphi_0(U)$ לכל $U\in\mathcal{B}$.*

הוכחה: לכל $x\in X$, נגדיר $\mathcal{B}_x=\{U\in\mathcal{B}\mid U\ni x\}$.

לפי ההנחה, לכל $U,V\in\mathcal{B}_x$ המקיימים $V\subseteq U$, התרשים הבא הנו חילופי:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_0(U)"] \arrow[d, "\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{U,V}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\mathrm{res}^{\mathcal{G}}_{U,V}"'] \arrow[dr, "\mathrm{res}^{\mathcal{G}}_{U,x}"] & \\
 & & \mathcal{G}_x \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi_0(V)"'] & \mathcal{G}(V) \arrow[ur, "\mathrm{res}^{\mathcal{G}}_{V,x}"'] &
\end{tikzcd}$$

הואיל ו־$\mathcal{B}_x$ הנו בסיס של סביבות פתוחות של x,

$$\mathcal{F}_x=\varinjlim_{U\in\mathcal{B}_x}\mathcal{F}(U),$$

$$\mathcal{G}_x=\varinjlim_{U\in\mathcal{B}_x}\mathcal{G}(U),$$

ולכן קיים הומומורפיזם יחיד $\psi^{(x)}\colon\mathcal{F}_x\to\mathcal{G}_x$ כך שהתרשים הבא חילופי לכל $U\in\mathcal{B}_x$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_0(U)"] \arrow[d, "\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{U,x}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\mathrm{res}^{\mathcal{G}}_{U,x}"] \\
\mathcal{F}_x \arrow[r, dashed, "\psi^{(x)}"] & \mathcal{G}_x
\end{tikzcd} \tag{1}$$

תהי $U\in\operatorname{Open}(X)$, יהי $x\in X$ ויהי $\sigma\in\mathcal{F}(U)$. תהי $V\in\mathcal{B}_x$ כך ש־$V\subseteq U$. יהי

$$\tau=\varphi_0(V)(\sigma|_V)\in\mathcal{G}(V).$$

לפי (1), לכל $y\in V$ מתקיים

$$\tau_y=(\varphi_0(V)(\sigma|_V))=\psi^{(y)}(\sigma_y).$$

לכן האוסף $\{\psi^{(x)}\}_{x\in X}$ מקיים את תנאי $(*)$ של למה 1.3.7 ולכן קיים מורפיזם יחיד $\varphi\colon\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ המקיים $\varphi_x=\psi^{(x)}$ לכל $x\in X$.

תהי $U \in \mathcal{B}$ ויהי $\sigma \in \mathcal{F}(U)$. אז לכל $x \in U$,

$$\big(\varphi_0(U)(\sigma)\big)_x = \psi^{(x)}(\sigma_x) = \varphi_x(\sigma_x) = \big(\varphi(U)(\sigma)\big)_x.$$

לפי למה 1.2.4, $\varphi_0(U)(\sigma) = \varphi(U)(\sigma)$. לכן $\varphi_0(U) = \varphi(U)$.

לבסוף, נציין כי כל מורפיזם φ כזה חייב לקיים $\varphi_x = \psi^{(x)}$ לכל $x \in X$ (לפי תרשים (1)), ולכן φ נקבע ביחידות. ∎

למה 1.3.9: *תהי $\mathcal{G}$ אלומה מעל X ותהי $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ תת־קדם־אלומה. אזי $\mathcal{F}$ אלומה אם ורק אם התנאי הבא מתקיים:*

(∗) *לכל $V \in \mathrm{Open}(X)$ ולכל כיסוי פתוח $V = \bigcup_\alpha V_\alpha$, אם $\sigma \in \mathcal{G}(V)$ מקיים $\sigma|_{V_\alpha} \in \mathcal{F}(V_\alpha)$ לכל α אזי $\sigma \in \mathcal{F}(V)$.*

במלים אחרות, שייכות לחבורת החתכים של $\mathcal{F}$ הנה תנאי מקומי.

הוכחה: תהי $\mathcal{H}$ תת־האלומה של $\mathcal{G}$ הנוצרת ע"י $\mathcal{F}$. התנאי (∗) הנו בדיוק תנאי השייכות ל־$\mathcal{H}$. הלמה נובעת כעת מכך ש־$\mathcal{F}$ הנה אלומה אם ורק אם $\mathcal{F} = \mathcal{H}$. ∎

1.4 גרעין, גרעין נלווה ותמונה של מורפיזם.

הגדרה 1.4.1: יהי $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ מורפיזם של קדם־אלומות. נגדיר את קדם האלומות

$$\mathrm{pKer}(\varphi), \mathrm{pIm}(\varphi), \mathrm{pCoker}(\varphi)$$

מעל X באופן הבא: לכל $U \in \mathrm{Open}(X)$, חבורות החתכים מעל U הן

$$\big(\mathrm{pKer}(\varphi)\big)(U) = \mathrm{Ker}\big(\varphi(U)\big)$$
$$\big(\mathrm{pIm}(\varphi)\big)(U) = \mathrm{Im}\big(\varphi(U)\big)$$
$$\big(\mathrm{pCoker}(\varphi)\big)(U) = \mathrm{Coker}\big(\varphi(U)\big)$$

העתקות הצמצום מוגדרות כך שלכל $U, V \in \mathrm{Open}(X)$ המקיימות $V \subseteq U$, התרשים הבא הנו חילופי:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{pKer}(\varphi)(U) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{res}^{\mathrm{pKer}(\varphi)}_{U,V}"'] & \mathcal{F}(U) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{U,V}"'] & \mathrm{pIm}(\varphi)(U) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{res}^{\mathrm{pIm}(\varphi)}_{U,V}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\mathrm{res}^{\mathcal{G}}_{U,V}"'] & \mathrm{pCoker}(\varphi)(U) \arrow[d, "\mathrm{res}^{\mathrm{pCoker}(\varphi)}_{U,V}"] \\
\mathrm{pKer}(\varphi)(V) \arrow[r, hook] & \mathcal{F}(V) \arrow[r, two heads] & \mathrm{pIm}(\varphi)(V) \arrow[r, hook] & \mathcal{G}(V) \arrow[r, two heads] & \mathrm{pCoker}(\varphi)(V)
\end{tikzcd}$$

למה 1.4.2: *בסימוני ההגדרה הקודמת, קיימים מורפיזמים של קדם אלומות*

$$\mathrm{pKer}(\varphi) \xhookrightarrow{\imath} \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi_0} \mathrm{pIm}(\varphi) \xhookrightarrow{\jmath} \mathcal{G} \xrightarrow{q} \mathrm{pCoker}(\varphi)$$

שמקיימים את התכונות האוניברסליות של גרעין, גרעין נלווה ותמונה של מורפיזם בקטגוריה $\mathbf{Presh}(X, \mathbf{Ab})$*. באופן מפורש:*

(1) *אם* $\psi \colon \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ *מורפיזם של קדם־אלומות שמקיים* $\varphi \circ \psi = 0$ *אזי קיים מורפיזם יחיד* ψ' *כך שהתרשים הבא חילופי:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{pKer}(\varphi) \arrow[rr, "\imath"] & & \mathcal{F} \\
& \mathcal{H} \arrow[ul, dashed, "\psi'"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

(2) *אם* $\psi \colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ *מורפיזם של קדם־אלומות שמקיים* $\psi \circ \varphi = 0$*, אזי קיים מורפיזם יחיד* ψ' *כך שהתרשים הבא חילופי:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \mathrm{pCoker}(\varphi) \arrow[dl, dashed, "\psi'"] \\
& \mathcal{H} &
\end{tikzcd}$$

(3) $\mathrm{pIm}(\varphi)$ *(ביחד עם ההעתקה* $\jmath$*) הנה הגרעין של* $\mathcal{G} \to \mathrm{pCoker}(\varphi)$.

הוכחה: התכונות האוניברסליות המצוינות דלעיל מתקיימות מכיון שקדם האלומות שבנינו הוגדרו ע"י התכונות האוניברסליות של גרעין וכו' מעל כל $U \in \mathrm{Open}(X)$. ∎

למה 1.4.3: *תהי*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

סדרה של מורפיזמים של קדם אלומות כך שלכל $U \in \mathrm{Open}(X)$*, הסדרה*

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi(U)} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi(U)} \mathcal{H}(U)$$

מדוייקת. אזי לכל $x \in X$*, הסדרה*

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{H}_x$$

הנה מדוייקת.

הוכחה: יהי $x \in X$, ויהי $\gamma \in \mathrm{Ker}(\psi_x)$. תהי U סביבה פתוחה של x ו־$\tau \in \mathcal{G}(U)$ כך ש־$\gamma = \tau_x$. אזי

$$\big(\psi(U)(\tau)\big)_x = \psi_x(\tau_x) = 0\ ,$$

ולכן קיימת סביבה פתוחה $U \subseteq V$ של x כך ש־

$$\psi(V)(\tau|_V) = \big(\psi(U)(\tau)\big)|_V = 0.$$

הואיל והסדרה מדוייקת מעל V, $\tau|_V \in \mathrm{Im}(\varphi(V))$. לכן קיים $\sigma \in \mathcal{F}(V)$ כך ש־$\varphi(V)(\sigma) = \tau|_V$. אזי

$$\varphi_x(\sigma_x) = \big(\varphi(V)(\sigma)\big)_x = \big(\tau|_V\big)_x = \tau_x = \gamma.$$

לכן $\gamma \in \mathrm{Im}(\varphi_x)$. לכן $\mathrm{Ker}(\psi_x) \subseteq \mathrm{Im}(\varphi_x)$.

מכיון ש־$\psi \circ \varphi(U) = 0$ לכל $U \in \mathrm{Open}(X)$, $\psi \circ \varphi = 0$ ולכן $\psi_x \circ \varphi_x = (\psi \circ \varphi)_x = 0$. לכן $\mathrm{Im}(\varphi_x) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi_x)$.

לכן $\mathrm{Im}(\varphi_x) = \mathrm{Ker}(\psi_x)$. ∎

תוצאה 1.4.4: *יהי $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ מורפיזם של קדם־אלומות ו־$x \in X$. נשתמש בסימוני למה 1.4.2. אזי:*

(1) *הסדרה הבאה של הומומורפיזמים של חבורות אבליות הנה מדוייקת:*

$$0 \longrightarrow \mathrm{pKer}(\varphi)_x \xrightarrow{\imath_x} \mathcal{F}_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{q_x} \mathrm{pCoker}(\varphi)_x \longrightarrow 0$$

(2) $\mathrm{Ker}(\varphi_x) \cong \mathrm{Ker}(\varphi)_x$ ו־$\jmath_x\big(\mathrm{pIm}(\varphi)_x\big) = \mathrm{Im}(\varphi_x)$.

הוכחה:

(1) נובע מהגדרת pKer ו־pCoker, ולמה 1.4.3.

(2) לפי (1), $\mathrm{Im}(\imath_x) = \mathrm{Ker}(\varphi_x)$ ו־$\imath_x$ חח"ע, ולכן $\imath_x\colon \mathrm{Ker}(\varphi)_x \cong \mathrm{Ker}(\varphi_x)$.

מכיון ש־$\mathrm{pIm}(\varphi) = \mathrm{Ker}(q)$, ניתן להשתמש ב־(1) (עם q במקום φ ו־$\jmath$ במקום $\imath$) ולהסיק כי

$$\jmath_x\big(\mathrm{pIm}(\varphi)_x\big) = \mathrm{Ker}(q_x) = \mathrm{Im}(\varphi_x). \quad ∎$$

כעת נבצע את המעבר לאלומות.

למה 1.4.5: *יהי $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ מורפיזם של אלומות. אזי $\mathrm{pKer}(\varphi)$ הנה אלומה.*

הוכחה: תהי $U \in \mathrm{Open}(X)$ ויהי $\{U_i\}$ כיסוי פתוח של U.

יהי $\sigma \in \mathrm{pKer}(\varphi)(U)$ כך ש־$\sigma|_{U_i} = 0$ לכל i. מכיון ש־$\sigma \in \mathcal{F}(U)$ ו־$\mathcal{F}$ אלומה, $\sigma = 0$.

נניח כי $\sigma_i \in \mathrm{pKer}(U_i)$ לכל i מסכימים על החיתוכים. מכיון ש־$\mathcal{F}$ אלומה ו־$\sigma_i \in \mathcal{F}(U_i)$, קיים $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ כך ש־$\sigma|_{U_i} = \sigma_i$ לכל i. אזי לכל i, מכיון ש־$\sigma_i \in \mathrm{pKer}(U_i)$,

$$\varphi(U)(\sigma)|_{U_i} = \varphi(U_i)(\sigma_i) = 0.$$

מכיון ש־$\mathcal{G}$ אלומה, $\varphi(U)(\sigma) = 0$, ולכן $\sigma \in \mathrm{pKer}(\varphi)(U)$. ∎

סימון 1.4.6: אם $\varphi\colon \mathcal{F}\to\mathcal{G}$ מורפיזם של אלומות, נסמן את האלומה $\mathrm{pKer}(\varphi)$ ב־$\mathrm{Ker}(\varphi)$.

דוגמה 1.4.7: ניתן דוגמה למורפיזם φ של אלומות כך ש־$\mathrm{pCoker}(\varphi)$ **אינה** אלומה.

יהי $X=\mathbb{C}$. עבור כל $U\in\mathrm{Open}(X)$, תהי $\mathcal{H}(U)$ חבורת הפונקציות ההולומורפיות על U. הואיל וההולומורפיות היא תכונה מקומית, $\mathcal{H}$ היא אלומה. נגדיר $\varphi\colon\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ ע"י $\varphi(U)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\colon\mathcal{H}(U)\to\mathcal{H}(U)$. אז φ מורפיזם של אלומות. נסמן $\mathcal{C}=\mathrm{pCoker}(\varphi)$.

יהי $x\in X$. אם U עיגול פתוח מסביב ל־x, אזי מכיון ש־U פשוט־קשר, כל פונקציה הולומורפית על U הנה נגזרת של פונקציה כלשהי, ולכן $\varphi(U)$ הנו על. הואיל ואוסף העיגולים הנו בסיס של סביבות פתוחות של x ב־X, φ_x הנו על. אם נביט בסדרה המדוייקת שמתוארת בתוצאה 1.4.4 נראה כי $\mathcal{C}_x=0$ לכל $x\in X$.

תהי $U=X\setminus\{0\}$. נגדיר $f\in\mathcal{H}(U)$ להיות $f(z)=z^{-1}$. מכיון שלא קיימת פונקציה הולומורפית על U שנגזרתה היא f, $\mathrm{Im}(\varphi(U))\neq\mathcal{H}(U)$, ולכן $\mathcal{C}(U)\neq 0$.

לכן $\mathcal{C}$ הנה קדם אלומה שונה מאפס כך ש־$\mathcal{C}_x=0$ לכל $x\in X$. לפי למה 1.3.2, $\mathcal{C}$ אינה אלומה. ∎

הגדרה 1.4.8: יהי $\varphi\colon\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ מורפיזם של אלומות. נגדיר את $\mathrm{Coker}(\varphi)$ להיות האלומה המצורפת ל־$\mathrm{pCoker}(\varphi)$.

הגדרה 1.4.9: יהי $\varphi\colon\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ מורפיזם של אלומות. נגדיר את $\mathrm{Im}(\varphi)$ להיות תת־האלומה של $\mathcal{G}$ הנוצרת ע"י $\mathrm{pIm}(\varphi)$, כבמשפטון 1.2.3.

למה 1.4.10: *יהי $\varphi\colon\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ מורפיזם של אלומות. אזי קיימים מורפיזמים של אלומות*

$$\mathrm{Ker}(\varphi)\xhookrightarrow{\imath}\mathcal{F}\xrightarrow{\varphi_1}\mathrm{Im}(\varphi)\xhookrightarrow{\jmath'}\mathcal{G}\xrightarrow{q'}\mathrm{Coker}(\varphi)$$

שמקיימים את התכונות האוניברסליות של גרעין, גרעין נלווה ותמונה של מורפיזם בקטגוריה $\mathbf{Sh}(X,\mathbf{Ab})$. באופן מפורש:

(1) $\varphi\circ\imath=0$. *אם $\psi\colon\mathcal{H}\to\mathcal{F}$ מורפיזם של אלומות שמקיים $\varphi\circ\psi=0$ אזי קיים מורפיזם יחיד ψ' כך שהתרשים הבא חילופי:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(\varphi) \arrow[rr, "\imath"] & & \mathcal{F} \\
& \mathcal{H} \arrow[ul, dashed, "\psi'"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

(2) $q'\circ\varphi=0$. *אם $\psi\colon\mathcal{G}\to\mathcal{H}$ מורפיזם של אלומות שמקיים $\psi\circ\varphi=0$, אזי קיים מורפיזם יחיד ψ' כך שהתרשים הבא חילופי:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[rr, "q'"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \mathrm{Coker}(\varphi) \arrow[dl, dashed, "\psi'"] \\
& \mathcal{H} &
\end{tikzcd}$$

(3) $\mathrm{Im}(\varphi)$ *(ביחד עם ההעתקה $\jmath'$) הנה הגרעין של* $q'\colon \mathcal{G} \to \mathrm{Coker}(\varphi)$.

הוכחה: נישאר בסימוני למה 1.4.2.

הואיל ו־$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{pKer}(\varphi)$, המורפיזם $\imath$ הנו אותו $\imath$ כבלמה 1.4.2.

המורפיזם φ_1 הנו ההרכבה של המורפיזם $\varphi_0\colon \mathcal{F} \to \mathrm{pIm}(\varphi)$ עם האילום $\mathrm{pIm}(\varphi) \hookrightarrow \mathrm{Im}(\varphi)$.

המורפיזם $\jmath'$ הנו השיכון $\mathrm{Im}(\varphi) \hookrightarrow \mathcal{G}$.

המורפיזם q' הנו ההרכבה של $q\colon \mathcal{G} \to \mathrm{pCoker}(\varphi)$ עם מורפיזם האילום $\eta\colon \mathrm{pCoker}(\varphi) \to \mathrm{Coker}(\varphi)$.

במילים אחרות, ההגדרות הן כך שהתרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(\varphi) \arrow[r, hook, "\imath"] & \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & \mathrm{pIm}(\varphi) \arrow[d, hook] \arrow[dr, hook, "\jmath"] & & \\
& & \mathrm{Im}(\varphi) \arrow[r, hook, "\jmath'"] & \mathcal{G} \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "q'"'] & \mathrm{pCoker}(\varphi) \arrow[d, "\eta"] \\
& & & & \mathrm{Coker}(\varphi)
\end{tikzcd}$$

נבדוק כעת את התכונות האוניברסליות.

(1) נובע מלמה 1.4.2, הואיל ו־$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{pKer}(\varphi)$.

(2) ראשית, $q \circ \varphi = 0$ ולכן $q' \circ \varphi = \eta \circ q \circ \varphi = 0$. יהי $\psi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ מורפיזם של קדם־אלומות שמקיים $\psi \circ \varphi = 0$. אם נסתכל על ψ ו־φ כמורפיזמים של קדם־אלומות, אז לפי התכונה האוניברסלית של $\mathrm{pCoker}(\varphi)$ קיים מורפיזם יחיד ψ_0 של קדם אלומות כך שהתרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \mathrm{pCoker}(\varphi) \arrow[dl, dashed, "\psi_0"] \\
& \mathcal{H} &
\end{tikzcd}$$

לפי התכונה האוניברסלית של אילום, קיים מורפיזם יחיד ψ' כך שהתרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{pCoker}(\varphi) \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\psi_0"'] & & \mathrm{Coker}(\varphi) \arrow[dl, dashed, "\psi'"] \\
& \mathcal{H} &
\end{tikzcd}$$

צירוף שני התרשימים הקודמים מראה ש־ψ' הנו המורפיזם היחיד כך שהתרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[rr, "\eta\circ q = q'"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \mathrm{Coker}(\varphi) \arrow[dl, dashed, "\psi'"] \\
& \mathcal{H} &
\end{tikzcd}$$

(3) לפי הגדרה 1.4.1, לכל $U \in \mathrm{Open}(X)$ $q(U) \circ \jmath(U) = 0$ ולכן $q'(U) \circ \jmath(U) = 0$. לכן $\mathrm{pIm}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(q')$. הואיל ו־$\mathrm{Ker}(q')$ הנה תת־אלומה של $\mathcal{G}$, נובע ממשפטון 1.2.3 כי $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(q')$.

יהי $x \in X$.

($\star$) לפי משפטון 1.2.3, $\mathrm{pIm}(\varphi)_x = \mathrm{Im}(\varphi)_x$.

($\star$) לפי תוצאה 1.4.4, $\mathrm{Im}(\varphi_x) = \mathrm{pIm}(\varphi)_x$.

($\star$) לפי תוצאה 1.4.4, $\mathrm{Im}(\varphi_x) = \mathrm{Ker}(q_x)$.

($\star$) לפי למה 1.2.6, η_x הנו איזומורפיזם, ולכן $\mathrm{Ker}(q_x) = \mathrm{Ker}(q'_x)$.

($\star$) לפי תוצאה 1.4.4 (עבור $\varphi = q'$), $\mathrm{Ker}(q'_x) = \mathrm{Ker}(q')_x$.

צירוף של חמשת הסעיפים הנ"ל מראה כי $\mathrm{Im}(\varphi)_x = \mathrm{Ker}(q')_x$.

לפי למה 1.3.3, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(q')$. ∎

למה 1.4.11: *יהי $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ מורפיזם של אלומות ו־$x \in X$. נישאר בסימוני הלמה הקודמת. אזי הסדרה הבאה של הומומורפיזמים של חבורות אבליות הנה מדוייקת:*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi)_x \xrightarrow{\imath_x} \mathcal{F}_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{q'_x} \mathrm{Coker}(\varphi)_x \longrightarrow 0$$

בנוסף, $\mathrm{Im}(\varphi_x) = \mathrm{Im}(\varphi)_x$.

הוכחה: הואיל ו־$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{pKer}(\varphi)$, דיוק ב־$\mathrm{Ker}(\varphi)_x$ וב־$\mathcal{F}_x$ נובע מתוצאה 1.4.4.

נזכיר כי $q'_x = (\eta \circ q)_x = \eta_x \circ q_x$ כאשר $\eta \colon \mathrm{pCoker}(\varphi) \to \mathrm{Coker}(\varphi)$ הנו מורפיזם האילום. לפי למה 1.2.6, η_x הנו איזומורפיזם. לכן $\mathrm{Ker}(q'_x) = \mathrm{Ker}(q_x)$. לכן לפי תוצאה 1.4.4, $\mathrm{Ker}(q'_x) = \mathrm{Im}(\varphi_x)$, ולכן הסדרה מדוייקת ב־$\mathcal{G}_x$. כמו כן, לפי תוצאה 1.4.4, q_x הנו על, ולכן גם q'_x הנו על. לכן הסדרה מדוייקת גם ב־$\mathrm{Coker}(\varphi)_x$.

לכן הסדרה אכן מדוייקת.

לבסוף, לפי תוצאה 1.4.4, $\mathrm{Im}(\varphi_x) = \mathrm{pIm}(\varphi)_x$ לכל $x \in X$. לפי סעיף (3) של משפטון 1.2.3, $\mathrm{Im}(\varphi)_x = \mathrm{pIm}(\varphi)_x$. ∎

הגדרה 1.4.12: יהי $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ מורפיזם של אלומות. נאמר כי φ הנו **מוני** (monic) אם $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$. נאמר כי φ הנו **אפי** (epic) אם $\mathrm{Coker}(\varphi) = 0$.

למה 1.4.13: *יהי $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ מורפיזם של אלומות. אזי*

(1) *φ מוני אם ורק אם φ_x חח"ע לכל $x \in X$.*

(2) *φ אפי אם ורק אם φ_x הנו על לכל $x \in X$.*

(3) φ *אפי אם ורק אם* $\mathcal{G} = \mathrm{Im}(\varphi)$.

הוכחה:

(1) לפי תוצאה 1.4.4, $\mathrm{Ker}(\varphi)_x \cong \mathrm{Ker}(\varphi_x)$ לכל $x \in X$. אם $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$, אזי ודאי $\mathrm{Ker}(\varphi)_x = 0$ לכל x, ולכן $\mathrm{Ker}(\varphi_x) = 0$ לכל x, כלומר φ_x חח"ע לכל x.

להיפך, אם φ_x חח"ע לכל x, אזי $\mathrm{Ker}(\varphi)_x = 0$ לכל x. לפי למה 1.3.2, $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$.

(2) לפי למה 1.4.13, φ_x הנו על לכל $x \in X$ אם ורק אם $\mathrm{Coker}(\varphi)_x = 0$ לכל $x \in X$. לפי למה 1.3.2, תנאי זה שקול לתנאי $\mathrm{Coker}(\varphi) = 0$.

(3) אם $\mathrm{Coker}(\varphi) = 0$, אזי לפי סעיף (3) של למה 1.4.10, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathcal{G}$.

להיפך, אם $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathcal{G}$, אזי לפי למה 1.4.10, $\mathcal{G} \to \mathrm{Coker}(\varphi)$ הנו מורפיזם האפס. לפי הסדרה המדוייקת בלמה 1.4.11, $\mathrm{Coker}(\varphi)_x = 0$ לכל $x \in X$. לכן $\mathrm{Coker}(\varphi) = 0$. ∎

למה 1.4.14: *יהי* $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *מורפיזם של אלומות. אזי* φ *איזומורפיזם אם ורק אם* φ *מוני ואפי.*

הוכחה: לפי משפטון 1.3.5, φ הנו איזומורפיזם אם ורק אם φ_x הנו איזומורפיזם לכל $x \in X$. תנאי זה שקול לכך ש־φ_x הנו חח"ע ועל לכל $x \in X$. לפי למה 1.4.13, תנאי זה שקול לכך ש־φ מוני ואפי. ∎

הגדרה 1.4.15: תהי $\mathcal{F}$ תת אלומה של אלומה $\mathcal{G}$, ויהי $\imath_{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ השיכון. נגדיר את האלומה $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ להיות

$$\mathcal{G}/\mathcal{F} = \mathrm{Coker}\big(\imath_{\mathcal{F}}\big).$$

נשים לב כי $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ היא בדיוק האלומה המצורפת לקדם האלומה $U \mapsto \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$.

למה 1.4.16: *תהי* $\mathcal{F}$ *תת אלומה של אלומה* $\mathcal{G}$*, ויהי* $x \in X$*. אזי* $(\mathcal{G}/\mathcal{F})_x \cong \mathcal{G}_x/\mathcal{F}_x$.

הוכחה: יהי $\imath_{\mathcal{F}}$ השיכון. אזי $\mathrm{Ker}(\imath_{\mathcal{F}}) = 0$, ולכן לפי תוצאה 1.4.4 (עבור $\varphi = \imath_{\mathcal{F}}$), הסדרה הבאה הנה מדוייקת:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_x \xrightarrow{(\imath_F)_x} \mathcal{G}_x \longrightarrow (\mathcal{G}/\mathcal{F})_x \longrightarrow 0$$

לכן הטענה נכונה. ∎

1.5 סדרות מדויקות של אלומות.

הגדרה 1.5.1: תהי

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

סדרה של מורפיזמים של אלומות. נאמר כי הסדרה הנה מדוייקת (ב־$\mathcal{G}$) אם $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Im}(\varphi)$ (כאשר השויון הנו בין תת־אלומות של $\mathcal{G}$).

משפטון 1.5.2: *תהי*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \qquad (S)$$

סדרה של מורפיזמים של אלומות. לכל $x \in X$, תהי S_x הסדרה

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{H}_x \qquad (S_x)$$

אזי S מדוייקת אם ורק אם S_x מדוייקת לכל $x \in X$.

הוכחה: נניח כי S מדוייקת. אזי $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Im}(\varphi)$. לפי למה 1.4.11,

$$\mathrm{Ker}(\psi_x) = \mathrm{Ker}(\psi)_x = \mathrm{Im}(\varphi)_x = \mathrm{Im}(\varphi_x).$$

לכן S_x מדוייקת לכל $x \in X$.

להיפך, נניח כי S_x מדוייקת לכל $x \in X$. תהי $U \in \mathrm{Open}(X)$. יהי $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ ויהי $\tau = (\psi \circ \varphi)(U)(\sigma) \in \mathcal{H}(U)$. אז לכל $x \in U$,

$$\tau_x = (\psi_x \circ \varphi_x)(\sigma_x) = 0.$$

לפי למה 1.2.4, $\tau = 0$. לכן $\psi \circ \varphi = 0$. לכן לכל $U \in \mathrm{Open}(X)$,

$$\mathrm{pIm}(\varphi)(U) = \mathrm{Im}(\varphi(U)) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi(U)).$$

הואיל ו־$\mathrm{Im}(\varphi)$ נוצרת ע"י $\mathrm{pIm}(\varphi)$, $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi)$, כלומר $\mathrm{Im}(\varphi)$ הנה תת־אלומה של $\mathrm{Ker}(\psi)$. לפי למה 1.4.11 ולפי הנחת דיוק S_x,

$$\mathrm{Im}(\varphi)_x = \mathrm{Im}(\varphi_x) = \mathrm{Ker}(\psi_x) = \mathrm{Ker}(\psi)_x$$

לכל $x \in X$. לפי למה 1.3.3, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$. לכן S מדוייקת. ∎

תוצאה 1.5.3: *אם $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ מורפיזם של אלומות, אזי הסדרה*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \xrightarrow{\imath} \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{q'} \mathrm{Coker}(\varphi) \longrightarrow 0$$

הנה מדוייקת.

הוכחה: לפי למה 1.4.11, לכל $x \in X$ סדרת הגבעולים המתאימה הנה מדוייקת. לפי משפטון 1.5.2, הסדרה הנ"ל הנה מדוייקת. ∎

משפטון 1.5.4 **(דיוק משמאל של פונקטור החתכים הגלובלים):** *תהי*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

סדרה מדוייקת של מורפיזמים של אלומות. אזי לכל $U \in \mathrm{Open}(X)$,

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi(U)} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi(U)} \mathcal{H}(U)$$

הנה סדרה מדוייקת של הומומורפיזמים של חבורות אבליות.

במילים אחרות, הפונקטור $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(U)$ *מתוך* $\mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab})$ *לתוך* $\mathbf{Ab}$ *הנו מדויק משמאל.*

הוכחה:

א: **יהי** $K = \mathrm{pKer}(\varphi)$. **הואיל ו־**$K = \mathrm{Ker}(\varphi)$, $K = \mathrm{Im}(0) = 0$. **לכן** $\mathrm{Ker}(\varphi(U)) = K(U) = 0$, **ולכן** $\varphi(U)$ **חח"ע.**

ב: **הואיל ו־**$\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Im}(\varphi)$, $\psi \circ \varphi$ **הנו מורפיזם האפס, ולכן** $\psi(U) \circ \varphi(U) = 0$.

ג: **יהי** $\tau \in \mathrm{Ker}\big(\psi(U)\big)$. **אזי** $\tau \in \mathrm{Ker}(\psi)(U) = \mathrm{Im}(\varphi)(U)$. **לפי הגדרת** $\mathrm{Im}(\varphi)$ **(ראה משפטון** 1.2.3**), קיים כיסוי פתוח** $U = \bigcup_i U_i$ **כך ש־**$\tau|_{U_i} \in \mathrm{Im}\big(\varphi(U_i)\big)$ **לכל** i. **לכן לכל** i **קיים** $\sigma_i \in \mathcal{F}(U_i)$ **כך ש־**$\tau|_{U_i} = \varphi(U_i)(\sigma_i)$. **אזי עבור כל** i, j,

$$\varphi(U_i \cap U_j)\big(\sigma_i|_{U_i \cap U_j}\big) = \tau|_{U_i \cap U_j} = \varphi(U_i \cap U_j)\big(\sigma_j|_{U_i \cap U_j}\big).$$

כפי שהראנו $\varphi(U_i \cap U_j)$ **חח"ע, ולכן**

$$\sigma_i|_{U_i \cap U_j} = \sigma_j|_{U_i \cap U_j}.$$

הואיל ו־$\mathcal{F}$ **אלומה קיים** $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ **כך ש־**$\sigma|_{U_i} = \sigma_i$ **לכל** i. **אזי עבור כל** i,

$$\varphi(U)(\sigma)|_{U_i} = \varphi(U_i)\big(\sigma|_{U_i}\big) = \varphi(U_i)(\sigma_i) = \tau|_{U_i}.$$

הואיל ו־$\mathcal{G}$ **אלומה,**

$$\varphi(U)(\sigma) = \tau.$$

לכן $\tau \in \mathrm{Im}\big(\varphi(U)\big)$. **לכן** $\mathrm{Ker}\big(\psi(U)\big) = \mathrm{Im}\big(\varphi(U)\big)$. ∎

דוגמה 1.5.5: פונקטור החתכים הגלובלים אינו בהכרח מדוייק מימין:

נשתמש במורפיזם φ שניתן בדוגמה 1.4.7. יהיו $\mathcal{K} = \mathrm{Ker}(\varphi)$ ו־$\mathcal{C} = \mathrm{Coker}(\varphi)$. כפי שהראנו, $\mathrm{pCoker}(\varphi)_x = 0$ לכל $x \in X$. לפי למה 1.2.6, $\mathcal{C}_x = 0$ לכל x, ולכן לפי למה 1.3.2, $\mathcal{C} = 0$. לפי תוצאה 1.5.3, הסדרה

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\imath} \mathcal{H} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

הנה מדוייקת. אולם כפי שראינו, אם $U = X \smallsetminus \{0\}$, אזי $\varphi(U)$ אינו על, ולכן הסדרה

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(U) \xrightarrow{\imath(U)} \mathcal{H}(U) \xrightarrow{\varphi(U)} \mathcal{H}(U) \longrightarrow 0$$

אינה מדוייקת ב־$\mathcal{H}(U)$ השני. ∎

למה 1.5.6: *תהי*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \tag{1}$$

סדרה של מורפיזמים של אלומות כך שלכל $U \in \mathrm{Open}(X)$, הסדרה

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi(U)} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi(U)} \mathcal{H}(U)$$

הנה מדוייקת. אזי הסדרה (1) מדוייקת.

הוכחה: לכל $U \in \mathrm{Open}(X)$, $\mathrm{Im}(\varphi(U)) = \mathrm{Ker}(\psi(U))$. לכן קיים שויון של קדם אלומות

$$.\mathrm{pIm}(\varphi) = \mathrm{pKer}(\psi)$$

אולם $\mathrm{pKer}(\psi)$ הנה אלומה, ולכן גם $\mathrm{pIm}(\varphi)$ הנה אלומה. לכן

$$,\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{pIm}(\varphi) = \mathrm{pKer}(\psi) = \mathrm{Ker}(\psi)$$

ולכן (1) מדוייקת. ∎

1.6 שינוי מרחב הבסיס: תמונה ישרה.

בסעיף זה נקבע העתקה רציפה $f\colon X \to Y$ בין מרחבים טופולוגים.

הגדרה 1.6.1: תהי $\mathcal{F}$ קדם אלומה מעל X. נגדיר את $f_*\mathcal{F}$ מעל Y באופן הבא: אם $V \in \mathrm{Open}(Y)$, נגדיר

$$f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}\big(f^{-1}(V)\big).$$

אם $V, V' \in \mathrm{Open}(Y)$ כך ש־$V \subseteq V'$, אזי $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(V')$, ולכן ניתן להגדיר

$$\mathrm{res}^{f_*\mathcal{F}}_{V',V} = \mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V'),f^{-1}(V)} \colon \mathcal{F}\big(f^{-1}(V')\big) \to \mathcal{F}\big(f^{-1}(V)\big).$$

אזי $f_*\mathcal{F}$ הנה קדם אלומה מעל Y.

למה 1.6.2: *אם $\mathcal{F}$ אלומה מעל X, אזי $f_*\mathcal{F}$ אלומה מעל Y.*

הוכחה: ההעתקה $f^{-1}\colon \mathrm{Open}(Y) \to \mathrm{Open}(X)$ שומרת על חיתוכים ואיחודים. לכן את תנאי האלומה של $f_*\mathcal{F}$ מעל Y ניתן לבדוק ע"י מעבר חזרה ל־$\mathcal{F}$ מעל X בעזרת f^{-1}. ∎

הגדרה 1.6.3: יהי $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ מורפיזם של קדם אלומות מעל X. לכל $V \in \mathrm{Open}(Y)$, נגדיר את

$$(f_*\varphi)(V)\colon f_*\mathcal{F}(V) \to f_*\mathcal{G}(V)$$

להיות ההומומורפיזם $\varphi(f^{-1}(V))\colon \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \to \mathcal{G}(f^{-1}(V))$. ברור כי $f_*\varphi$ מתחלף עם צמצומים, ולכן $f_*\varphi\colon f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{G}$ הנו מורפיזם של קדם אלומות.

למה 1.6.4: *ההשמות*

$$\mathcal{F} \mapsto f_*\mathcal{F}$$
$$\varphi \mapsto f_*\varphi$$

מגדירות פונקטור אדיטיבי [1]

$$f_*\colon \mathbf{Presh}(X, \mathbf{Ab}) \to \mathbf{Presh}(Y, \mathbf{Ab})$$

שצמצומו לקטגוריית האלומות הנו פונקטור

$$f_*\colon \mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab}) \to \mathbf{Sh}(Y, \mathbf{Ab}).$$

הוכחה: עבור כל קדם אלומה $\mathcal{F}$ ומורפיזמים φ, ψ, התכונות $f_*\mathrm{id}_{\mathcal{F}} = \mathrm{id}_{f_*\mathcal{F}}$ ו־ $f_*(\varphi \circ \psi) = (f_*\varphi) \circ (f_*\psi)$ נובעות מההגדרות, וכך גם האדיטיביות. הטענה האחרונה נובעת מלמה 1.6.2. ∎

---

1 כלומר $f_*(\varphi_1 + \varphi_2) = f_*\varphi_1 + f_*\varphi_2$

למה 1.6.5: *אם* $g\colon Y \to Z$ *הנה העתקה רציפה נוספת, אזי* $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

הוכחה: ברור. ∎

משפטון 1.6.6: *הפונקטור* $f_*\colon \mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab}) \to \mathbf{Sh}(Y, \mathbf{Ab})$ *הנו מדוייק משמאל.*

הוכחה: מתוך טענה 7.6 בעמוד 55 של [Ten].

תהי

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

סדרה מדוייקת של מורפיזמים של אלומות מעל X. תהי $V \in \mathrm{Open}(X)$. לפי משפטון 1.5.4, הסדרה

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \xrightarrow{\varphi(f^{-1}(V))} \mathcal{G}(f^{-1}(V)) \xrightarrow{\psi(f^{-1}(V))} \mathcal{H}(f^{-1}(V))$$

הנה מדוייקת. סדרה זו היא בדיוק

$$0 \longrightarrow f_*\mathcal{F}(V) \xrightarrow{f_*\varphi(V)} f_*\mathcal{G}(V) \xrightarrow{f_*\psi(V)} f_*\mathcal{H}(V)$$

לכן, לפי למה 1.5.6, הסדרה

$$0 \longrightarrow f_*\mathcal{F} \xrightarrow{f_*\varphi} f_*\mathcal{G} \xrightarrow{f_*\psi} f_*\mathcal{H}$$

של מורפיזמים של אלומות מעל Y הנה מדוייקת. ∎

דוגמה 1.6.7: יהי Y מרחב בעל נקודה בודדת. אזי $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}(Y)$ הנו איזומורפיזם מתוך $\mathbf{Sh}(Y, \mathbf{Ab})$ לתוך $\mathbf{Ab}$. אם $f\colon X \to Y$ הנה ההעתקה הקבועה, אזי תחת האיזומורפיזם הנ"ל, הפונקטור f_* מתאים לפונקטור $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X)$ מתוך $\mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab})$ לתוך $\mathbf{Ab}$. כפי שראינו בדוגמה 1.5.5, פונקטור זה אינו בהכרח מדוייק מימין, ולכן גם f_* אינו בהכרח מדוייק מימין. ∎

1.7 שינוי מרחב הבסיס: תמונה הופכית.

נמשיך להניח כי $f\colon X \to Y$ הנה העתקה רציפה בין מרחבים טופולוגים.

הגדרה 1.7.1: תהי $\mathcal{G}$ אלומה מעל Y. נגדיר את קדם האלומה $f_0^{-1}\mathcal{G}$ מעל X באופן הבא:

עבור $U \in \mathrm{Open}(X)$, נגדיר

$$c(U) = \{V \in \mathrm{Open}(Y) \mid V \supseteq f(U)\}.$$

זוהי קבוצה מכוונת ע"י הכלה. נגדיר

$$f_0^{-1}\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{V\in c(U)} \mathcal{G}(V).$$

לכל $V \in c(U)$, נגדיר את $\lambda^{\mathcal{G}}_{U,V}\colon \mathcal{G}(V) \to f_0^{-1}\mathcal{G}(U)$ להיות ההומומורפיזם הטבעי.

אם $U', U \in \mathrm{Open}(X)$ כך ש־$U' \subseteq U$, אזי $c(U) \subseteq c(U')$. עבור כל $V, V' \in c(U)$ כך ש־$V' \subseteq V$ התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(V) \arrow[rr, "\mathrm{res}^{\mathcal{G}}_{V,V'}"] \arrow[dr, "\lambda^{\mathcal{G}}_{U',V}"'] & & \mathcal{G}(V') \arrow[dl, "\lambda^{\mathcal{G}}_{U',V'}"] \\ & f_0^{-1}\mathcal{G}(U') & \end{tikzcd} \tag{1}$$

לכן קיים הומומורפיזם יחיד

$$\mathrm{res}^{f_0^{-1}\mathcal{G}}_{U,U'}\colon f_0^{-1}\mathcal{G}(U) \to f_0^{-1}\mathcal{G}(U')$$

כך שלכל $V \in c(U)$ התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{G}(V) \arrow[dl, "\lambda^{\mathcal{G}}_{U,V}"'] \arrow[dr, "\lambda^{\mathcal{G}}_{U',V}"] & \\ f_0^{-1}\mathcal{G}(U) \arrow[rr, "\mathrm{res}^{f_0^{-1}\mathcal{G}}_{U,U'}"] & & f_0^{-1}\mathcal{G}(U') \end{tikzcd} \tag{2}$$

מהיחידות נובע כי $\mathrm{res}^{f_0^{-1}\mathcal{G}}$ שומר על הרכבות של הכלות של קבוצות פתוחות, ולכן $f_0^{-1}\mathcal{G}$ הנה קדם־אלומה מעל X.

הגדרה 1.7.2: עבור אלומה $\mathcal{G}$ מעל Y, נגדיר את $f^{-1}\mathcal{G}$ להיות האלומה המצורפת ל־$f_0^{-1}\mathcal{G}$ מעל X.

הגדרה 1.7.3: תהי $\mathcal{G}$ אלומה מעל Y. יהיו $\mathcal{H}_0 = f_0^{-1}\mathcal{G}$, $\mathcal{H} = f^{-1}\mathcal{G}$, ו־$\eta\colon \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}$ מורפיזם האילום.

תהי $V \in \mathrm{Open}(Y)$. אזי $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ ולכן $V \in c(f^{-1}(V))$. בסימוני הגדרה 1.7.1, קיים הומומורפיזם

$$\lambda^{\mathcal{G}}(V) = \lambda^{\mathcal{G}}_{f^{-1}(V),V}\colon \mathcal{G}(V) \longrightarrow \mathcal{H}_0(f^{-1}(V)) = f_*\mathcal{H}_0(V).$$

אם $V, V' \in \mathrm{Open}(Y)$ כך ש־$V' \subseteq V$, אזי

$$\begin{aligned} \mathrm{res}^{f_*\mathcal{H}_0}_{V,V'} \circ \lambda^{\mathcal{G}}(V) &= \mathrm{res}^{\mathcal{H}_0}_{f^{-1}(V),f^{-1}(V')} \circ \lambda^{\mathcal{G}}(V) \\ &= \lambda^{\mathcal{G}}_{f^{-1}(V'),V} \\ &= \lambda^{\mathcal{G}}_{f^{-1}(V'),V'} \circ \mathrm{res}^{\mathcal{G}}_{V,V'} \\ &= \lambda^{\mathcal{G}}(V') \circ \mathrm{res}^{\mathcal{G}}_{V,V'} \end{aligned}$$

כאשר השויון השני והשלישי נובעים מ־(2) ו־(1) בהגדרה $1.7.1$, בהתאמה. לכן $\lambda^{\mathcal{G}}\colon \mathcal{G} \to f_*\mathcal{H}_0$ הנו מורפיזם של קדם־אלומות.

נגדיר את מורפיזם האלומות

$$\hat{\lambda}^{\mathcal{G}}\colon \mathcal{G} \to f_*\mathcal{H}$$

ע"י $\hat{\lambda}^{\mathcal{G}} = (f_*\eta) \circ \lambda^{\mathcal{G}}$.

טענה $1.7.4$: *נשאר בסימוני הגדרה* $1.7.3$. *תהי* $\mathcal{F}$ *אלומה מעל* X, *ויהי* $\mu\colon \mathcal{G} \to f_*\mathcal{F}$ *מורפיזם של אלומות מעל* Y. *אזי קיים מורפיזם יחיד* $\hat{\mu}\colon f^{-1}\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ *של אלומות מעל* X *כך שהתרשים הבא חילופי:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[rr, "\hat{\lambda}^{\mathcal{G}}"] \arrow[dr, "\mu"'] & & f_*f^{-1}\mathcal{G} \arrow[dl, "f_*\hat{\mu}"] \\
& f_*\mathcal{F} &
\end{tikzcd}$$

הוכחה: תהי $U \in \mathrm{Open}(X)$. לכל $V \in c(U)$, המורפיזם μ נותן הומומורפיזם

$$\mu(V)\colon \mathcal{G}(V) \to f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V)).$$

הואיל ו־$f(U) \subseteq V$, מתקיים $U \subseteq f^{-1}(V)$, ולכן ניתן להגדיר הומומורפיזם

$$\theta_{U,V}\colon \mathcal{G}(V) \to \mathcal{F}(U)$$

ע"י

$$\theta_{U,V} = \mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V),U} \circ \mu(V).$$

אם $V, V' \in c(U)$ כך ש־$V' \subseteq V$ אזי מכיון ש־μ מורפיזם, מתקיים

$$\begin{aligned}
\theta_{U,V'} \circ \mathrm{res}^{\mathcal{G}}_{V,V'} &= \mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V'),U} \circ \mu(V') \circ \mathrm{res}^{\mathcal{G}}_{V,V'} \\
&= \mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V'),U} \circ \mathrm{res}^{f_*\mathcal{F}}_{V,V'} \circ \mu(V) \\
&= \mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V'),U} \circ \mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V),f^{-1}(V')} \circ \mu(V) \\
&= \mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V),U} \circ \mu(V) \\
&= \theta_{U,V}.
\end{aligned}$$

לכן התרשים הבא חילופי:

$$
(*)\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(V) \arrow[dd, "\mathrm{res}^{\mathcal{G}}_{V,V'}"'] \arrow[dr, "\theta_{U,V}"] & \\
& \mathcal{F}(U) \\
\mathcal{G}(V') \arrow[ur, "\theta_{U,V'}"'] &
\end{tikzcd}
$$

מהתכונה האוניברסלית של גבול ישר נובע כי קיים הומומורפיזם יחיד

$$\hat{\mu}_0(U)\colon f_0^{-1}\mathcal{G}(U) \to \mathcal{F}(U)$$

כך שהתרשים הבא חילופי לכל $V \in c(U)$:

$$
(**)\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathcal{G}(V) \arrow[dl, "\lambda^{\mathcal{G}}_{U,V}"'] \arrow[dr, "\theta_{U,V}"] & \\
f_0^{-1}\mathcal{G}(U) \arrow[rr, "\hat{\mu}_0(U)"'] & & \mathcal{F}(U)
\end{tikzcd}
$$

יהיו $U, U' \in \mathrm{Open}(X)$ כך ש־$U' \subseteq U$. תהי $V \in c(U)$. אזי

$$
\begin{aligned}
\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{U,U'} \circ \hat{\mu}_0(U) \circ \lambda^{\mathcal{G}}_{U,V} &= \mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{U,U'} \circ \theta_{U,V} \\
&= \mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{U,U'} \circ \mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V),U} \circ \mu(V) \\
&= \mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V),U'} \circ \mu(V) \\
&= \theta_{U',V} \\
&= \hat{\mu}_0(U') \circ \lambda^{\mathcal{G}}_{U',V} \\
&= \hat{\mu}_0(U') \circ \mathrm{res}^{f_0^{-1}\mathcal{G}}_{U,U'} \circ \lambda^{\mathcal{G}}_{U,V}
\end{aligned}
$$

כאשר השויון הראשון, השני, הרביעי, החמישי והשישי נובעים מהתרשים $(**)$, מהגדרת $\theta_{U,V}$, מהגדרת $\theta_{U',V}$, מהתרשים $(**)$ והתרשים (2) של הגדרת $1.7.1$, בהתאמה. לכן

$$\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{U,U'} \circ \hat{\mu}_0(U) \circ \lambda^{\mathcal{G}}_{U,V} = \hat{\mu}_0(U') \circ \mathrm{res}^{f_0^{-1}\mathcal{G}}_{U,U'} \circ \lambda^{\mathcal{G}}_{U,V}$$

לכל $V \in c(U)$. לכן

$$\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{U,U'} \circ \hat{\mu}_0(U) = \hat{\mu}_0(U') \circ \mathrm{res}^{f_0^{-1}\mathcal{G}}_{U,U'}.$$

לכן $\hat{\mu}_0\colon f_0^{-1}\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ הנו מורפיזם של קדם־אלומות מעל X.

תהי $V \in \mathrm{Open}(Y)$. אזי $V \in c(f^{-1}(V))$ ולפי $(**)$,

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_0(f^{-1}(V)) \circ \lambda^{\mathcal{G}}_{f^{-1}(V),V} &= \theta_{f^{-1}(V),V} \\ &= \mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V),f^{-1}(V)} \circ \mu(V) \\ &= \mu(V).\end{aligned}$$

לכן התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(V) \arrow[rr, "\lambda^{\mathcal{G}}(V)"] \arrow[dr, "\mu(V)"'] & & f_0^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(V)) \arrow[dl, "\hat{\mu}_0(f^{-1}(V))"] \\ & \mathcal{F}(f^{-1}(V)) & \end{tikzcd}$$

ולכן התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[rr, "\lambda^{\mathcal{G}}"] \arrow[dr, "\mu"'] & & f_*(f_0^{-1}\mathcal{G}) \arrow[dl, "f_*\hat{\mu}_0"] \\ & f_*\mathcal{F} & \end{tikzcd} \tag{$***$}$$

נראה כעת כי $\hat{\mu}_0$ הנו המורפיזם היחיד המקיים תכונה זאת. נניח כי

$$\hat{\nu}_0\colon f_0^{-1}\mathcal{G} \to \mathcal{F}$$

הנו מורפיזם של קדם־אלומות המקיים

$$(f_*\hat{\nu}_0) \circ \lambda^{\mathcal{G}} = \mu.$$

תהי $U \in \mathrm{Open}(X)$. אזי לכל $V \in c(U)$ התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(V) \arrow[rr, "\lambda^{\mathcal{G}}_{f^{-1}(V),V}"] \arrow[dr, "\mu(V)"'] & & f_0^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(V)) \arrow[dl, "\hat{\nu}_0(f^{-1}(V))"] \\ & \mathcal{F}(f^{-1}(V)) & \end{tikzcd}$$

בנוסף, מכיון ש־$U \subseteq f^{-1}(V)$ ו־$\hat{\nu}_0$ מורפיזם, מתקיים

$$\begin{aligned}\hat{\nu}_0(U) \circ \mathrm{res}^{f_0^{-1}\mathcal{G}}_{f^{-1}(V),U} \circ \lambda^{\mathcal{G}}_{f^{-1}(V),V} &= \mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V),U} \circ \hat{\nu}_0(f^{-1}(V)) \circ \lambda^{\mathcal{G}}_{f^{-1}(V),V} \\ &= \mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V),U} \circ \mu(V) \\ &= \theta_{U,V}\end{aligned}$$

כאשר השויון השני והשלישי נובעים מהתרשים החילופי הקודם ומהגדרת $\theta_{U,V}$, בהתאמה. לפי תרשים (2) של הגדרה 1.7.1,

$$\lambda^{\mathcal{G}}_{U,V} = \mathrm{res}^{f_0^{-1}\mathcal{G}}_{f^{-1}(V),U} \circ \lambda^{\mathcal{G}}_{f^{-1}(V),V},$$

ולכן

$$\hat{\nu}_0(U) \circ \lambda^{\mathcal{G}}_{U,V} = \theta_{U,V}$$

לכל $V \in c(U)$. לפי $(**)$, $\hat{\mu}_0(U)$ הנו ההומומורפיזם היחיד בעל התכונה הנ"ל, ולכן $\hat{\mu}_0(U) = \hat{\nu}_0(U)$.

לכן $\hat{\nu}_0 = \hat{\mu}_0$.

לפי התכונה האוניברסלית של אילום, קיים מורפיזם יחיד $\hat{\mu}\colon f^{-1}\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ של אלומות מעל X כך שהתרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} f_0^{-1}\mathcal{G} \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\hat{\mu}_0"'] & & f^{-1}\mathcal{G} \arrow[dl, "\hat{\mu}"] \\ & \mathcal{F} & \end{tikzcd}$$

הואיל ו־f_* פונקטור נאמן (כלומר פועל באופן חח"ע על מורפיזמים), אנו רואים כי $\hat{\mu}$ הנו המורפיזם היחיד כך שהתרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} f_*(f_0^{-1}\mathcal{G}) \arrow[rr, "f_*\eta"] \arrow[dr, "f_*\hat{\mu}_0"'] & & f_*(f^{-1}\mathcal{G}) \arrow[dl, "f_*\hat{\mu}"] \\ & f_*\mathcal{F} & \end{tikzcd}$$

אם נצרף את התרשים $(***)$, נראה כי התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[rr, "(f_*\eta)\circ\lambda^{\mathcal{G}}"] \arrow[dr, "\mu"'] & & f_*(f^{-1}\mathcal{G}) \arrow[dl, "f_*\hat{\mu}"] \\ & f_*\mathcal{F} & \end{tikzcd}$$

לפי הגדרת $\hat{\lambda}^{\mathcal{G}}$, אנו רואים כי הוכחנו את הטענה. ∎

למה 1.7.5: *יהי* $\varphi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ *מורפיזם של אלומות מעל* Y. *אזי קיים מורפיזם יחיד*

$$f^{-1}\varphi\colon f^{-1}\mathcal{G} \to f^{-1}\mathcal{G}'$$

של אלומות מעל X כך שהתרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, "\hat{\lambda}^{\mathcal{G}}"] \arrow[d, "\varphi"'] & f_*f^{-1}\mathcal{G} \arrow[d, "f_*f^{-1}\varphi"] \\ \mathcal{G}' \arrow[r, "\hat{\lambda}^{\mathcal{G}'}"] & f_*f^{-1}\mathcal{G}' \end{tikzcd}$$

ההשמות

$$\mathcal{G} \mapsto f^{-1}\mathcal{G}, \quad \varphi \mapsto f^{-1}\varphi$$

מגדירות פונקטור

$$.f^{-1}\colon \mathbf{Sh}(Y, \mathbf{Ab}) \longrightarrow \mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab})$$

הוכחה: נגדיר $\mathcal{F} = f^{-1}\mathcal{G}'$ ו־$\mu = \hat{\lambda}^{\mathcal{G}'} \circ \varphi$. נגדיר את $f^{-1}\varphi$ להיות המורפיזם היחיד $\hat{\mu}$ שניתן בטענה 1.7.4. אזי התרשים הנ"ל אכן חילופי. תכונות הפונקטור נובעות מיחידות המורפיזם $f^{-1}\varphi$. ∎

למה 1.7.6: *הפונקטור f^{-1} הנו מצורף משמאל לפונקטור f_*. כלומר לכל אלומה $\mathcal{F}$ מעל X ולכל אלומה $\mathcal{G}$ מעל Y קיים איזומורפיזם טבעי*

$$.\Theta_{\mathcal{F},\mathcal{G}}\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(X,\mathbf{Ab})}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(Y,\mathbf{Ab})}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

הוכחה: ההשמה

$$\hat{\mu} \mapsto (f_*\hat{\mu}) \circ \hat{\lambda}^{\mathcal{G}}$$

נותנת העתקה מאגף שמאל לימין. התכונה האוניברסלית בטענה 1.7.4 מציינת בדיוק כי העתקה זו הנה חח"ע ועל.

על מנת להראות טבעיות, צריך להראות כי אם $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ מורפיזם של אלומות מעל X, אזי התרשים הבא הינו חילופי,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \arrow[r, "\Theta_{\mathcal{F},\mathcal{G}}"] \arrow[d, "(-)\circ\varphi"'] & \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \arrow[d, "(-)\circ f_*\varphi"] \\ \mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}') \arrow[r, "\Theta_{\mathcal{F}',\mathcal{G}}"] & \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}') \end{tikzcd}$$

ובאופן דומה עבור מורפיזמים של אלומות מעל Y. הוכחה כללית שנכונה בכל קטגוריה ניתן למצוא במשפט 2 בעמוד 83 של [Mac]. ∎

למה 1.7.7: *יהי* $x \in X$. *לכל אלומה* $\mathcal{G}$ *מעל* Y *קיים איזומורפיזם*

$$\theta_x^{\mathcal{G}}\colon \mathcal{G}_{f(x)} \xrightarrow{\sim} (f^{-1}\mathcal{G})_x$$

כך שאם $\varphi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ *מורפיזם של אלומות מעל* Y *אזי התרשים הבא חילופי:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_{f(x)} \arrow[r, "\theta_x^{\mathcal{G}}"] \arrow[d, "\varphi_{f(x)}"'] & (f^{-1}\mathcal{G})_x \arrow[d, "(f^{-1}\varphi)_x"] \\ \mathcal{G}'_{f(x)} \arrow[r, "\theta_x^{\mathcal{G}'}"] & (f^{-1}\mathcal{G}')_x \end{tikzcd} \tag{$\diamond$}$$

הוכחה: יהי $x \in X$. ראשית, תהי $\mathcal{F}$ קדם־אלומה מעל X. לכל $V \in \mathrm{Open}(Y)$ כך ש־$f(x) \in V$, $x \in f^{-1}(V)$ וקיים ההומומורפיזם

$$\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V),x}\colon (f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \to \mathcal{F}_x.$$

אם $V, V' \in \mathrm{Open}(Y)$ כך ש־$f(x) \in V' \subseteq V$, אזי $\mathrm{res}^{f_*\mathcal{F}}_{V,V'} = \mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V),f^{-1}(V')}$ ולכן התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} f_*\mathcal{F}(V) \arrow[dd, "\mathrm{res}^{f_*\mathcal{F}}_{V,V'}"'] \arrow[dr, "\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V),x}"] & \\ & \mathcal{F}_x \\ f_*\mathcal{F}(V') \arrow[ur, "\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V'),x}"'] & \end{tikzcd}$$

לכן קיים הומומורפיזם יחיד $\rho_x^{\mathcal{F}}$ כך שהתרשים הבא חילופי לכל סביבה פתוחה V של $f(x)$:

$$\begin{tikzcd} & f_*\mathcal{F}(V) \arrow[dl, "\mathrm{res}^{f_*\mathcal{F}}_{V,f(x)}"'] \arrow[dr, "\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V),x}"] & \\ (f_*\mathcal{F})_{f(x)} \arrow[rr, "\rho_x^{\mathcal{F}}"] & & \mathcal{F}_x \end{tikzcd}$$

בנוסף קל לראות כי אם $\psi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ הנו מורפיזם של קדם־אלומות מעל X אזי התרשים הבא הינו חילופי:

$$\begin{tikzcd} (f_*\mathcal{F})_{f(x)} \arrow[r, "\rho_x^{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "(f_*\psi)_{f(x)}"'] & \mathcal{F}_x \arrow[d, "\psi_x"] \\ (f_*\mathcal{F}')_{f(x)} \arrow[r, "\rho_x^{\mathcal{F}'}"] & \mathcal{F}'_x \end{tikzcd} \tag{$\clubsuit$}$$

תהי כעת $\mathcal{G}$ אלומה מעל Y. נשתמש בהגדרת $\rho_x^{\mathcal{F}}$ עבור $\mathcal{F} = f^{-1}\mathcal{G}$ כדי להגדיר

$$\theta_x^{\mathcal{G}} = \rho_x^{f^{-1}\mathcal{G}} \circ \hat{\lambda}^{\mathcal{G}}_{f(x)} \colon \mathcal{G}_{f(x)} \longrightarrow (f^{-1}\mathcal{G})_x ,$$

כאשר $\hat{\lambda}^{\mathcal{G}}$ מוגדר בהגדרה 1.7.3.

אם $\varphi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ מורפיזם של אלומות מעל Y, אזי לפי הגדרת $f^{-1}\varphi$ (בלמה 1.7.5) וההערה הקודמת (עבור $\mathcal{F} = f^{-1}\mathcal{G}$), התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_{f(x)} \arrow[r, "\hat{\lambda}^{\mathcal{G}}_{f(x)}"] \arrow[d, "\varphi_{f(x)}"'] & (f_* f^{-1}\mathcal{G})_{f(x)} \arrow[r, "\rho_x^{f^{-1}\mathcal{G}}"] \arrow[d, "(f_* f^{-1}\varphi)_{f(x)}"] & (f^{-1}\mathcal{G})_x \arrow[d, "(f^{-1}\varphi)_x"] \\
\mathcal{G}'_{f(x)} \arrow[r, "\hat{\lambda}^{\mathcal{G}'}_{f(x)}"] & (f_* f^{-1}\mathcal{G}')_{f(x)} \arrow[r, "\rho_x^{f^{-1}\mathcal{G}'}"] & (f^{-1}\mathcal{G}')_x
\end{tikzcd}$$

לכן התרשים ($\diamond$) אכן חילופי. נותר להוכיח כי $\theta_x^{\mathcal{G}}$ הנו איזומורפיזם.

יהי $\eta\colon f_0^{-1}\mathcal{G} \to f^{-1}\mathcal{G}$ מורפיזם האילום. לפי הגדרת $\hat{\lambda}^{\mathcal{G}}$ (בפיסקה האחרונה של הגדרה 1.7.3), התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_{f(x)} \arrow[rr, "\lambda^{\mathcal{G}}_{f(x)}"] \arrow[dr, "\hat{\lambda}^{\mathcal{G}}_{f(x)}"'] & & (f_* f_0^{-1}\mathcal{G})_{f(x)} \arrow[dl, "(f_*\eta)_{f(x)}"] \\
& (f_* f^{-1}\mathcal{G})_{f(x)} &
\end{tikzcd}$$

בנוסף, אם נציב $\mathcal{F} = f_0^{-1}\mathcal{G}$ ו-$\mathcal{F}' = f^{-1}\mathcal{G}$ בתרשים ($\clubsuit$) דלעיל, נראה כי התרשים הבא הינו חילופי:

$$\begin{tikzcd}
(f_* f_0^{-1}\mathcal{G})_{f(x)} \arrow[r, "\rho_x^{f_0^{-1}\mathcal{G}}"] \arrow[d, "(f_*\eta)_{f(x)}"'] & (f_0^{-1}\mathcal{G})_x \arrow[d, "\eta_x"] \\
(f_* f^{-1}\mathcal{G})_{f(x)} \arrow[r, "\rho_x^{f^{-1}\mathcal{G}}"] & (f^{-1}\mathcal{G})_x
\end{tikzcd}$$

לכן

$$\begin{aligned}
\theta_x^{\mathcal{G}} &= \rho_x^{f^{-1}\mathcal{G}} \circ \hat{\lambda}^{\mathcal{G}}_{f(x)} \\
&= \rho_x^{f^{-1}\mathcal{G}} \circ (f_*\eta)_{f(x)} \circ \lambda^{\mathcal{G}}_{f(x)} \\
&= \eta_x \circ \rho_x^{f_0^{-1}\mathcal{G}} \circ \lambda^{\mathcal{G}}_{f(x)}.
\end{aligned}$$

לפי למה 1.2.6, η_x הנו איזומורפיזם. לכן מספיק להוכיח כי

$$\rho_x^{f_0^{-1}\mathcal{G}} \circ \lambda_{f(x)}^{\mathcal{G}} \colon \mathcal{G}_{f(x)} \to (f_0^{-1}\mathcal{G})_x$$

הנו איזומורפיזם. יהי אפוא $\vartheta_x^{\mathcal{G}} = \rho_x^{f_0^{-1}\mathcal{G}} \circ \lambda_{f(x)}^{\mathcal{G}}$.

יהי $\tau_x \in (f_0^{-1}\mathcal{G})_x$, כאשר $U \in \mathrm{Open}(X)$, $x \in U$ ו־$\tau \in f_0^{-1}\mathcal{G}(U)$. לפי הגדרת $f_0^{-1}\mathcal{G}$, קיימת $V \in \mathrm{Open}(Y)$ וקיים $\sigma \in \mathcal{G}(V)$ כך ש־$f(U) \subseteq V$ ו־$\tau = \lambda_{U,V}^{\mathcal{G}}(\sigma)$. אזי $f(x) \in V$, ומהגדרת $\vartheta_x^{\mathcal{G}}$ נובע כי

$$\begin{aligned}
\vartheta_x^{\mathcal{G}}(\sigma_{f(x)}) &= \rho_x^{f_0^{-1}\mathcal{G}}\Big(\big(\lambda^{\mathcal{G}}(V)(\sigma)\big)_{f(x)}\Big) \\
&= \big(\lambda_{f^{-1}(V),V}^{\mathcal{G}}(\sigma)\big)_x \\
&= \big(\mathrm{res}_{f^{-1}(V),U}^{f_0^{-1}\mathcal{G}} \circ \lambda_{f^{-1}(V),V}^{\mathcal{G}}(\sigma)\big)_x \\
&= \big(\lambda_{U,V}^{\mathcal{G}}(\sigma)\big)_x \\
&= \tau_x,
\end{aligned}$$

כאשר השויון הרביעי נובע מ־(2) בהגדרה 1.7.1. לכן $\vartheta_x^{\mathcal{G}}$ על.

נניח כי $\sigma_{f(x)} \in \mathrm{Ker}(\vartheta_x^{\mathcal{G}})$, כאשר $V \in \mathrm{Open}(Y)$ ו־$\sigma \in \mathcal{G}(V)$ כך ש־$f(x) \in V$. אזי $\big(\lambda_{f^{-1}(V),V}^{\mathcal{G}}(\sigma)\big)_x = 0$ ולכן קיימת $U \in \mathrm{Open}(X)$ כך ש־$x \in U \subseteq f^{-1}(V)$ ו־

$$.\mathrm{res}_{f^{-1}(V),U}^{f_0^{-1}\mathcal{G}}(\lambda_{f^{-1}(V),V}^{\mathcal{G}}(\sigma)) = 0$$

לפי (2) בהגדרה 1.7.1,

$$.\lambda_{U,V}^{\mathcal{G}}(\sigma) = 0$$

מתכונות הגבול הישר של $f_0^{-1}\mathcal{G}(U)$ נובע כי קיימת $V' \in \mathrm{Open}(Y)$ כך ש־$f(U) \subseteq V' \subseteq V$ ו־ $\mathrm{res}_{V,V'}^{\mathcal{G}}(\sigma) = 0$. בפרט, $f(x) \in V'$ ו־$\sigma_{f(x)} = 0$. לכן $\vartheta_x^{\mathcal{G}}$ חח"ע. ∎

טענה 1.7.8: *הפונקטור* $f^{-1} \colon \mathbf{Sh}(Y, \mathbf{Ab}) \to \mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab})$ *הנו מדוייק.*

הוכחה: תהי

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}' \xrightarrow{\varphi'} \mathcal{G}''$$

סדרה מדוייקת של מורפיזמים של אלומות מעל Y.

יהי $x \in X$. אזי לפי למה 1.7.7, התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_{f(x)} \arrow[r, "\varphi_{f(x)}"] \arrow[d, "\theta_x^{\mathcal{G}}"'] & \mathcal{G}'_{f(x)} \arrow[r, "\varphi'_{f(x)}"] \arrow[d, "\theta_x^{\mathcal{G}'}"'] & \mathcal{G}''_{f(x)} \arrow[d, "\theta_x^{\mathcal{G}''}"'] \\
(f^{-1}\mathcal{G})_x \arrow[r, "(f^{-1}\varphi)_x"] & (f^{-1}\mathcal{G}')_x \arrow[r, "(f^{-1}\varphi')_x"] & (f^{-1}\mathcal{G}'')_x
\end{tikzcd}$$

לפי משפטון 1.5.2, הסדרה העליונה הנה מדוייקת. הואיל וההומומורפיזמים האנכיים הנם איזומורפיזמים, גם הסדרה התחתונה הנה מדוייקת. שימוש נוסף במשפטון 1.5.2 מראה כי הסדרה

$$f^{-1}\mathcal{G} \xrightarrow{f^{-1}\varphi} f^{-1}\mathcal{G}' \xrightarrow{f^{-1}\varphi'} f^{-1}\mathcal{G}''$$

הנה מדוייקת. ∎

הגדרה 1.7.9: יהי X מרחב טופולוגי, יהי $Z \subseteq X$ תת־מרחב ויהי $\imath\colon Z \hookrightarrow X$ השיכון. עבור אלומה $\mathcal{F}$ מעל X, נגדיר

$$.\mathcal{F}|_Z = \imath^{-1}\mathcal{F}$$

נשים לב כי אם $Z \in \operatorname{Open}(X)$ אזי לכל $U, V \in \operatorname{Open}(Z)$ כך ש־$V \subseteq U$ מתקיים $(\mathcal{F}|_Z)(U) = \mathcal{F}(U)$ ו־$\operatorname{res}_{U,V}^{\mathcal{F}|_Z} = \operatorname{res}_{U,V}^{\mathcal{F}}$. ∎

1.8 סכום ישר ומכפלה ישרה של אלומות.

קדם הסכום הישר וקדם המכפלה הישרה של משפחה של קדם אלומות מעל מרחב טופולוגי X מוגדרים על כל תת־קבוצה פתוחה U כסכום הישר וכמכפלה הישרה של החבורות המתאימות ל־U. מההגדרה עולה שקדם המכפלה הישרה של משפחה של אלומות הנה אלומה בעוד שכדי להגיע לסכום הישר צריך לאלם את קדם הסכום הישר. נראה שהמרכיב ה־U־י אינו משתנה במעבר מקדם הסכום הישר לסכום הישר אם U דחוסה.

וכעת לפרטים:

הגדרה 1.8.1: יהי X מרחב טופולוגי ויהי $\{\mathcal{F}_i\}_i$ אוסף של קדם־אלומות מעל X. לכל $U \in \operatorname{Open}(X)$ נגדיר

$$\mathcal{G}(U) = \bigoplus_i \mathcal{F}_i(U)$$

ו־

$$.\mathcal{H}(U) = \prod_i \mathcal{F}_i(U)$$

עבור $U,V \in \mathrm{Open}(X)$ כך ש־$V \subseteq U$ נגדיר

$$\mathrm{res}^{\mathcal{G}}_{U,V} = \bigoplus_i \mathrm{res}^{\mathcal{F}_i}_{U,V} \colon \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(V)$$

ו־

$$\mathrm{res}^{\mathcal{H}}_{U,V} = \prod_i \mathrm{res}^{\mathcal{F}_i}_{U,V} \colon \mathcal{H}(U) \to \mathcal{H}(V).$$

אזי $\mathcal{G}$ ו־$\mathcal{H}$ קדם־אלומות המסומנות ב־$\mathrm{p}\bigoplus_i \mathcal{F}_i$ ו־$\mathrm{p}\prod_i \mathcal{F}_i$ בהתאמה.

למה 1.8.2: *קדם האלומות* $\mathrm{p}\bigoplus_i \mathcal{F}_i$ *ו־* $\mathrm{p}\prod_i \mathcal{F}_i$ *מקיימות את התכונות האוניברסליות של סכום ישר ומכפלה ישרה בקטגוריה* $\mathbf{Presh}(X, \mathbf{Ab})$.

הוכחה: הלמה נובעת מהתכונות המתאימות של סכום ומכפלה בקטגוריה $\mathbf{Ab}$. ∎

למה 1.8.3: *אם* $\mathcal{F}_i$ *אלומה לכל* i *אזי* $\mathrm{p}\prod_i \mathcal{F}_i$ *הנה אלומה.*

הוכחה: נסמן $\mathcal{H} = \mathrm{p}\prod_i \mathcal{F}_i$. יהי $U \in \mathrm{Open}(X)$ ויהי $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ כיסוי פתוח. נסמן $U_{\alpha,\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$.

נניח כי $\sigma = (\sigma_i)_i \in \mathcal{H}(U)$ כך ש־$\sigma|_{U_\alpha} = 0$ לכל α. לפי הגדרת הצמצום של $\mathcal{H}$, $\sigma_i|_{U_\alpha} = 0$ לכל i ולכל α. הואיל ו־$\mathcal{F}_i$ אלומה לכל i, נראה כי $\sigma_i = 0$ לכל i, ולכן $\sigma = 0$.

אם נתונים $\sigma^{(\alpha)} \in \mathcal{H}(U_\alpha)$ כך ש־ $\sigma^{(\alpha)}|_{U_{\alpha,\beta}} = \sigma^{(\beta)}|_{U_{\alpha,\beta}}$, אזי לכל i מקבלים אוסף של חתכים $\sigma_i^{(\alpha)} \in \mathcal{F}_i(U_\alpha)$ המתלכדים על החיתוכים, ולכן (מכיון ש־$\mathcal{F}_i$ אלומה), קיים חתך $\sigma_i \in \mathcal{F}_i(U)$ המקיים $\sigma_i|_{U_\alpha} = \sigma_i^{(\alpha)}$ לכל α. אם נגדיר את החתך $\sigma = (\sigma_i)_i \in \mathcal{H}(U)$, אזי $\sigma|_{U_\alpha} = \sigma^{(\alpha)}$ לכל α.

לכן $\mathcal{H}$ אלומה. ∎

תוצאה 1.8.4: *אם* $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ *אלומות אזי* $\mathrm{p}\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ *הנה אלומה.*

הוכחה: סכום ישר סופי הנו מכפלה ישרה. ∎

סימון 1.8.5: את האלומה מלמה 1.8.3 נסמן ב־$\prod_i \mathcal{F}_i$.

הגדרה 1.8.6: יהיו $\mathcal{F}_i$ אלומות. נגדיר את $\bigoplus_i \mathcal{F}_i$ להיות האלומה המצורפת לקדם האלומה $\mathrm{p}\bigoplus_i \mathcal{F}_i$.

למה 1.8.7: *האלומה* $\bigoplus_i \mathcal{F}_i$ *מקיימת את התכונה האוניברסלית של סכום ישר בקטגוריה* $\mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab})$.

הוכחה: יהיו $\mathcal{G} = \mathrm{p}\bigoplus_i \mathcal{F}_i$ ו־$\mathcal{F} = \bigoplus_i \mathcal{F}_i$. יהי $\eta \colon \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ מורפיזם האילום ויהיו $\mu_i \colon \mathcal{F}_i \to \mathcal{G}$ המורפיזמים הטבעיים הנובעים מהתכונה האוניברסלית של $\mathcal{G}$ עבור קדם־אלומות (למה 1.8.2). נגדיר $\nu_i = \eta \circ \mu_i \colon \mathcal{F}_i \to \mathcal{F}$.

תהי $\mathcal{H}$ אלומה ויהי $\rho_i\colon \mathcal{F}_i \to \mathcal{H}$ מורפיזם עבור כל i. מהתכונה האוניברסלית של $\mathcal{G}$ קיים מורפיזם יחיד $\rho'\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ כך שהתרשים הבא חילופי לכל i:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_i \arrow[rr, "\mu_i"] \arrow[dr, "\rho_i"'] & & \mathcal{G} \arrow[dl, dashed, "\rho'"] \\ & \mathcal{H} & \end{tikzcd}$$

לפי התכונה האוניברסלית של אילום, קיים מורפיזם יחיד $\rho\colon \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ כך שהתרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\rho'"'] & & \mathcal{F} \arrow[dl, dashed, "\rho"] \\ & \mathcal{H} & \end{tikzcd}$$

צירוף שני התרשימים הללו נותן את התרשים החילופי הבא לכל i:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_i \arrow[rr, "\nu_i"] \arrow[dr, "\rho_i"'] & & \mathcal{F} \arrow[dl, dashed, "\rho"] \\ & \mathcal{H} & \end{tikzcd}$$

זוהי בדיוק התכונה האוניברסלית של סכום ישר. ∎

למה 1.8.8: *יהיו $\mathcal{F}_i$ אלומות מעל X, יהיו $\mathcal{G} = \mathrm{p}\bigoplus_i \mathcal{F}_i$, $\mathcal{F} = \bigoplus_i \mathcal{F}_i$ ו־$\mathcal{H} = \prod_i \mathcal{F}_i$. יהי $\eta\colon \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ מורפיזם האילום. אזי קיים תרשים חילופי של מורפיזמים של קדם־אלומות*

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{G} \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\ \mathcal{F} \arrow[rr, "\nu"] & & \mathcal{H} \end{tikzcd}$$

כך שהמורפיזם ν הנו מוני.

הוכחה: לכל $U \in \mathrm{Open}(X)$ יהי $\mu(U)$ המונומורפיזם הטבעי

$$\bigoplus_i \mathcal{F}_i(U) \to \prod_i \mathcal{F}_i(U).$$

אזי האוסף $\{\mu(U)\}$ מתחלף עם צמצומים ומגדיר את המורפיזם μ. הואיל ו־$\mathcal{H}$ אלומה, המורפיזם ν מתקבל מהתכונה האוניברסלית של אילום.

יהי $x \in X$. אזי התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{G}_x \arrow[dl, "\eta_x"'] \arrow[dr, "\mu_x"] & \\ \mathcal{F}_x \arrow[rr, "\nu_x"] & & \mathcal{H}_x \end{tikzcd}$$

לפי למה 1.4.3, ההומומורפיזם μ_x הנו חח"ע. לפי למה 1.2.6, η_x הנו איזומורפיזם. לכן ν_x הנו חח"ע. לפי למה 1.4.13, ν הנו מוני. ∎

למה 1.8.9: *יהיו $\mathcal{F}_i$ אלומות מעל X, יהיו $\mathcal{G} = \mathrm{p}\bigoplus_i \mathcal{F}_i$ ו־$\mathcal{F} = \bigoplus_i \mathcal{F}_i$. יהי $\mathcal{F}$ מורפיזם האילום. תהי $\eta\colon \mathcal{G} \to \mathcal{F}$. $U \in \mathrm{Open}(X)$.*

(1) *ההומומורפיזם $\eta(U)\colon \mathcal{G}(U) \to \mathcal{F}(U)$ הנו חח"ע.*

(2) *אם U **דחוסה** אזי $\eta(U)$ הנו איזומורפיזם.*

הוכחה:

(1) לפי הגדרת האילום, צריך להראות כי אם $\sigma \in \mathcal{G}(U)$ מקיים $\sigma_x = 0$ לכל $x \in U$, אזי $\sigma = 0$. תנאי זה שקול לכך שאם $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ הנו כיסוי פתוח ו־$\sigma|_{U_\alpha} = 0$ לכל α אזי $\sigma = 0$. את התנאי האחרון ניתן להוכיח בדיוק כמו בהוכחה המתאימה עבור מכפלות ישרות (למה 1.8.3).

(2) נישאר בסימוני למה 1.8.8. יהי $\tau \in \mathcal{F}(U)$. לפי ההגדרה בטענה 1.2.3, קיים כיסוי פתוח $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ וחתכים $\sigma^{(\alpha)} \in \mathcal{G}(U_\alpha)$ כך שלכל α,

$$\tau|_{U_\alpha} = \left(\sigma_x^{(\alpha)}\right)_{x \in U_\alpha} = \eta(U_\alpha)(\sigma^{(\alpha)}) \qquad (*)$$

הואיל ו־U דחוסה, ניתן להניח כי הכיסוי הנו סופי. נרשום $\sigma^{(\alpha)} = (\sigma_i^{(\alpha)})_i$.

יהי $\theta = \nu(U)(\tau) \in \mathcal{H}(U)$, ונרשום $\theta = (\theta_i)_i$. לפי $(*)$ לכל α מתקיים

$$\theta|_{U_\alpha} = (\nu \circ \eta)(U_\alpha)(\sigma^{(\alpha)}) = \mu(U_\alpha)(\sigma^{(\alpha)})$$

לכן לכל i וכל α, $\theta_i|_{U_\alpha} = \sigma_i^{(\alpha)}$. לכן לכל α, $\theta_i|_{U_\alpha} = 0$ עבור כמעט כל i. הואיל וקיים מספר סופי של α, אנו רואים כי עבור כמעט כל i, מתקיים $\theta_i|_{U_\alpha} = 0$ לכל α, ולכן $\theta_i = 0$.

לכן $\theta_i = 0$ עבור כמעט כל i, ולכן $\theta = \mu(U)(\sigma)$ עבור $\sigma \in \mathcal{G}(U)$. אזי

$$\nu(U)(\eta(U)(\sigma)) = \mu(U)(\sigma) = \theta = \nu(U)(\tau) \qquad (**)$$

מלמה 1.8.8 נובע כי ν מוני, ולכן מלמה 1.4.5 נובע כי $\nu(U)$ חח"ע. לכן מ־$(**)$ נובע כי

$$\eta(U)(\sigma) = \tau$$

לכן $\eta(U)$ היא על. מסעיף (1) נובע כי $\eta(U)$ איזומורפיזם. ∎

1.9 **הדבקת אלומות.**

יהי $X = \bigcup_i U_i$ כיסוי פתוח של מרחב טופולוגי X. לכל i תהי $\mathcal{F}_i$ אלומה מעל U_i. נראה שאם $\mathcal{F}_i|_{U_i \cap U_j}$ איזומורפית ל־ $\mathcal{F}_j|_{U_i \cap U_j}$ לכל i, j והאיזומורפיזמים תואמים, אזי ניתן להדביק את האלומות $\mathcal{F}_i$ לאלומה $\mathcal{F}$ מעל X באופן יחיד.

למה $1.9.1$: *יהי X מרחב טופולוגי ויהיו $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ אלומות מעל X. נניח כי $X = \bigcup_i U_i$ כיסוי פתוח ונסמן $U_{ij} = U_i \cap U_j$. אם קיימים מורפיזמים של אלומות*

$$\mu_i\colon \mathcal{F}|_{U_i} \to \mathcal{G}|_{U_i}$$

כך שלכל i, j מתקיים

$$\mu_i|_{U_{ij}} = \mu_j|_{U_{ij}}$$

אזי קיים מורפיזם (בהכרח יחיד) של אלומות

$$\mu\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$$

כך ש־ $\mu|_{U_i} = \mu_i$ לכל i. יתר על כן, μ הנו איזומורפיזם אם ורק אם μ_i איזומורפיזם לכל i.

הוכחה: תהי $V \in \mathrm{Open}(X)$. לכל i, j נסמן $V_i = V \cap U_i$ ו־ $V_{ij} = V \cap U_{ij} = V_i \cap V_j$. יהי $\sigma \in \mathcal{F}(V)$. לכל i, נגדיר

$$.\tau_i = \mu_i(V_i)(\sigma|_{V_i}) \in \mathcal{G}(V_i)$$

אזי לכל i, j, הואיל ו־ $\mu_i|_{U_{ij}} = \mu_j|_{U_{ij}}$,

$$\begin{aligned}
\tau_i|_{V_{ij}} &= \mu_i(V_i)(\sigma|_{V_i})|_{V_{ij}} \\
&= \mu_i(V_{ij})\big(\sigma|_{V_{ij}}\big) \\
&= \mu_j(V_{ij})\big(\sigma|_{V_{ij}}\big) \\
&= \mu_j(V_j)(\sigma|_{V_j})|_{V_{ij}} \\
&= \tau_j|_{V_{ij}}.
\end{aligned}$$

הואיל ו־ $\mathcal{G}$ אלומה ו־ $V = \bigcup_i V_i$, קיים חתך יחיד $\tau \in \mathcal{G}(V)$ המקיים $\tau|_{V_i} = \tau_i$ לכל i.

נגדיר $\mu(V)(\sigma) = \tau$, ונקבל העתקה

$$.\mu(V)\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{G}(V)$$

מיחידות τ והעובדה כי $\mu_i(V_i)$ הנו הומומורפיזם לכל i נובע כי $\mu(V)$ הנו הומומורפיזם.

נניח כי $W, V \in \mathrm{Open}(X)$ ו־$W \subseteq V$. נסמן $W_i = W \cap U_i$. אזי לכל i

$$\begin{aligned}
\big(\mu(V)(\sigma)|_W\big)|_{W_i} &= \mu(V)(\sigma)|_{W_i} \\
&= \big(\mu(V)(\sigma)|_{V_i}\big)|_{W_i} \\
&= \big(\mu_i(V_i)(\sigma|_{V_i})\big)|_{W_i} \\
&= \mu_i(W_i)(\sigma|_{W_i}) \\
&= \mu_i(W_i)((\sigma|_W)|_{W_i}) \\
&= \mu(W)(\sigma|_W)|_{W_i},
\end{aligned}$$

כאשר השויון השלישי נובע מהגדרת $\mu(V)$ והשויון השישי נובע מהגדרת $\mu(W)$. הואיל ו־$\mathcal{G}$ אלומה ו־$W = \bigcup_i W_i$, מתקיים

$$\mu(V)(\sigma)|_W = \mu(W)(\sigma|_W).$$

לכן μ הנו מורפיזם של אלומות.

אם $V \subseteq U_i$, אזי $V = V_i$ ולכן עבור כל $\sigma \in \mathcal{F}(V)$,

$$\begin{aligned}
\mu(V)(\sigma) &= \mu(V)(\sigma)|_{V_i} \\
&= \mu_i(V_i)(\sigma|_{V_i}) \\
&= \mu_i(V)(\sigma).
\end{aligned}$$

לכן $\mu|_{U_i} = \mu_i$ לכל i.

לבסוף, יהי $x \in X$ ויהי i כך ש־$x \in U_i$. אזי

$$\mu_x = (\mu|_{U_i})_x = (\mu_i)_x.$$

לכן μ_x הנו איזומורפיזם לכל $x \in X$ אם ורק אם $(\mu_i)_x$ הנו איזומורפיזם לכל i ולכל $x \in U_i$. לפי משפטון 1.3.5, אנו למדים כי μ איזומורפיזם אם ורק אם μ_i איזומורפיזם לכל i. ∎

טענה 1.9.2: *יהי X מרחב טופולוגי ויהי $X = \bigcup_i U_i$ כיסוי פתוח. לכל i, j, k נסמן $U_{ij} = U_i \cap U_j$ ו־$U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$.*

נניח כי לכל i נתונה אלומה $\mathcal{F}_i$ מעל U_i, ולכל i, j נתונים איזומורפיזמים

$$\varphi_{ij} \colon \mathcal{F}_i|_{U_{ij}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_j|_{U_{ij}}$$

המקיימים את התנאים הבאים:

(1) *לכל* i, $\varphi_{i,i} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_i}$.

(2) *לכל* i,j,k, *התרשים הבא חילופי:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_i|_{U_{ijk}} \arrow[rr, "\varphi_{ij}|_{U_{ijk}}"] \arrow[dr, "\varphi_{ik}|_{U_{ijk}}"'] & & \mathcal{F}_j|_{U_{ijk}} \arrow[dl, "\varphi_{jk}|_{U_{ijk}}"] \\
& \mathcal{F}_k|_{U_{ijk}} &
\end{tikzcd}$$

אזי קיימת אלומה $\mathcal{F}$ *מעל* X*, יחידה עד כדי איזומורפיזם, עם איזומורפיזמים*

$$\psi_i\colon \mathcal{F}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_i$$

כך שלכל i,j *התרשים הבא חילופי:*

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{F}|_{U_{ij}} \arrow[dl, "\psi_i|_{U_{ij}}"'] \arrow[dr, "\psi_j|_{U_{ij}}"] & \\
\mathcal{F}_i|_{U_{ij}} \arrow[rr, "\varphi_{ij}"] & & \mathcal{F}_j|_{U_{ij}}
\end{tikzcd} \qquad (\star)$$

הוכחה:

נחלק את ההוכחה לכמה חלקים.

א. בנית $\mathcal{F}$ כקדם־אלומה:

לכל i, נסמן ב־X $\eta_i\colon U_i \hookrightarrow$ את השיכון ונגדיר

$$\mathcal{G}_i = (\eta_i)_*\mathcal{F}_i.$$

לפי למה 1.6.2, $\mathcal{G}_i$ הנה אלומה מעל X. באופן מפורש, לכל $V \in \mathrm{Open}(X)$,

$$\mathcal{G}_i(V) = \mathcal{F}_i(V \cap U_i).$$

נשים לב כי $\mathcal{G}_i|_{U_i} = \mathcal{F}_i$. נגדיר

$$\mathcal{G} = \prod_i \mathcal{G}_i.$$

לפי למה 1.8.3, $\mathcal{G}$ אלומה מעל X. לכל $V \in \mathrm{Open}(X)$, נסמן $V_i = V \cap U_i$, $V_{ij} = V \cap U_{ij}$ ונגדיר

$$\mathcal{F}(V) = \left\{\sigma = (\sigma_i)_i \in \mathcal{G}(V) \mid \forall i,j\ \varphi_{ij}(V_{ij})(\sigma_i|_{V_{ij}}) = \sigma_j|_{V_{ij}}\right\}.$$

אזי $\mathcal{F}(V)$ תת־חבורה של $\mathcal{G}(V)$. נניח כי $W \in \operatorname{Open}(X)$ ו־$W \subseteq V$. יהי $\sigma \in \mathcal{F}(V)$ ונגדיר $\tau = \sigma|_W \in \mathcal{G}(W)$. לפי ההגדרה, לכל i מתקיים

$$\tau_i = \operatorname{res}^{\mathcal{G}_i}_{V,W}(\sigma_i) = \operatorname{res}^{\mathcal{F}_i}_{V_i,W_i}(\sigma_i).$$

אזי לכל i, j,

$$\begin{aligned}
\varphi_{ij}(W_{ij})(\tau_i|_{W_{ij}}) &= \varphi_{ij}(W_{ij})(\sigma_i|_{W_{ij}}) \\
&= \varphi_{ij}(W_{ij})\big((\sigma_i|_{V_{ij}})|_{W_{ij}}\big) \\
&= \big(\varphi_{ij}(V_{ij})(\sigma_i|_{V_{ij}})\big)|_{W_{ij}} && \text{הואיל ו־} \varphi_{ij} \text{ מורפיזם} \\
&= (\sigma_j|_{V_{ij}})|_{W_{ij}} && \text{הואיל ו־} \sigma \in \mathcal{F}(V) \\
&= \sigma_j|_{W_{ij}} \\
&= \tau_j|_{W_{ij}}
\end{aligned}$$

לכן $\tau \in \mathcal{F}(W)$. לכן

$$\operatorname{res}^{\mathcal{G}}_{V,W}(\mathcal{F}(V)) \subseteq \mathcal{F}(W),$$

ולכן $\mathcal{F}$ תת־קדם־אלומה של $\mathcal{G}$.

ב. $\mathcal{F}$ הנה אלומה: על מנת להוכיח כי $\mathcal{F}$ אלומה, נשתמש בבוחן הניתן בלמה 1.3.9. תהי $V \in \operatorname{Open}(X)$, ונניח כי $V = \bigcup_\alpha V_\alpha$ הנו כיסוי פתוח.

נניח כי $\sigma = (\sigma_i)_i \in \mathcal{G}(V)$ מקיים $\sigma|_{V_\alpha} \in \mathcal{F}(V_\alpha)$ לכל α. אזי לכל i, j, α,

$$\begin{aligned}
\big(\varphi_{ij}(V_{ij})(\sigma_i|_{V_{ij}})\big)|_{V_{\alpha,i,j}} &= \varphi_{ij}(V_{\alpha,i,j})(\sigma_i|_{V_{\alpha,i,j}}) \\
&= \varphi_{ij}(V_{\alpha,i,j})((\sigma_i|_{V_{\alpha,i}})|_{V_{\alpha,i,j}}) \\
&= \big(\sigma_j|_{V_{\alpha,j}}\big)|_{V_{\alpha,i,j}} && \text{הואיל ו־} \sigma|_{V_\alpha} = (\sigma_k|_{V_{\alpha,k}})_k \in \mathcal{F}(V_\alpha) \\
&= \sigma_j|_{V_{\alpha,i,j}} \\
&= \big(\sigma_j|_{V_{ij}}\big)|_{V_{\alpha,i,j}}
\end{aligned}$$

לכן

$$\big(\varphi_{ij}(V_{ij})(\sigma_i|_{V_{ij}})\big)|_{V_{\alpha,i,j}} = \big(\sigma_j|_{V_{ij}}\big)|_{V_{\alpha,i,j}}$$

לכל α. הואיל ו־$\mathcal{F}_j$ אלומה,

$$\varphi_{ij}(V_{ij})(\sigma_i|_{V_{ij}}) = \sigma_j|_{V_{ij}},$$

ולכן $\sigma \in \mathcal{F}(V)$. לכן לפי למה 1.3.9, $\mathcal{F}$ הנה אלומה.

ג. האיזומורפיזם ψ_i: נזכיר כי $\mathcal{G}_i|_{U_i} = \mathcal{F}_i$. לכל i ולכל $V \subseteq U_i$ פתוחה נגדיר

$$\psi_i(V)\colon \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{G}_i(V) = \mathcal{F}_i(V)$$

על ידי

$$\psi_i(V)(\sigma) = \sigma_i.$$

אזי ψ_i הנם הומומורפיזמים המתחלפים עם הצמצומים, ולכן מתקבל מורפיזם של אלומות

$$\psi_i\colon \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{F}_i.$$

נניח כי $\sigma \in \mathcal{F}(V)$ ו־$\psi_i(V)(\sigma) = 0$. אזי $\sigma_i = 0$. לכל j, מכיון ש־$V \subseteq U_i$, מתקיים $V_{ij} = V_j$ ולכן

$$\begin{aligned}\sigma_j &= \sigma_j|_{V_{ij}} \\ &= \varphi_{ij}(V_{ij})(\sigma_i|_{V_{ij}}) \qquad \text{הואיל ו־} \sigma \in \mathcal{F}(V) \\ &= 0.\end{aligned}$$

לכן $\sigma = 0$ ולכן $\psi_i(V)$ חח"ע.

יהי $\tau \in \mathcal{F}_i(V)$. עבור כל j נגדיר

$$\sigma_j = \varphi_{ij}(V_{ij})(\tau|_{V_j}) \in \mathcal{F}_j(V_j) = \mathcal{F}_j(V_{ij}).$$

יהי

$$\sigma = (\sigma_j)_j \in \mathcal{G}(V).$$

לכל j, k, הואיל ו־$V \subseteq U_i$, מתקיים $V_{ijk} = V_{jk}$. לכן

$$\begin{aligned}\varphi_{jk}(V_{jk})(\sigma_j|_{V_{jk}}) &= \varphi_{jk}(V_{jk})\big(\varphi_{ij}(V_j)(\tau|_{V_j})|_{V_{jk}}\big) \\ &= \varphi_{jk}(V_{jk})\big(\varphi_{ij}(V_{jk})(\tau|_{V_{jk}})\big) \qquad \text{הואיל ו־} \varphi_{ij} \text{ מורפיזם} \\ &= \varphi_{ik}(V_{jk})(\tau|_{V_{jk}}) \qquad \text{לפי תנאי } (2) \\ &= \varphi_{ik}(V_{jk})((\tau|_{V_k})|_{V_{jk}}) \\ &= \big(\varphi_{ik}(V_k)(\tau|_{V_k})\big)|_{V_{jk}} \qquad \text{הואיל ו־} \varphi_{ij} \text{ מורפיזם} \\ &= \sigma_k|_{V_{jk}} \qquad \text{לפי הגדרת } \sigma_k \text{ דלעיל}\end{aligned}$$

לכן $\sigma \in \mathcal{F}(V)$. יתר על כן, לפי תנאי (1) מתקיים

$$\psi_i(V)(\sigma) = \sigma_i = \varphi_{ii}(V_i)(\tau|_{V_i})(\tau)$$

כי ש־$V = V_i$. לכן $\psi_i(V)$ הנו על. לכן $\psi(V)$ איזומורפיזם לכל $V \subseteq U_i$. לפי טענה 1.3.5, ψ_i הנו איזומורפיזם של אלומות.

ד. חילופיות התרשים $(*)$: תהי $V \in \mathrm{Open}(U_{ij})$. יהי $\sigma \in \mathcal{F}(V)$.

הואיל ו־$V = V_i = V_{ij}$, לפי ההגדרה מתקיים

$$\begin{aligned}\varphi_{ij}(V)(\sigma_i) &= \varphi_{ij}(V)(\sigma_i|_{V_{ij}})\\ &= \sigma_j|_{V_{ij}}\\ &= \sigma_j,\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\varphi_{ij}(V)(\psi_i(V)(\sigma)) &= \varphi_{ij}(V)(\sigma_j)\\ &= \sigma_j\\ &= \psi_j(V)(\sigma).\end{aligned}$$

לכן התרשים הבא חילופי לכל $V \in \mathrm{Open}(U_{ij})$:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F}(V) \arrow[dl, "\psi_i(V)"'] \arrow[dr, "\psi_j(V)"] & \\ \mathcal{F}_i(V) \arrow[rr, "\varphi_{ij}(V)"] & & \mathcal{F}_j(V) \end{tikzcd}$$

לכן התרשים $(\star)$ אכן חילופי.

ה. יחידות $\mathcal{F}$: תהי $\mathcal{H}$ אלומה מעל X עם איזומורפיזמים

$$\theta_i\colon \mathcal{H}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_i$$

כך שלכל i, j התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{H}|_{U_{ij}} \arrow[dl, "\theta_i|_{U_{ij}}"'] \arrow[dr, "\theta_j|_{U_{ij}}"] & \\ \mathcal{F}_i|_{U_{ij}} \arrow[rr, "\varphi_{ij}"] & & \mathcal{F}_j|_{U_{ij}} \end{tikzcd} \qquad (\star')$$

נגדיר

$$\mu_i = \psi_i^{-1} \circ \theta_i\colon \mathcal{H}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}|_{U_i}.$$

אזי לכל i, j מתקיים

$$\begin{aligned}\mu_j|_{U_{ij}} &= \psi_j^{-1}|_{U_{ij}} \circ \theta_j|_{U_{ij}}\\ &= \psi_i^{-1}|_{U_{ij}} \circ \varphi_{ij}^{-1} \circ \theta_j|_{U_{ij}} && \text{לפי התרשים } (\star)\\ &= \psi_i^{-1}|_{U_{ij}} \circ \theta_i|_{U_{ij}} && \text{לפי התרשים } (\star')\\ &= \mu_i|_{U_{ij}}.\end{aligned}$$

לכן לפי למה $1.9.1$, ניתן להדביק את האיזומורפיזמים μ_i לאיזומורפיזם

$$.\mu\colon \mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \qquad \blacksquare$$

2.1 אלומות חוגים ומרחבי חוגים.

הערה 2.1.1: בפרק הקודם דנו בקדם אלומות ואלומות של **חבורות אבליות**. ניתן להגדיר קדם־אלומות עם ערכים בקטגוריות אחרות (למשל חוגים, מודולים, קבוצות,...). נשים לב כי הבניות והמשפטים שהוכחנו נעשו באופן "קטגורי" באמצעות תכונות אוניברסליות של מכפלות ישרות, גבולות ישרים וכו', ולכן הם תקפים בקטגוריות אחרות בהן ניתן לבנות מכפלות ישרות וכו'. מעתה נעבוד בקטגוריות נוספות ונשתמש בתוצאות הפרק הקודם.

הגדרה 2.1.2: מרחב חוגים הנו זוג $(X, \mathcal{O}_X)$, כאשר X מרחב טופולוגי, ו־$\mathcal{O}_X$ אלומת חוגים מעליו.

הגדרה 2.1.3: מורפיזם $(f, f^\#)$ בין מרחבי חוגים $(X, \mathcal{O}_X)$ ו־$(Y, \mathcal{O}_Y)$ הוא העתקה רציפה $f\colon X \to Y$, יחד עם מורפיזם של אלומות $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$.

באופן מפורש יותר, $f^\#$ מגדיר הומומורפיזמים לכל $V \in \mathrm{Open}(Y)$

$$f^\#(V)\colon \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$$

שמתחלפים עם הצמצומים.

הרכבה של מורפיזמים

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{(f,f^\#)} (Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{(g,g^\#)} (Z, \mathcal{O}_Z)$$

מוגדרת ע"י

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\left(g\circ f,(g_* f^\#)\circ g^\#\right)} (Z, \mathcal{O}_Z)$$

באופן מפורש, המורפיזם $\mathcal{O}_Z \to (g \circ f)_*\mathcal{O}_X$ ניתן לכל $W \in \mathrm{Open}(Z)$ ע"י ההרכבה הבאה:

$$\mathcal{O}_Z(W) \xrightarrow{g^\#(W)} \mathcal{O}_Y(g^{-1}(W)) \xrightarrow{f^\#(g^{-1}(W))} \mathcal{O}_X((g \circ f)^{-1}(W))$$

תחת הגדרות אלו, מתקבלת **קטגורית מרחבי החוגים**.

הגדרה 2.1.4: יהי $(f, f^\#)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ מורפיזם של מרחבי חוגים ויהיו $x \in X$, $y = f(x) \in Y$. לכל $V \in \mathrm{Open}(Y)$ המכיל את y, $x \in f^{-1}(V)$ וקיים הומומורפיזם

$$\mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

המתקבל ע"י ההרכבה

$$\mathcal{O}_Y(V) \xrightarrow{f^{\#}(V)} \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \xrightarrow{\mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{f^{-1}(V),x}} \mathcal{O}_{X,x}$$

הואיל וההומומורפיזמים הללו מתחלפים עם צמצומים ב־Y, לפי התכונה האוניברסלית של גבולות ישרים מתקבל הומומורפיזם $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ אשר נסמנו (תוך שבוש הסימון) גם־כן $f_x^{\#}$.

באופן מפורש, אם $\sigma \in \mathcal{O}_Y(V)$ עבור סביבה פתוחה V של y, אזי

$$.f_x^{\#}(\sigma_y) = (f^{\#}(V)(\sigma))_x$$

נשים לב כי $f_x^{\#}$ **אינה** העתקת הגבעולים של $f^{\#}$ שהנה העתקה $\mathcal{O}_{Y,y} \to (f_*\mathcal{O}_X)_y$, אולם קיים הקשר הבא:

למה 2.1.5: *יהי $(f, f^{\#})\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ מורפיזם של מרחבי חוגים. יהי $x \in X$ ויהי $y = f(x) \in Y$. אזי קיים הומומורפיזם (יחיד) של חוגים $f_x^{\flat}$ כך שהתרשים הבא הנו חילופי:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{Y,y} \arrow[rr, "f_x^{\#}"] \arrow[dr, "(f^{\#})_y"'] & & \mathcal{O}_{X,x} \\ & (f_*\mathcal{O}_X)_y \arrow[ur, dashed, "f_x^{\flat}"'] & \end{tikzcd} \qquad (*)$$

יתר על כן, אם ההעתקה f הנה הומאומורפיזם על תמונתה אזי $f_x^{\flat}$ הנו איזומורפיזם.

הוכחה: יהיו $V', V \in \mathrm{Open}(Y)$ כך ש־$y \in V' \subseteq V$. יהיו $U = f^{-1}(V), U' = f^{-1}(V')$. אזי $x \in U' \subseteq U$. אזי התרשים הבא הנו החילופי:

$$\begin{tikzcd} (f_*\mathcal{O}_X)(V) \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathcal{O}_X(U)}"] \arrow[d, "\mathrm{res}^{f_*\mathcal{O}_X}_{V,V'}"'] & \mathcal{O}_X(U) \arrow[d, "\mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{U,U'}"] \arrow[dr, "\mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{U,x}"] & \\ & & \mathcal{O}_{X,x} \\ (f_*\mathcal{O}_X)(V') \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathcal{O}_X(U')}"] & \mathcal{O}_X(U') \arrow[ur, "\mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{U',x}"'] & \end{tikzcd}$$

חילופיות הרבוע השמאלי נובעת מהגדרת f_* בעוד שחילופיות המשולש הימני נובעת מהגדרת הגבעול. כך מתקבלת משפחה של הומומורפיזמים

$$,(f_*\mathcal{O}_X)(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

אחד לכל סביבה פתוחה V של y, המתאימים לצמצומים מעל Y. לכן קיים הומומורפיזם (יחיד) $f_x^\flat$ כך שהתרשים הבא חילופי לכל V פתוחה המכילה את y:

$$\begin{tikzcd}
 & (f_*\mathcal{O}_X)(V) \arrow[dl, "\mathrm{res}^{f_*\mathcal{O}_X}_{V,y}"'] \arrow[dr, "\mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{f^{-1}(V),x}"] & \\
(f_*\mathcal{O}_X)_y \arrow[rr, dashed, "f_x^\flat"] & & \mathcal{O}_{X,x}
\end{tikzcd}$$

תהי V סביבה פתוחה של y. אזי התרשים הבא הנו חילופי:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Y(V) \arrow[r, "f^\#(V)"] \arrow[d, "\mathrm{res}^{\mathcal{O}_Y}_{V,y}"'] & (f_*\mathcal{O}_X)(V) \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathcal{O}_X(f^{-1}(V))}"] \arrow[d, "\mathrm{res}^{f_*\mathcal{O}_X}_{V,y}"'] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \arrow[d, "\mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{f^{-1}(V),x}"] \\
\mathcal{O}_{Y,y} \arrow[r, "(f^\#)_y"] & (f_*\mathcal{O}_X)_y \arrow[r, "f_x^\flat"] & \mathcal{O}_{X,x}
\end{tikzcd}$$

חילופיות הריבוע השמאלי והימני נובעת מהגדרת $(f^\#)_y$ ו־$f_x^\flat$ בהתאמה. לכן התרשים הבא הנו חילופי:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_Y(V) \arrow[dl, "\mathrm{res}^{\mathcal{O}_Y}_{V,y}"'] \arrow[dr, "res^{\mathcal{O}_X}_{f^{-1}(V),x}\circ f^\#(V)"] & \\
\mathcal{O}_{Y,y} \arrow[rr, "f_x^\flat\circ(f^\#)_y"] & & \mathcal{O}_{X,x}
\end{tikzcd}$$

אבל חילופיות תרשים זה הנה התכונה האוניברסלית המגדירה את $f_x^\#$. לכן $f_x^\# = f_x^\flat \circ (f^\#)_y$, והתרשים $(*)$ אכן חילופי.

כעת נניח כי f הומאומורפיזם על $Z = f(X)$.

יהי $\gamma \in \mathrm{Ker}(f_x^\flat)$, נניח $\gamma = \sigma_y$ כאשר $\sigma \in (f_*\mathcal{O}_X)(V)$ עבור סביבה פתוחה V כלשהי של y. כלומר, $\sigma \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ כך ש־$\sigma_x = 0$. לפי ההגדרה, קיימת סביבה פתוחה U' של x כך ש־$U' \subseteq f^{-1}(V)$ ו־$\mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{f^{-1}(V),U'}(\sigma) = 0$.

הואיל ו־f הומאומורפיזם על Z, $f(U')$ הנה פתוחה ב־Z ולכן קיימת $V' \in \mathrm{Open}(Y)$ כך ש־$f(U') = Z \cap V'$. מהיחס $U' \subseteq f^{-1}(V)$ נובע כי $Z \cap V' = f(U') \subseteq V$ ולכן $(V' \cap V) \cap Z = V' \cap Z$. לכן ע"י החלפת V' ב־$V' \cap V$ ניתן להניח כי $V' \subseteq V$. בנוסף, $y = f(x) \in V'$, ו־$f^{-1}(V') = U'$ כי f חח"ע. לכן

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}^{f_*\mathcal{O}_X}_{V,V'}(\sigma) &= \mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{f^{-1}(V),f^{-1}(V')}(\sigma) \\
&= \mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{f^{-1}(V),U'}(\sigma) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

לכן $\gamma = \sigma_y = 0$. לכן $f_x^\flat$ חח"ע.

יהי $\delta \in \mathcal{O}_{X,x}$. אזי קיימת סביבה פתוחה U של x ו־$\tau \in \mathcal{O}_X(U)$ כך ש־$\delta = \tau_x$. אזי שוב $f(U)$ פתוחה ב־Z ולכן $f(U) = Z \cap V$ עבור סביבה פתוחה V כלשהי של y. אזי $f^{-1}(V) = U$, $\tau \in (f_*\mathcal{O}_X)(V)$ ו־$f_x^\flat(\tau_y) = \delta$. לכן $f_x^\flat$ על. ∎

למה 2.1.6: *יהי*

$$\begin{tikzcd}
(X, \mathcal{O}_X) \arrow[rr, "{(f,f^\#)}"] \arrow[dr, "{(h,h^\#)}"'] & & (Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[dl, "{(g,g^\#)}"] \\
& (Z, \mathcal{O}_Z) &
\end{tikzcd}$$

תרשים חילופי של מורפיזמים של מרחבי חוגים. יהיו $x \in X$, $y = f(x)$, $z = g(y) = h(x)$. *אזי התרשים הבא חילופי:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X,x} & & \mathcal{O}_{Y,y} \arrow[ll, "f_x^\#"'] \\
& \mathcal{O}_{Z,z} \arrow[ul, "h_x^\#"] \arrow[ur, "g_y^\#"'] &
\end{tikzcd}$$

הוכחה: הלמה נובעת ישירות מהגדרת ההרכבה של מורפיזמים ומהגדרת ההעתקות $f_x^\#$. ∎

הגדרה 2.1.7: יהיו A ו־B חוגים מקומיים עם אידיאלים מרביים $\mathfrak{m}_A$ ו־$\mathfrak{m}_B$ בהתאמה. הומומורפיזם $\varphi\colon A \to B$ יִקרא **הומומורפיזם מקומי**, אם $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$, או באופן שקול $\varphi(\mathfrak{m}_A) \subseteq \mathfrak{m}_B$.

למה 2.1.8: *הרכבה של הומומורפיזמים מקומיים של חוגים הנה הומומורפיזם מקומי.*

הוכחה: ברור. ∎

הגדרה 2.1.9: מרחב חוגים מקומיים הנו מרחב חוגים $(X, \mathcal{O}_X)$, כך שלכל $x \in X$, הגבעול $\mathcal{O}_{X,x}$ הוא חוג מקומי.

הגדרה 2.1.10: מורפיזם בין מרחבי חוגים מקומיים $(X, \mathcal{O}_X)$ ו־$(Y, \mathcal{O}_Y)$ הוא מורפיזם $(f, f^\#)$ של מרחבי חוגים, כך שלכל $x \in X$ ההומומורפיזם $f_x^\#\colon \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ הנו הומומורפיזם מקומי.

למה 2.1.11: *הרכבה של מורפיזמים של מרחבי חוגים מקומיים היא מורפיזם של מרחבי חוגים מקומיים.*

הוכחה: לפי למה 2.1.6 ולמה 2.1.8. ∎

למה 2.1.12: *יהיו* $(f,f^{\#}),(g,g^{\#})\colon (X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ *שני מורפיזמים בין מרחבי חוגים כך ש־* $f=g$ *ו־* $f_x^{\#}=g_x^{\#}$ *לכל* $x\in X$*. אזי* $f^{\#}=g^{\#}$.

הוכחה: תהי $V\in\operatorname{Open}(Y)$ ויהי $\sigma\in\mathcal{O}_Y(V)$. אזי לכל $x\in f^{-1}(V)=g^{-1}(V)$ מתקיים

$$\begin{aligned}\left(f^{\#}(U)(\sigma)\right)_x &= f_x^{\#}(\sigma_{f(x)})\\ &= g_x^{\#}(\sigma_{g(x)})\\ &= \left(g^{\#}(U)(\sigma)\right)_x.\end{aligned}$$

הואיל ו־$\mathcal{O}_X$ אלומה,

$$f^{\#}(U)(\sigma)=g^{\#}(U)(\sigma),$$

ולכן $f^{\#}(U)=g^{\#}(U)$. ∎

למה 2.1.13: *יהי* $(f,f^{\#})\colon (X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ *מורפיזם של מרחבי חוגים מקומיים כך ש־*

(1) f *הנו הומאומורפיזם.*

(2) $f_x^{\#}$ *הנו איזומורפיזם לכל* $x\in X$.

אזי $(f,f^{\#})$ *הנו איזומורפיזם של מרחבי חוגים מקומיים.*

הוכחה: ברור. ∎

2.2 תת קבוצות פתוחות של מרחבי חוגים.

למה 2.2.1: *יהי* $(X,\mathcal{O}_X)$ *מרחב חוגים ותהי* $U\in\operatorname{Open}(X)$*. נגדיר* $\mathcal{O}_U=\mathcal{O}_X|_U$*. אזי* $(U,\mathcal{O}_U)$ *הנו מרחב חוגים וקיים מורפיזם* $(\imath,\imath^{\#})\colon(U,\mathcal{O}_U)\to(X,\mathcal{O}_X)$ *כך ש־* $\imath\colon U\hookrightarrow X$ *הנו השיכון ו־* $\imath_x^{\#}$ *הנו איזומורפיזם לכל* $x\in U$*. אם* $(X,\mathcal{O}_X)$ *מרחב חוגים מקומיים אזי גם* $(U,\mathcal{O}_U)$ *מרחב חוגים מקומיים ו־* $(\imath,\imath^{\#})$ *הנו מורפיזם מקומי.*

הוכחה: יהי אם כן $\imath\colon U\hookrightarrow X$ השיכון הטופולוגי. לכל $V\in\operatorname{Open}(X)$, $\imath^{-1}(V)=V\cap U$, ולכן

$$(\imath_*\mathcal{O}_U)(V)=\mathcal{O}_U(U\cap V)=\mathcal{O}_X(U\cap V).$$

נגדיר את $\imath^{\#}(V)$ להיות ההומומורפיזם

$$\operatorname{res}^{\mathcal{O}_X}_{V,U\cap V}\colon \mathcal{O}_X(V)\to\mathcal{O}_X(U\cap V).$$

אם $V', V \in \mathrm{Open}(X)$ כך ש־$V' \subseteq V$ אזי התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(V) \arrow[r, "\imath^{\#}(V)"] \arrow[d, "\mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{V,V'}"'] & \mathcal{O}_X(U \cap V) \arrow[d, "\mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{U\cap V, U\cap V'} = \mathrm{res}^{\imath_*\mathcal{O}_U}_{V,V'}"] \\
\mathcal{O}_X(V') \arrow[r, "\imath^{\#}(V')"] & \mathcal{O}_X(U \cap V')
\end{tikzcd}$$

לכן

$$\imath^{\#} \colon \mathcal{O}_X \to \imath_* \mathcal{O}_U$$

הנו מורפיזם של אלומות, ולכן $(\imath, \imath^{\#})$ הנו מורפיזם של מרחבי חוגים.

עבור $V \in \mathrm{Open}(U)$, $\imath_*\mathcal{O}_U(V) = \mathcal{O}_X(V)$ ו־$\imath^{\#}(V) = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X(V)}$. לכן לכל $x \in U$ ההומומורפיזם $\imath^{\#}_x \colon \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{U,x}$ הנו איזומורפיזם, ומכך נובעת הטענה האחרונה. ∎

למה 2.2.2: *יהי* $(X, \mathcal{O}_X)$ *מרחב חוגים. יהיו* $U, V \in \mathrm{Open}(X)$ *כך ש־* $V \subseteq U$*. יהיו*

$$\begin{array}{rccc}
(\imath_U, \imath_U^{\#}): & (U, \mathcal{O}_U) & \longrightarrow & (X, \mathcal{O}_X) \\
(\imath_V, \imath_V^{\#}): & (V, \mathcal{O}_V) & \longrightarrow & (X, \mathcal{O}_X) \\
(\jmath, \jmath^{\#}): & (V, \mathcal{O}_V) & \longrightarrow & (U, \mathcal{O}_U)
\end{array}$$

מורפיזמי השיכון המתאימים. אזי התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd}
(V, \mathcal{O}_V) \arrow[rr, "(\jmath, \jmath^{\#})"] \arrow[dr, "(\imath_V, \imath_V^{\#})"'] & & (U, \mathcal{O}_U) \arrow[dl, "(\imath_U, \imath_U^{\#})"] \\
& (X, \mathcal{O}_X) &
\end{tikzcd}$$

הוכחה: ברור כי ההעתקות הרציפות מקיימות

$$\imath_U \circ \jmath = \imath_V.$$

עבור האלומות, תהי $W \in \mathrm{Open}(X)$. אזי התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_V(W \cap V) & & \mathcal{O}_U(W \cap U) \arrow[ll, "\jmath^{\#}(W\cap U) = \mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{W\cap U, W\cap V}"'] \\
& \mathcal{O}_X(W) \arrow[ul, "\imath_V^{\#}(W) = \mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{W, W\cap V}"] \arrow[ur, "\imath_U^{\#}(W) = \mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{W, W\cap U}"'] &
\end{tikzcd}$$

לכן

$$\imath_V^\# = ((\imath_U)_* \jmath^\#) \circ \imath_U^\#,$$

כנדרש. ∎

למה 2.2.3: *יהי* $(f, f^\#)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *מורפיזם של מרחבי חוגים (מקומיים). יהיו* $U \in \mathrm{Open}(X)$ *ו-* $V \in \mathrm{Open}(Y)$ *כך ש-* $f(U) \subseteq V$*. אזי קיים מורפיזם (מקומי) יחיד*

$$(f_0, f_0^\#)\colon (U, \mathcal{O}_U) \to (V, \mathcal{O}_V)$$

כך שהתרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd}
(U, \mathcal{O}_U) \arrow[r, dashed, "(f_0, f_0^\#)"] \arrow[d, "(\imath_U, \imath_U^\#)"'] & (V, \mathcal{O}_V) \arrow[d, "(\imath_V, \imath_V^\#)"] \\
(X, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "(f, f^\#)"] & (Y, \mathcal{O}_Y)
\end{tikzcd} \qquad (\star)$$

הוכחה: ראשית נניח כי $U = X$. ההעתקה הרציפה $f_0\colon X \to V$ היא כמובן $x \mapsto f(x)$.
תהי $W \in \mathrm{Open}(V)$. אזי

$$f_0^{-1}(W) = f^{-1}(W).$$

ולכן

$$((f_0)_* \mathcal{O}_X)(W) = (f_* \mathcal{O}_X)(W),$$

כלומר

$$(f_0)_* \mathcal{O}_X = (f_* \mathcal{O}_X)|_V.$$

לכן ניתן לצמצם את המורפיזם

$$f^\#\colon \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_* \mathcal{O}_X$$

ל-V ולקבל את המורפיזם

$$f_0^\#\colon \mathcal{O}_Y|_V = \mathcal{O}_V \longrightarrow (f_0)_* \mathcal{O}_X$$

לכן

$$(f_0, f_0^\#)\colon (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (V, \mathcal{O}_V)$$

הנו מורפיזם של מרחבי חוגים.

עבור ההעתקות הרציפות, ברור כי $f = \imath_V \circ f_0$. עבור האלומות, צריך להוכיח כי התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} & \imath_*\mathcal{O}_V \arrow[dl, "\imath_* f_0^{\#}"'] \\ f_*\mathcal{O}_X & \mathcal{O}_Y \arrow[l, "f^{\#}"] \arrow[u, "\imath^{\#}"'] \end{tikzcd} \tag{$\star\star$}$$

כלומר צריך להוכיח כי לכל $W \in \mathrm{Open}(Y)$, התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}_Y(W\cap V) \arrow[dl, "f^{\#}(W\cap V)"'] \\ \mathcal{O}_X(f^{-1}(W)) & \mathcal{O}_Y(W) \arrow[l, "f^{\#}(W)"] \arrow[u, "\mathrm{res}^{\mathcal{O}_Y}_{W,W\cap V}"'] \end{tikzcd}$$

הואיל ו־$f(X) \subseteq V$ לפי ההנחה, $f^{-1}(W) = f^{-1}(W\cap V)$ ולכן התרשים האחרון נראה כך:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(f^{-1}(W\cap V)) & \mathcal{O}_Y(W\cap V) \arrow[l, "f^{\#}(W\cap V)"'] \\ \mathcal{O}_X(f^{-1}(W)) \arrow[u, "\mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{f^{-1}(W),f^{-1}(W\cap V)}"'] & \mathcal{O}_Y(W) \arrow[l, "f^{\#}(W)"] \arrow[u, "\mathrm{res}^{\mathcal{O}_Y}_{W,W\cap V}"'] \end{tikzcd}$$

חילופיות התרשים הזה נובעת מכך ש־$f^{\#}$ הנו מורפיזם. לכן התרשים $(\star\star)$ אכן חילופי.

לכן מתקבל התרשים החילופי הבא של מורפיזמים של מרחבי חוגים:

$$\begin{tikzcd} & (V,\mathcal{O}_V) \arrow[d, "(\imath_V,\imath_V^{\#})"] \\ (X,\mathcal{O}_X) \arrow[ur, "(f_0,f_0^{\#})"] \arrow[r, "(f,f^{\#})"] & (Y,\mathcal{O}_Y) \end{tikzcd}$$

במקרה הכללי, נשתמש במקרה הפרטי דלעיל עבור המורפיזם

$$(f,f^{\#}) \circ (\imath_U,\imath_U^{\#})\colon (U,\mathcal{O}_U) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$$

ונראה כי התרשים $(\star)$ אכן חילופי.

יהי $x \in U$ ויהי $y = f(x) \in V$. אזי קיים תרשים חילופי, כאשר האיזומורפיזמים האנכיים מתקבלים מלמה 2.2.1:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{U,x} & \mathcal{O}_{V,y} \arrow[l, "(f_0^{\#})_x"'] \\
\mathcal{O}_{X,x} \arrow[u, "\imath^{\#}_{U,x}", "\wr"'] & \mathcal{O}_{Y,y} \arrow[l, "f_x^{\#}"] \arrow[u, "\imath^{\#}_{V,y}", "\wr"']
\end{tikzcd}$$

בפרט, אם $(f, f^{\#})$ מקומי אזי גם $(f_0, f_0^{\#})$ מקומי. יתר על כן, ההעתקות $(f_0^{\#})_x$ לכל $x \in U$ נקבעות ביחידות. ברור כי גם ההעתקה הרציפה $f_0\colon U \to V$ נקבעת ביחידות. לכן לפי למה 2.1.12, המורפיזם $(f_0, f_0^{\#})$ נקבע ביחידות. $\blacksquare$

סימון 2.2.4: את המורפיזם $(f_0, f_0^{\#})$ מלמה 2.2.3 נסמן ב־$(f|_U^V, f^{\#}|_U^V)$, וב־$(f|_U, f^{\#}|_U)$ אם $V = X$.

למה 2.2.5: *יהי* $(f, f^{\#})\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *מורפיזם של מרחבי חוגים. יהיו* $U_0, U \in \mathrm{Open}(X)$ ו־$V_0, V \in \mathrm{Open}(Y)$ *כך ש־* $U_0 \subseteq U$, $V_0 \subseteq V$, $f(U) \subseteq V$ ו־$f(U_0) \subseteq V_0$. *אזי*

$$\big((f, f^{\#})|_U^V\big)|_{U_0}^{V_0} = (f, f^{\#})|_{U_0}^{V_0}.$$

הוכחה: נתבונן בתרשים הבא:

$$\begin{tikzcd}
(U_0, \mathcal{O}_{U_0}) \arrow[r, "\left((f,f^{\#})|_U^V\right)|_{U_0}^{V_0}"] \arrow[d, "(\jmath_{U_0}, \jmath_{U_0}^{\#})"'] & (V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \arrow[d, "(\jmath_{V_0}, \jmath_{V_0}^{\#})"] \\
(U, \mathcal{O}_U) \arrow[r, "(f,f^{\#})|_U^V"] \arrow[d, "(\imath_U, \imath_U^{\#})"'] & (V, \mathcal{O}_V) \arrow[d, "(\imath_V, \imath_V^{\#})"] \\
(X, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "(f,f^{\#})"] & (Y, \mathcal{O}_Y)
\end{tikzcd}$$

שני הריבועים בתרשים חילופיים מעצם ההגדרה, ולכן התרשים הנו חילופי. לפי למה 2.2.2, הרכבת החיצים המאונכים

מימין ומשמאל נותנת את הריבוע החילופי הבא:

$$\begin{tikzcd}
(U_0, \mathcal{O}_{U_0}) \arrow[r, "\left((f,f^{\#})|_U^V\right)|_{U_0}^{V_0}"] \arrow[d, "(\imath_{U_0}, \imath_{U_0}^{\#})"'] & (V_0, \mathcal{O}_{V_0}) \arrow[d, "(\imath_{V_0}, \imath_{V_0}^{\#})"] \\
(X, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "(f,f^{\#})"] & (Y, \mathcal{O}_Y)
\end{tikzcd}$$

אבל זהו התרשים המגדיר את $(f, f^{\#})|_{U_0}^{V_0}$. מהיחידות בלמה 2.2.3 נובע כי

$$\left((f, f^{\#})|_U^V\right)|_{U_0}^{V_0} = (f, f^{\#})|_{U_0}^{V_0},$$

כנדרש. ∎

למה 2.2.6: *יהיו* $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y), (Z, \mathcal{O}_Z)$ *מרחבי חוגים ויהיו* $V \in \mathrm{Open}(Y), W \in \mathrm{Open}(Z)$, $U \in \mathrm{Open}(X)$. *יהיו* $(f, f^{\#})\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$, $(g, g^{\#})\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ *מורפיזמים כך ש-* $f(U) \subseteq V$ *ו-* $g(V) \subseteq W$. *אזי*

$$(g|_V^W) \circ (f|_U^V) = (g \circ f)|_U^W.$$

הוכחה: כל מה שדרוש הוא להתבונן בתרשים החילופי הבא:

$$\begin{tikzcd}
(U, \mathcal{O}_U) \arrow[r, "(f,f^{\#})|_U^V"] \arrow[d, "(\imath_U, \imath_U^{\#})"'] & (V, \mathcal{O}_V) \arrow[r, "(g,g^{\#})|_V^W"] \arrow[d, "(\imath_V, \imath_V^{\#})"] & (W, \mathcal{O}_W) \arrow[d, "(\imath_W, \imath_W^{\#})"] \\
(X, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "(f,f^{\#})"] & (Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[r, "(g,g^{\#})"] & (Z, \mathcal{O}_Z)
\end{tikzcd}$$

השויון האמור נובע כעת מהיחידות. ∎

למה 2.2.7: *יהיו* $(f, f^{\#}), (g, g^{\#})\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *מורפיזמים של מרחבי חוגים. נניח כי קיים ל-* X *כיסוי פתוח* $X = \bigcup_i U_i$ *כך שלכל* i,

$$(f|_{U_i}, f^{\#}|_{U_i}) = (g|_{U_i}, g^{\#}|_{U_i}).$$

אזי $(f, f^{\#}) = (g, g^{\#})$. *במלים אחרות, מורפיזם נקבע ביחידות ע"י אוסף הצמצומים שלו מעל כיסוי פתוח.*

הוכחה: ברור כי בתור העתקות רציפות, $f = g$.

יהי $x \in X$, ויהי U_0 איבר בכיסוי הפתוח של X כך ש־$x \in U_0$. נסמן $f_0 = f_{U_0}$ וכו'. הואיל ו־$(g_0, g_0^{\#}) = (f_0, f_0^{\#})$, לפי למה 2.2.3 התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd}
(U_0, \mathcal{O}_{U_0}) \arrow[r, "(\imath_0, \imath_0^{\#})"] \arrow[d, "(\imath_0, \imath_0^{\#})"'] \arrow[dr, "(g_0, g_0^{\#})", "(f_0, f_0^{\#})"'] & (X, \mathcal{O}_X) \arrow[d, "(g, g^{\#})"] \\
(X, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "(f, f^{\#})"] & (Y, \mathcal{O}_Y)
\end{tikzcd}$$

לכן התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{U_0,x} & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[l, "(\imath_0^{\#})_x"'] \\
\mathcal{O}_{X,x} \arrow[u, "(\imath_0^{\#})_x"] & \mathcal{O}_{Y,f(x)} \arrow[l, "f_x^{\#}"'] \arrow[u, "g_x^{\#}"']
\end{tikzcd}$$

לפי למה 2.2.1, $(\imath_0^{\#})_x$ הנו איזומורפיזם, ולכן $f_x^{\#} = g_x^{\#}$. לכן לפי למה 2.1.12, $(f, f^{\#}) = (g, g^{\#})$. ∎

למה 2.2.8: *יהיו* $(X, \mathcal{O}_X)$ *ו־*$(Y, \mathcal{O}_Y)$ *מרחבי חוגים (מקומיים). יהי* $X = \bigcup_i U_i$ *כיסוי פתוח ונניח כי קיימים מורפיזמים (מקומיים)*

$$(f_i, f_i^{\#})\colon (U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

לכל i *כך שלכל* i, j,

$$(f_i, f_i^{\#})|_{U_i \cap U_j} = (f_j, f_j^{\#})|_{U_i \cap U_j}.$$

אזי קיים מורפיזם (מקומי)

$$(f, f^{\#})\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

כך ש־ $(f, f^{\#})|_{U_i} = (f_i, f_i^{\#})$ *לכל* i.

הוכחה: קיום ההעתקה הרציפה f הנו ברור. על מנת להראות את קיום מורפיזם האלומות, ניתן לבצע את השינויים המתאימים בהוכחת למה 1.9.1 עבור מרחבי חוגים. ∎

למה 2.2.9: *יהי $f\colon X \to Y$ מורפיזם של מרחבי חוגים. נניח כי $Y = \bigcup_i V_i$ כיסוי פתוח ו־ $U_i = f^{-1}(V_i)$. אם $f|_{U_i}^{V_i}\colon U_i \to V_i$ הנו איזומורפיזם לכל i אזי f איזומורפיזם.*

הוכחה: ברור כי ההעתקה הרציפה f הנה הומאומורפיזם. לכל $x \in X$ קיים התרשים החילופי הבא עבור i כך ש־$x \in U_i$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{U_i,x} & \mathcal{O}_{V_i,f(x)} \arrow[l, "((f|_U^V)^{\#})_x"'] \\
\mathcal{O}_{X,x} \arrow[u, "\wr"] & \mathcal{O}_{Y,f(x)} \arrow[l, "f_x^{\#}"] \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

לפי ההנחה, ההומומורפיזם העליון הנו איזומורפיזם, ולכן גם $f_x^{\#}$ הנו איזומורפיזם. לפי למה 2.1.13, $(f, f^{\#})$ הנו איזומורפיזם. ∎

2.3 הספקטרום של חוג.

הגדרה 2.3.1: *יהי A חוג. יהי $\mathrm{Spec}(A)$ אוסף האידיאלים הראשוניים שלו, ולכל תת־קבוצה E של A תהי*

$$V(E) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \supseteq E\}.$$

כן נגדיר לכל $f \in A$, $D(f) = \mathrm{Spec}(A) \smallsetminus V(f)$

טענה 2.3.2:

(1) $V(A) = \emptyset$, $V(0) = \mathrm{Spec}(A)$, $D(1) = \mathrm{Spec}(A)$, $D(0) = \emptyset$.

(2) *לכל $E \subseteq A$ יהי $\mathfrak{a}$ האידיאל הנוצר ע"י אברי E. אז* $V(E) = V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$.

(3) $V(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i) = \bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i)$

(4) $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$

(5) $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$ *אם ורק אם* $\sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \sqrt{\mathfrak{b}}$

(6) $V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{f\in\mathfrak{a}} V(f)$ *(או* $\mathrm{Spec}(A) \smallsetminus V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{f\in\mathfrak{a}} D(f)$*)*.

(7) *אם* $D(f) \subseteq \bigcup_{i\in I} D(f_i)$ *אז קיימת* $I_0 \subseteq I$, $|I_0| < \aleph_0$ *כך ש־* $D(f) \subseteq \bigcup_{i\in I_0} D(f_i)$*, וקיים n טבעי כך ש־* $f^n \in \sum_{i\in I_0}(f_i)$.

(8) $D(f^n) = D(f)$

הוכחה: ראה למשל ברשימות "אלגברה ב3" מאת משה ירדן. ∎

מ־(1),(3),(4) נובע כי האוסף $V(\mathfrak{a})$ מהווה אוסף קבוצות סגורות לטופולוגיה על $\mathrm{Spec}(A)$. מ־(6) הקבוצות מהצורה $D(f)$ מהוות בסיס לקבוצות הפתוחות בטופולוגיה זו. מ־(7) כל אחת מן הקבוצות $D(f)$ היא דחוסה (קומפקטית), בפרט מ־(1), $\mathrm{Spec}(A)$ הוא מרחב דחוס.

נגדיר כעת מבנה של אלומה $\mathcal{O}$ על $\mathrm{Spec}(A)$ באופן הבא: לכל $U \in \mathrm{Open}(\mathrm{Spec}(A))$,

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(U) :=\big\{ &s \in \prod_{\mathfrak{p}\in U} A_{\mathfrak{p}} \mid \forall \mathfrak{p} \in U \;\; \exists V \in \mathrm{Open}(U), V \ni \mathfrak{p}, \\ &\exists a, b \in A, \forall \mathfrak{q} \in V, b \notin \mathfrak{q} \;\wedge\; s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{b} \in A_{\mathfrak{q}} \big\}\end{aligned}$$

הגדרה שקולה הנה

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(U) :=\big\{ &s \in \prod_{\mathfrak{p}\in U} A_{\mathfrak{p}} \mid \text{ there exists an open cover } U = \bigcup_i U_i \text{ and } a_i, b_i \in A \text{ for all } i \\ &\text{such that } \forall \mathfrak{p} \in U_i,\; b_i \notin \mathfrak{p} \wedge s(\mathfrak{p}) = \frac{a_i}{b_i} \big\}\end{aligned}$$

$\mathcal{O}(U)$ הוא חוג.

אם $V \subseteq U$ יש הומומורפיזם צמצום $\mathrm{res}_{U,V} \colon \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ שמתקבל ע"י ההטלה הטבעית. יחד עם העתקות הצמצום מתקבלת אלומה, ולכן $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ הנו מרחב חוגים.

משפטון 2.3.3: *יהי A חוג. אזי*

(1) *לכל* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}$.

(2) *לכל* $f \in A$, $\mathcal{O}(D(f)) \cong A_f$.

(3) $\mathcal{O}(\mathrm{Spec}(A)) \cong A$.

הוכחה:

(1) נגדיר הומומורפיזם

$$\varphi \colon \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \to A_{\mathfrak{p}}, \quad \sigma \mapsto s(\mathfrak{p})$$

כאשר $s \in \mathcal{O}(U)$ עבור U סביבה של $\mathfrak{p}$, ומתקיים $\sigma = s_{\mathfrak{p}}$ (הכוונה ב־$s_{\mathfrak{p}}$ הנה לתמונה של s ב־$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ תחת העתקת הגבול הישר). נראה כי φ איזומורפיזם:

φ מוגדרת היטב: אם $s \in \mathcal{O}(U_1)$ ו־$t \in \mathcal{O}(U_2)$ מקיימות $s_{\mathfrak{p}} = t_{\mathfrak{p}}$, אז קיימת סביבה של $\mathfrak{p}$ $V \subseteq U_1 \cap U_2$, כך ש־$s|_V = t|_V$, ואז בפרט $s(\mathfrak{p}) = t(\mathfrak{p})$.

φ על: כל איבר ב $A_{\mathfrak{p}}$ אפשר להציג ע"י $\frac{a}{f}$ באשר $a \in A, f \in A \setminus \mathfrak{p}$. נשים לב כי $\frac{a}{f}$ מגדיר איבר s בחתך $\mathcal{O}(D(f))$ וש־$\mathfrak{p} \in D(f)$ ומתקיים $s(\mathfrak{p}) = \frac{a}{f}$ ב $A_{\mathfrak{p}}$. לכן φ על.

φ חח"ע: נניח $s(\mathfrak{p})=0$, ותהי U פתוחה ו־$\sigma\in\mathcal{O}(U)$ כך ש $s=\sigma_{\mathfrak{p}}$. לאחר הקטנת U במידת הצורך נוכל להניח כי $\sigma=\frac{a}{f}$ ב־$\mathcal{O}(U)$. ב־$A_{\mathfrak{p}}$ $\frac{a}{f}=0$, לכן קיים $t\in A\setminus\mathfrak{p}$ כך ש־$ta=0$. אז $\mathfrak{p}\in D(t)\cap U$ ולכל $\mathfrak{q}\in D(t)\cap U$ מתקיים $\frac{a}{f}=0$ ב־$A_{\mathfrak{q}}$. לכן התמונה של σ ושל 0 בגבעול $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ זהה, כלומר $s=0$ כנדרש.

(2) נגדיר הומומורפיזם

$$\varphi\colon A_f\to\mathcal{O}(D(f)),\quad \frac{a}{f^n}\mapsto\frac{a}{f^n}$$

ראשית נראה כי φ מוגדר היטב: נניח $\frac{a}{f^n}=\frac{b}{f^m}$ ב־A_f. אז קיים r טבעי כך ש־$f^r(f^m a-f^n b)=0$, ואז לכל $\mathfrak{q}\in D(f)$, $f^r\notin\mathfrak{q}$, ולכן $\frac{a}{f^n}=\frac{b}{f^m}$ ב־$A_{\mathfrak{q}}$. מכאן $\frac{a}{f^n}=\frac{b}{f^m}$ גם כפונקציות ב־$\mathcal{O}(D(f))$.

φ חח"ע: נניח $\frac{a}{f^n}=0$ ב־$\mathcal{O}(D(f))$, או במלים אחרות לכל $\mathfrak{q}\in D(f)$ מתקיים $\frac{a}{f^n}=0$ ב־$A_{\mathfrak{q}}$. אז לכל $\mathfrak{q}\in D(f)$ קיים $t_{\mathfrak{q}}\in A\setminus\mathfrak{q}$ כך ש $t_{\mathfrak{q}}a=0$. יהי כעת $\mathfrak{a}=\operatorname{Ann}(a)$. לכל $\mathfrak{q}\in D(f)$, $\mathfrak{a}\not\subseteq\mathfrak{q}$, כלומר $V(\mathfrak{a})\cap D(f)=\emptyset$, או $V(\mathfrak{a})\subseteq V(f)$. לכן (מטענה 2.3.2(5)), $f\in\sqrt{\mathfrak{a}}$, ולכן קיים r טבעי כך ש־$f^r\in\mathfrak{a}$. הראנו אם־כן $f^r a=0$ ולכן $a=0$ ב־A_f, ו־φ חח"ע.

φ על: יהי $s\in\mathcal{O}(D(f))$. לפי הגדרת האלומה $\mathcal{O}$ לעיל, ניתן לכסות את $D(f)$ על־ידי קבוצות בסיס $D(f)=\bigcup_{i\in I}D(h_i)$ כך שלכל $i\in I$, $s|_{D(h_i)}=\frac{f_i}{g_i}$. לכל $\mathfrak{q}\in D(h_i)$, $g_i\notin\mathfrak{q}$ ולכן $D(h_i)\subseteq D(g_i)$. מטענה 2.3.2(5), $h_i\in\sqrt{g_i}$, ולכן קיימים r_i טבעי ו־$c_i\in A$ כך ש־$h_i^{r_i}=c_i g_i$. היות ו־ $\frac{f_i}{g_i}=\frac{c_i f_i}{c_i g_i}=\frac{c_i f_i}{h_i^{r_i}}$, והיות ו־$D(h_i)=D(h_i^{r_i})$, נוכל להחליף את f_i ב־$c_i f_i$ ואת h_i ב־$h_i^{r_i}$ כדי לקבל $s\mid_{D(h_i)}=\frac{f_i}{h_i}$. מטענה 2.3.2(7), נוכל להניח גם כי I קבוצה סופית.

כעת, לכל i,j, $D(h_i h_j)=D(h_i)\cap D(h_j)$ (טענה 2.3.2(4), ולכן ב־$D(h_i h_j)$ מתקיים ש־ $s|_{D(h_i h_j)}=\frac{f_i}{h_i}=\frac{f_j}{h_j}$. מכך ש־$\varphi$ חח"ע השוויון $\frac{f_i}{h_i}=\frac{f_j}{h_j}$ תקף גם ב־$A_{h_i h_j}$, דהיינו קיים n טבעי כך ש־$(h_i h_j)^n(h_j f_i-h_i f_j)=0$ ב־A (נבחר n גדול דיו כך שיתאים לכל הזוגות (i,j)). מכאן

$$h_j^{n+1}(h_i^n f_i)-h_i^{n+1}(h_j^n f_j)=0$$

על־ידי החלפת f_i ב־$h_i^n f_i$ ו־h_i ב־h_i^{n+1} (נזכור כי $D(h_i)=D(h_i^{n+1})$), נקבל כי

$$h_j f_i-h_i f_j=0$$

ועדיין מתקיים

$$s|_{D(h_i)}=\frac{f_i}{h_i}$$

כיוון ש־$D(f)=\bigcup_{i\in I}D(h_i)$, נקבל מטענה 2.3.2 שקיימים r טבעי ו־$a_i\in A$, כך ש־ $f^r=\sum_{i\in I}a_i h_i$. נסמן $a=\sum a_i f_i$, אז לכל i ב־I מתקיים:

$$ah_i=\sum_{j\in I}a_j f_j h_i=\sum_{j\in I}a_j h_j f_i=f^r f_i$$

לכל $\mathfrak{q} \in D(h_i)$, $f \notin \mathfrak{q}$, ולכן ניתן לחלק ולקבל

$$s|_{D(h_i)} = \frac{f_i}{h_i} = \frac{a}{f^r}$$

$\frac{a}{f^r}$ הוא איבר ב־A_f המקיים אם־כן $s = \varphi(\frac{a}{f^n})$ בכל $D(f)$, מכאן φ על, ולכן איזומורפיזם.

(3) נובע מ־(2) עם לקיחת $f = 1$. ∎

הערה: ניתן גם להסיק את (1) מ־(2) באופן הבא:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{O}_\mathfrak{p} & = & \varinjlim_{U \ni \mathfrak{p}} \mathcal{O}(U) & = & \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} \mathcal{O}(D(f)) & \cong & \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} A_f & = & A_\mathfrak{p} \\ \sigma & = & s_\mathfrak{p} & = & (s|_{D(f)})_\mathfrak{p} & \mapsto & [\frac{a}{f^n}] & = & \frac{a}{f^n} = s(\mathfrak{p}) \end{array}$$

הסבר: בוחרים $s \in \mathcal{O}(U)$ נציג של σ. קיים $f \in A$ כך ש־$D(f) \subseteq U$, ואז $s_\mathfrak{p} = (s|_{D(f)})_\mathfrak{p}$. נסמן $\varphi^{-1}(s|_{D(f)}) = \frac{a}{f^n} \in A_f$. אז מתקיים $s|_{D(f)} = \frac{a}{f^n}$, ולכן גם $s(\mathfrak{p}) = \frac{a}{f^n} \in A_\mathfrak{p}$. ∎

תוצאה 2.3.4: *לכל חוג A, $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ הנו מרחב חוגים מקומיים.*

למה 2.3.5: *יהי $\varphi\colon A \to B$ הומומורפיזם של חוגים. יהיו $S \subseteq A$ ו־$T \subseteq B$ תת־קבוצות כפליות כך ש־$\varphi(S) \subseteq T$. אזי קיים הומומורפיזם יחיד $\hat{\varphi}\colon S^{-1}A \to T^{-1}B$ כך שהתרשים הבא חילופי:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ S^{-1}A \arrow[r, dashed, "\hat{\varphi}"] & T^{-1}B \end{tikzcd}$$

הוכחה: שימוש פשוט של התכונה האוניברסלית של חוגי שברים. ∎

הערה 2.3.6: יהי $\varphi\colon A \to B$ הומומורפיזם של חוגים. עבור כל $a \in A$ נסמן ב־$\varphi_a\colon A_a \to B_{\varphi(a)}$ את ההומומורפיזם $\hat{\varphi}$ מלמה 2.3.5 עבור $S = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ו־$T = \{\varphi(a)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. עבור כל $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ נסמן ב־$\varphi_\mathfrak{q}\colon A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})} \to B_\mathfrak{q}$ את ההומומורפיזם המתאים עבור $S = A \smallsetminus \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ ו־$T = B \smallsetminus \mathfrak{q}$.

למה 2.3.7: *יהי $\varphi\colon A \to B$ הומומורפיזם של חוגים ויהי $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$. אזי $\varphi_\mathfrak{q}\colon A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})} \to B_\mathfrak{q}$ הנו הומומורפיזם מקומי.*

הוכחה: נסמן $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. אזי

$$\begin{aligned} \varphi_\mathfrak{q}^{-1}(\mathfrak{m}_{B_\mathfrak{q}}) &= \{\frac{a}{s} \mid a \in A, s \in A \smallsetminus \mathfrak{p}, \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)} \in \mathfrak{m}_{B_\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}B_\mathfrak{q}\} \\ &= \{\frac{a}{s} \mid a \in A, s \in A \smallsetminus \mathfrak{p}, \varphi(a) \in \mathfrak{q}\} \\ &= \{\frac{a}{s} \mid a \in A, s \in A \smallsetminus \mathfrak{p}, a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}\} \\ &= \mathfrak{m}_{A_\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

לכן $\varphi_{\mathfrak{q}}$ מקומי. ∎

טענה 2.3.8: *יהי $\varphi\colon A \to B$ הומומורפיזם של חוגים. נגדיר $X = \operatorname{Spec}(A)$, $Y = \operatorname{Spec}(B)$. אזי קיים מורפיזם* ***יחיד*** *של מרחבי חוגים מקומיים*

$$(f, f^{\#})\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

המקיים את התכונות הבאות:

(1) $f(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ *לכל* $\mathfrak{q} \in Y$.

(2) *לכל* $\mathfrak{q} \in Y$ *התרשים הבא חילופי:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X,f(\mathfrak{q})} \arrow[r, "f^{\#}_{\mathfrak{q}}"] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{O}_{Y,\mathfrak{q}} \arrow[d, "\wr"] \\ A_{f(\mathfrak{q})} \arrow[r, "\varphi_{\mathfrak{q}}"] & B_{\mathfrak{q}} \end{tikzcd}$$

כאשר האיזומורפיזמים האנכיים הם אלו מטענה 2.3.3(1).

יתר על כן, מורפיזם זה מקיים את התנאי הבא:

(3) *לכל* $a \in A$ *התרשים הבא חילופי:*

$$\begin{tikzcd} A_a \arrow[r, "\varphi_a"] \arrow[d, "\wr"] & B_{\varphi(a)} \arrow[d, "\wr"] \\ \mathcal{O}_X(D(a)) \arrow[r, "f^{\#}(D(a))"] & \mathcal{O}_Y(D(\varphi(a))) \end{tikzcd}$$

כאשר האיזומורפיזמים האנכיים הם אלו מטענה 2.3.3(2).

הוכחה: נגדיר את ההעתקה $f\colon Y \to X$ ע"י $f(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. אזי לכל $E \subseteq A$ מתקיים

$$f^{-1}(V(E)) = V(\varphi(E))$$

ולכן f רציפה. נשים לב כי בפרט $f^{-1}(D(a)) = D(\varphi(a))$ לכל $a \in A$.

תהי $U \in \operatorname{Open}(X)$ ותהי $V = f^{-1}(U) \in \operatorname{Open}(Y)$. לכל $\sigma \in \mathcal{O}_X(U)$ נגדיר את האיבר

$$f^{\#}(U)(\sigma) \in \prod_{\mathfrak{q} \in V} B_{\mathfrak{q}}$$

ע"י

$$f^{\#}(U)(\sigma)(\mathfrak{q}) = \varphi_{\mathfrak{q}}\big(\sigma(f(\mathfrak{q}))\big)$$

לכל $\mathfrak{q} \in V$. נציין כי $f^{\#}(U)(\sigma)$ מוגדר היטב כי לכל $\mathfrak{q} \in V$ מתקיים $f(\mathfrak{q}) \in U$, לכן ניתן להפעיל את σ ולקבל איבר ב־$A_{f(\mathfrak{q})}$, עליו ניתן להפעיל את $\varphi_{\mathfrak{q}}$ ולקבל איבר ב־$B_{\mathfrak{q}}$.

יהי $\mathfrak{q}_0 \in V$ ויהי $\mathfrak{p}_0 = f(\mathfrak{q}_0) \in U$. לפי הגדרת $\mathcal{O}_X(U)$ קיימת $U_0 \in \mathrm{Open}(U)$ המכילה את $\mathfrak{p}_0$ ואיברים $a, s \in A$ כך שלכל $\mathfrak{p} \in U_0$, $s \notin \mathfrak{p}$ ו־$\sigma(\mathfrak{p}) = \frac{a}{s}$ ב־$A_{\mathfrak{p}}$.

יהיו

$$.b = \varphi(a), t = \varphi(s) \in B$$

תהי $V_0 = f^{-1}(U_0)$, סביבה פתוחה של $\mathfrak{q}_0$ המוכלת ב־V. יהי $\mathfrak{q} \in V_0$. אזי $t \notin \mathfrak{q}$ הואיל ו־$s \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. בנוסף, לפי ההגדרה, מתקיים

$$.f^{\#}(U)(\sigma)(\mathfrak{q}) = \frac{b}{t}$$

לכן $f^{\#}(U)(\sigma) \in \mathcal{O}_Y(V)$. כך קיבלנו העתקה

$$.f^{\#}(U)\colon \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U))$$

מכיון ש־$\varphi_{\mathfrak{q}}$ הומומורפיזם של חוגים לכל $\mathfrak{q}$, $f^{\#}(U)$ הנו הומומורפיזם של חוגים. לבסוף, ברור כי $f^{\#}$ מתחלף עם צמצומים ולכן מתקבל מורפיזם של אלומות

$$.f^{\#}\colon \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$$

יהי $\mathfrak{q} \in Y$ ויהי $\mathfrak{p} = f(\mathfrak{q})$. נסמן ב־$\mu\colon \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} A_{\mathfrak{p}}$ ו־$\nu\colon \mathcal{O}_{Y,\mathfrak{q}} \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{q}}$ את האיזומורפיזמים מלמה .2.3.3

יהי $\gamma \in \mathcal{O}_{X,f(\mathfrak{q})}$. אזי קיימת סביבה פתוחה U של $\mathfrak{p}$ כך ש־$\gamma = \sigma_{\mathfrak{p}}$ כאשר $\sigma \in \mathcal{O}_X(U)$. לפי הגדרת $f^{\#}_{\mathfrak{q}}$,

$$, f^{\#}_{\mathfrak{q}}(\gamma) = \tau_{\mathfrak{q}}$$

כאשר

$$.\tau = f^{\#}(U)(\sigma) \in \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U))$$

לכן

$$\begin{aligned}
\nu(f^{\#}_{\mathfrak{q}}(\gamma)) &= \nu(\tau_{\mathfrak{q}}) \\
&= \tau(\mathfrak{q}) \quad \text{לפי הגדרת } \nu \\
&= \varphi_{\mathfrak{q}}(\sigma(\mathfrak{p})) \quad \text{לפי הגדרת } f^{\#}(U) \\
&= \varphi_{\mathfrak{q}}(\mu(\sigma_p)) \quad \text{לפי הגדרת } \mu \\
&= \varphi_{\mathfrak{q}}(\mu(\gamma)).
\end{aligned}$$

לכן התרשים (2) אכן חילופי לכל $\mathfrak{q}$.

בפרט, $f_{\mathfrak{q}}^{\#}$ הנו הומומורפיזם מקומי, ולכן $(f, f^{\#})$ הנו מורפיזם של מרחבי חוגים מקומיים.

חילופיות התרשים (3) נובעת ישירות מהגדרת $f^{\#}$.

לבסוף, לפי למה 2.1.12, התנאים (1) ו־(2) קובעים את $f^{\#}$ ביחידות. $\blacksquare$

למה 2.3.9: *יהי* $\varphi\colon A \to B$ *הומומורפיזם של חוגים ויהי* $(f, f^{\#})\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ *מורפיזם הסכימות המתאים, כאשר* $X = \operatorname{Spec}(A)$ *ו־* $Y = \operatorname{Spec}(B)$. *יהי* $a \in A$. *אזי התרשים הבא חילופי:*

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dd] & & B \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dd] \\
\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \arrow[rr, "f^{\#}(X)"] \arrow[dd, "\operatorname{res}^{\mathcal{O}_X}_{X, D(a)}"'] & & \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[dd, "\operatorname{res}^{\mathcal{O}_Y}_{Y, D(\varphi(a))}"] & \\
& A_a \arrow[rr, "\varphi_a"] \arrow[dl, "\sim"'] & & B_{\varphi(a)} \arrow[dl, "\sim"'] \\
\Gamma(D(a), \mathcal{O}_X) \arrow[rr, "f^{\#}(D(a))"] & & \Gamma(D(\varphi(a)), \mathcal{O}_Y) &
\end{tikzcd}$$

הוכחה:

$(*)$ הפאה הקדמית חילופית הואיל ו־$f^{\#}$ הנו מורפיזם של אלומות.

$(*)$ הפאה האחורית חילופית לפי הגדרת φ_a (ראה הערה 2.3.6).

$(*)$ הפאה העליונה והתחתונה חילופיות לפי סעיף (3) של טענה 2.3.8.

$(*)$ חילופיות הפאה השמאלית והימנית נובעות מעצם הגדרת האיזומורפיזמים. $\blacksquare$

טענה 2.3.10: Spec *הנו פונקטור.*

הוכחה: ברור כי הומומורפיזם הזהות של חוג A משרה את מורפיזם הזהות של $\operatorname{Spec}(A)$.

יהי

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\theta"'] & & B \arrow[dl, "\psi"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

תרשים חילופי של הומומורפיזמים של חוגים.

יהיו $X=\mathrm{Spec}(A), Y=\mathrm{Spec}(B), Z=\mathrm{Spec}(C)$.

יהיו $(f,f^{\#}),(g,g^{\#}),(h,h^{\#})$ המורפיזמים המושרים ע"י φ,ψ,θ בהתאמה. צריך להראות כי התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{O}_X) & & (Y,\mathcal{O}_Y) \arrow[ll, "(f,f^{\#})"'] \\
& (Z,\mathcal{O}_Z) \arrow[ul, "(h,h^{\#})"] \arrow[ur, "(g,g^{\#})"'] &
\end{tikzcd} \tag{$\star$}$$

עבור ההעתקות הרציפות, לכל $\mathfrak{r}\in Z$ מתקיים

$$\theta^{-1}(\mathfrak{r})=\varphi^{-1}(\psi^{-1}(\mathfrak{r}))$$

ולכן

$$h=f\circ g.$$

יהי $\mathfrak{r}\in Z$ ויהיו $\mathfrak{q}=g(\mathfrak{r})$, $\mathfrak{p}=h(\mathfrak{r})$. אזי נובע מההגדרות כי התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd}
A_{\mathfrak{p}} \arrow[rr, "\varphi_{\mathfrak{q}}"] \arrow[dr, "\theta_{\mathfrak{r}}"'] & & B_{\mathfrak{q}} \arrow[dl, "\psi_{\mathfrak{r}}"] \\
& C_{\mathfrak{r}} &
\end{tikzcd}$$

מכך נובע ישירות כי לכל $W\in\mathrm{Open}(Z)$ התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(h^{-1}(W)) & & \mathcal{O}_Y(g^{-1}(W)) \arrow[ll, "f^{\#}(g^{-1}(W))"'] \\
& \mathcal{O}_Z(W) \arrow[ul, "h^{\#}(W)"] \arrow[ur, "g^{\#}(W)"'] &
\end{tikzcd}$$

לכן $h^{\#}=(g_*f^{\#})\circ g^{\#}$, ולכן התרשים $(\star)$ אכן חילופי. ∎

הערה 2.3.11: תוך שיבוש הסימון, נשתמש מעתה בסימון X גם עבור מרחב טופולוגי X וגם עבור מרחב חוגים $(X,\mathcal{O}_X)$ המוגדר מעליו. כמו כן אם $(X,\mathcal{O}_X)$ ו־$(Y,\mathcal{O}_Y)$ מרחבי חוגים נשתמש ב־$f\colon X\to Y$ לסמן גם העתקה רציפה של מרחבים טופולוגים וגם מורפיזם $(f,f^{\#})$ בעל העתקה רציפה זו.

הגדרה 2.3.12: יהי $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ פונקטור בין קטגוריות כלשהן. נאמר כי F הנו נאמן (בהתאמה, מלא) אם לכל זוג עצמים A, B של $\mathcal{C}$ ההעתקה

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

הנקבעת על ידי F הנה חח"ע (בהתאמה, על).

טענה 2.3.13: *הפונקטור* Spec *הנו נאמן.*

הוכחה: יהי $\varphi\colon A \to B$ הומומורפיזם של חוגים, ויהי $f\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ המורפיזם המושרה. נשתמש בסעיף (3) של למה 2.3.8 עבור $a = 1$ ונקבל תרשים חילופי

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ \mathcal{O}_X(X) & \xrightarrow{f^{\#}(X)} & \mathcal{O}_Y(Y) \end{array}$$

בפרט, φ נקבע ביחידות ע"י f. לכן ההשמה $(f, f^{\#}) \mapsto \varphi$ הנה חח"ע. ∎

טענה 2.3.14: *הפונקטור* Spec *הנו מלא.*

הוכחה: יהיו A, B חוגים, יהיו $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$, ויהי $(f, f^{\#})\colon Y \to X$ מורפיזם של מרחבי חוגים מקומיים. אזי צריך להראות כי קיים הומומורפיזם של חוגים $\varphi\colon A \to B$ שמשרה את $(f, f^{\#})$ (כמתואר בטענה 2.3.8).

נסמן ב־$\lambda_A\colon A \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(X)$ ו־$\lambda_B\colon B \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_Y(Y)$ את האיזומורפיזמים ונגדיר את φ להיות ההומומורפיזם המשלים את התרשים החילופי הבא:

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & B \\ \lambda_A \downarrow\wr & & \lambda_B \downarrow\wr \\ \mathcal{O}_X(X) & \xrightarrow{f^{\#}(X)} & \mathcal{O}_Y(Y) \end{array} \tag{1}$$

לכל $\mathfrak{q} \in Y$ התרשים הבא חילופי:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(X) & \xrightarrow{f^{\#}(X)} & \mathcal{O}_Y(Y) \\ \mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{X, f(\mathfrak{q})} \downarrow & & \downarrow \mathrm{res}^{\mathcal{O}_Y}_{Y, \mathfrak{q}} \\ \mathcal{O}_{X, f(\mathfrak{q})} & \xrightarrow{f^{\#}_{\mathfrak{q}}} & \mathcal{O}_{Y, \mathfrak{q}} \end{array} \tag{2}$$

בנוסף, לכל $\mathfrak{q}$ נסמן ב־$\alpha_{\mathfrak{q}}\colon \mathcal{O}_{X,f(\mathfrak{q})} \xrightarrow{\sim} A_{f(\mathfrak{q})}$ ו־$\beta_{\mathfrak{q}}\colon \mathcal{O}_{Y,\mathfrak{q}} \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{q}}$ את האיזומורפיזמים הטבעיים, ונגדיר את μ_q להיות ההומומורפיזם המשלים את התרשים החילופי הבא:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X,f(\mathfrak{q})} \arrow[r, "f^{\#}_{\mathfrak{q}}"] \arrow[d, "\alpha_{\mathfrak{q}}"', "\wr"] & \mathcal{O}_{Y,\mathfrak{q}} \arrow[d, "\beta_{\mathfrak{q}}"', "\wr"] \\ A_{f(\mathfrak{q})} \arrow[r, dashed, "\mu_{\mathfrak{q}}"] & B_{\mathfrak{q}} \end{tikzcd} \tag{3}$$

אם נצרף את התרשימים (1), (2) ו־(3) נקבל את התרשים החילופי הבא:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha_{\mathfrak{q}}\circ \mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{X,f(\mathfrak{q})}\circ\lambda_A"'] & B \arrow[d, "\beta_{\mathfrak{q}}\circ \mathrm{res}^{\mathcal{O}_Y}_{Y,\mathfrak{q}}\circ\lambda_B"] \\ A_{f(\mathfrak{q})} \arrow[r, "\mu_{\mathfrak{q}}"] & B_{\mathfrak{q}} \end{tikzcd} \tag{4}$$

יהי $a \in A$. אזי

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathfrak{q}} \circ \mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{X,f(\mathfrak{q})} \circ \lambda_A(a) &= \lambda_A(a)(\mathfrak{q}) && \text{לפי הגדרת } \alpha_{\mathfrak{q}} \\ &= \frac{a}{1} && \text{לפי הגדרת } \lambda_A \end{aligned}$$

ובאופן דומה עבור B. לכן ההומורפיזמים האנכיים בתרשים (4) הנם העתקות המיקום הטבעיות.

מהנחת המקומיות של f ותרשים (2) נובע כי $\mu_{\mathfrak{q}}$ הנו הומומורפיזם מקומי. יהי $a \in A$. אזי

$$\begin{aligned} a \in f(\mathfrak{q}) &\iff \frac{a}{1} \in \mathfrak{m}_{A_{f(\mathfrak{q})}} \\ &\iff \mu_{\mathfrak{q}}\Big(\frac{a}{1}\Big) \in \mathfrak{m}_{B_{\mathfrak{q}}} && \text{הואיל ו־} \mu_{\mathfrak{q}} \text{ מקומי} \\ &\iff \frac{\varphi(a)}{1} \in \mathfrak{m}_{B_{\mathfrak{q}}} && \text{לפי תרשים } (4) \\ &\iff \varphi(a) \in \mathfrak{q} \end{aligned}$$

לכן

$$.f(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \tag{5}$$

לכן תרשים (4) נראה כך:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})} \arrow[r, "\mu_{\mathfrak{q}}"] & B_{\mathfrak{q}} \end{tikzcd} \tag{6}$$

בפרט, לפי הגדרת $\varphi_{\mathfrak{q}}$ (ראה הערה $2.3.6$),

$$\mu_{\mathfrak{q}} = \varphi_{\mathfrak{q}}. \tag{7}$$

לכן $(f, f^{\#})$ הנו מורפיזם של מרחבי חוגים מקומיים כך שלכל $\mathfrak{q} \in Y$, $f(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ והתרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X,f(\mathfrak{q})} \arrow[r, "f^{\#}_{\mathfrak{q}}"] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{O}_{Y,\mathfrak{q}} \arrow[d, "\wr"] \\ A_{f(\mathfrak{q})} \arrow[r, "\varphi_{\mathfrak{q}}"] & B_{\mathfrak{q}} \end{tikzcd}$$

לכן $(f, f^{\#})$ מקיים את התנאים (1) ו־(2) בטענה $2.3.8$, ולכן $(f, f^{\#})$ מושרה ע"י ההומומורפיזם φ. ∎

למה $2.3.15$: *יהי A חוג ויהי $X = \operatorname{Spec}(A)$. עבור כל $a \in A$ קיים איזומורפיזם של מרחבי חוגים:*

$$(D(a), \mathcal{O}_X|_{D(a)}) \cong (\operatorname{Spec}(A_a), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A_a)}).$$

הוכחה: נגדיר $Y = \operatorname{Spec}(A_a)$. נסמן ב־$\varphi\colon A \to A_a$ את ההומומורפיזם הטבעי, וב־$(f, f^{\#})\colon Y \to X$ את המורפיזם המושרה ע"י φ.

אנו יודעים (מאלגברה חילופית בסיסית) כי f הנו הומאומורפיזם של Y על $D(a)$.

יהי $\mathfrak{q} \in Y$ ויהי $\mathfrak{p} = f(\mathfrak{q}) \in D(a)$. אזי $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}A_a$. לפי טענה $2.3.8$, התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \arrow[r, "f^{\#}_{\mathfrak{q}}"] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{O}_{Y,\mathfrak{q}} \arrow[d, "\wr"] \\ A_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\varphi_{\mathfrak{q}}"] & (A_a)_{\mathfrak{p}A_a} \end{tikzcd}$$

הואיל ו־$a \notin \mathfrak{p}$, $\varphi_{\mathfrak{q}}$ הנו איזומורפיזם, ולכן $f^{\#}_{\mathfrak{q}}$ הנו איזומורפיזם.

לפי למה $2.1.13$, $(f, f^{\#})$ הנו איזומורפיזם על תמונתו.

2.4 הגדרות ותכונות בסיסיות של סכימות.

הגדרה 2.4.1: **סכימה אפינית** הנה מרחב חוגים מקומיים שאיזומורפי (בקטגוריית מרחבי החוגים המקומיים) ל־$\mathrm{Spec}(A)$ עבור חוג A כלשהו.

הגדרה 2.4.2: **סכימה** הנה מרחב חוגים מקומיים $(X, \mathcal{O}_X)$, אשר קיים לו כיסוי על־ידי קבוצות פתוחות $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ כך שמרחבי החוגים המקומיים $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ הם סכימות אפיניות.

מורפיזם של סכימות הנו מורפיזם בין מרחבי החוגים המקומיים המתאימים.

מחלקת הסכימות הנה תת־קטגוריה של קטגוריית מרחבי החוגים המקומיים שנסמנה ב־$\mathbf{Sch}$.

למה 2.4.3: *תהי* $(X, \mathcal{O}_X)$ *סכימה. תהי* $U \in \mathrm{Open}(X)$. *אזי* $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ *הנה סכימה.*

הוכחה: נרשום $X = \bigcup_i V_i$, כאשר $(V_i, \mathcal{O}_X|_{V_i})$ הנה אפינית לכל i, נאמר $V_i = \mathrm{Spec}(A_i)$. לכל i, $U \cap V_i \in \mathrm{Open}(V_i)$ ולכן לפי טענה 2.3.2,

$$U \cap V_i = \bigcup_j D(a_{i,j}),$$

עבור $a_{i,j} \in A_i$. לכן לפי למה 2.3.15, ל־U יש כיסוי אפיני פתוח. ∎

דוגמה 2.4.4: יהי K שדה ויהי $X = \mathrm{Spec}(K)$. אזי X הנו יחידון ו־$\mathcal{O}_X(X) \cong K$.

דוגמה 2.4.5: יהי K שדה. נגדיר את הישר האפיני מעל K להיות

$$\mathbb{A}^1_K = \mathrm{Spec}(K[X]).$$

הנקודות של X הנן אידאל ה־0, שהנו נקודה צפופה (המכונית גם "נקודה יוצרת"), והשאר הנן נקודות סגורות שמתאימות לאידאלים המירביים של $K[X]$, בהתאמה חח"ע עם הפולינומים המתוקנים האי־פריקים מעל K.

הגדרה 2.4.6: תהי S סכימה. **סכימה מעל** S הנה סכימה X עם מורפיזם $X \to S$ של סכימות. מורפיזם של סכימות מעל S הנו מורפיזם $\varphi\colon X \to Y$ של סכימות כך שהתרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

אם A חוג, אזי סכימה מעל A הנה סכימה מעל $\mathrm{Spec}(A)$.

משפטון 2.4.7: *יהי A חוג, ו־ $(X,\mathcal{O}_X)$ סכימה. אז יש העתקה טבעית חח"ע ועל*

$$.\alpha=\alpha_{X,A}\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X,\mathrm{Spec}(A))\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,\Gamma(X,\mathcal{O}_X))$$

הוכחה: נסמן $S=\mathrm{Spec}(A)$. לפי למה 2.3.3, קיים איזומורפיזם של חוגים

$$.\lambda_A\colon A\xrightarrow{\sim}\Gamma(S,\mathcal{O}_S)$$

אם $(f,f^{\#})\colon (X,\mathcal{O}_X)\to(S,\mathcal{O}_S)$ מורפיזם, אזי $f^{\#}(S)\colon\Gamma(S,\mathcal{O}_S)\to\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ הומומורפיזם של חוגים. נגדיר

$$.\alpha\big((f,f^{\#})\big)=f^{\#}(S)\circ\lambda_A\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,\Gamma(X,\mathcal{O}_X))$$

את שארית ההוכחה נחלק לכמה חלקים.

א. $\alpha_{X,A}$ חחע"ע אם $X=\mathrm{Spec}(B)$ אפינית:

יהי $\varphi\colon A\to B$ הומומורפיזם של חוגים, ויהי $(f,f^{\#})\colon X\to S$ המורפיזם המושרה. לפי תרשים (1) בהוכחת טענה 2.3.14, התרשים הבא הנו חילופי:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\lambda_A"'] & B \arrow[d, "\lambda_B"] \\ \Gamma(S,\mathcal{O}_S) \arrow[r, "f^{\#}(S)"] & \Gamma(X,\mathcal{O}_X) \end{tikzcd} \tag{1}$$

לכן אם נגדיר את ההעתקה $\beta\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,B)\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X,S)$ כך ש־$\varphi\mapsto(f,f^{\#})$, נקבל את התרשים החילופי הבא:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X,S) \arrow[rr, "\alpha_{X,A}"] & & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,\Gamma(X,\mathcal{O}_X)) \\ & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,B) \arrow[ul, "\beta"] \arrow[ur, "\mathrm{Hom}(A,\lambda_B)"'] & \end{tikzcd}$$

תרשים זה הנו חילופי כי לכל $\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,B)$ מתקיים $f^{\#}(S)\circ\lambda_A=\lambda_B\circ\varphi$ לפי תרשים (1).

הואיל ו־λ_B הנו איזומורפיזם, $\mathrm{Hom}(A,\lambda_B)$ הנו חחע"ע. לפי טענות 2.3.13 ו־2.3.14, גם β הנה חחע"ע. לכן $\alpha_{X,A}$ הנה חחע"ע.

ב. α טבעי ב־X: מעתה נניח ש־X הנה סכימה כללית.

יהי $(h,h^\#)\colon (X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ מורפיזם של סכימות. עלינו להוכיח כי התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(Y,S) \arrow[r, "\alpha_{Y,A}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(h,S)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,\Gamma(Y,\mathcal{O}_Y)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(A,h^\#(Y))"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X,S) \arrow[r, "\alpha_{X,A}"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,\Gamma(X,\mathcal{O}_X))
\end{tikzcd} \tag{2}$$

יהי אם כן $(f,f^\#)\colon Y\to S$ מורפיזם של סכימות. אזי

$$\begin{aligned}
\alpha_{X,A}\circ\mathrm{Hom}(h,S)(f) &= \alpha_{X,A}\big((f,f^\#)\circ(h,h^\#)\big)\\
&= \big((f,f^\#)\circ(h,h^\#)\big)(S)\circ\lambda_A\\
&= h^\#(Y)\circ f^\#(S)\circ\lambda_A\\
&= h^\#(Y)\circ(\alpha_{X,A}(f))\\
&= \mathrm{Hom}(A,h^\#(Y))\circ\alpha_{X,A}(f).
\end{aligned}$$

לכן התרשים (2) אכן חילופי.

ג. α טבעי ב־A: יהי B חוג ויהי $T=\mathrm{Spec}(B)$. יהי $\varphi\colon A\to B$ הומומורפיזם של חוגים ויהי $h\colon T\to S$ המורפיזם המושרה ע"י φ. צריך להוכיח כי התרשים הבא הנו חילופי:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X,T) \arrow[r, "\alpha_{X,B}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(X,h)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(B,\Gamma(X,\mathcal{O}_X)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\varphi,\Gamma(X,\mathcal{O}_X))"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X,S) \arrow[r, "\alpha_{X,A}"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,\Gamma(X,\mathcal{O}_X))
\end{tikzcd} \tag{3}$$

יהי אם כן $(f,f^\#)\colon X\to T$ מורפיזם. אזי

$$\begin{aligned}
(\alpha_{X,A}\circ\mathrm{Hom}(X,h))(f) &= \alpha_{X,A}\big((h,h^\#)\circ(f,f^\#)\big)\\
&= \big((h,h^\#)\circ(f,f^\#)\big)(S)\circ\lambda_A\\
&= f^\#(T)\circ h^\#(S)\circ\lambda_A\\
&= f^\#(T)\circ\lambda_B\circ\varphi \qquad \text{(1) לפי תרשים}\\
&= \big(\alpha_{X,B}(f)\big)\circ\varphi\\
&= \mathrm{Hom}(\varphi,\Gamma(X,\mathcal{O}_X))\circ\alpha_{X,B}(f).
\end{aligned}$$

לכן התרשים (3) אכן חילופי.

ד. α חח״ע במקרה הכללי: יהי $X=\bigcup_i U_i$ כיסוי אפיני פתוח של X ולכל i יהי

$$(\eta_i,\eta_i^{\#})\colon (U_i,\mathcal{O}_X|_{U_i})\to (X,\mathcal{O}_X)$$

מורפיזם השיכון מלמה 2.2.1. לכל i, התרשים החילופי (2) נראה כך:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X,S) \arrow[r, "\alpha_{X,A}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\eta_i,S)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,\Gamma(X,\mathcal{O}_X)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(A,\eta_i^{\#}(X))"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(U_i,S) \arrow[r, "\alpha_{U_i,A}"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,\Gamma(U_i,\mathcal{O}_X)) \end{tikzcd} \tag{4}$$

נניח כי $f,g\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X,S)$ כך ש־$\alpha_{X,A}(f)=\alpha_{X,A}(g)$. אזי מ־$(4)$ נובע כי

$$.\alpha_{U_i,A}\circ \mathrm{Hom}(\eta_i,S)(f)=\alpha_{U_i,A}\circ \mathrm{Hom}(\eta_i,S)(g)$$

הואיל ו־U_i אפינית, $\alpha_{U_i,A}$ הנה חח״ע, כפי שהוכחנו. לכן

$$.f|_{U_i}=f\circ\eta_i=\mathrm{Hom}(\eta_i,S)(f)=\mathrm{Hom}(\eta_i,S)(g)=g\circ\eta_i=g|_{U_i}$$

הואיל ושויון זה נכון לכל i, לפי למה 2.2.7 מתקיים $f=g$. לכן $\alpha_{X,A}$ חח״ע.

ה. α על במקרה הכללי: יהי $\psi\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,\Gamma(X,\mathcal{O}_X))$. לכל i נגדיר

$$.\psi_i=\mathrm{Hom}(A,\eta_i^{\#}(X))(\psi)=\eta_i^{\#}(X)\circ\psi=\mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{X,U_i}\circ\psi$$

הואיל ו־$\alpha_{U_i,A}$ על, קיים $f_i\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(U_i,S)$ כך ש־

$$.\alpha_{U_i,A}(f_i)=\psi_i$$

לכל i,j נגדיר $U_{i,j}=U_i\cap U_j$ ואת $\theta_{i,j}\colon U_{i,j}\to U_i$ להיות מורפיזם השיכון. אזי כמו ב־(4), התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(U_i,S) \arrow[r, "\alpha_{U_i,A}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\theta_{i,j},S)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,\Gamma(U_i,\mathcal{O}_X)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(A,\theta_{i,j}^{\#}(U_i))"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(U_{i,j},S) \arrow[r, "\alpha_{U_{i,j},A}"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,\Gamma(U_{i,j},\mathcal{O}_X)) \end{tikzcd} \tag{5}$$

לכן

$$\begin{aligned}\alpha_{U_{i,j},A}(\mathrm{Hom}(\theta_{i,j},S)(f_i)) &= \mathrm{Hom}(A,\theta^{\#}_{i,j}(U_i))(\alpha_{U_i,A}(f_i))\\ &= \mathrm{Hom}(A,\theta^{\#}_{i,j}(U_i))(\psi_i)\\ &= \theta^{\#}_{i,j}(U_i)\circ\psi_i\\ &= \mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{U_i,U_{i,j}}\circ\psi_i\\ &= \mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{X,U_{i,j}}\circ\psi\\ &= \cdots \quad \text{באופן סימטרי}\\ &= \alpha_{U_{i,j},A}(\mathrm{Hom}(\theta_{j,i},S)(f_j)).\end{aligned}$$

אולם הוכחנו כבר כי $\alpha_{U_{i,j},A}$ חח"ע, ולכן

$$f_i|_{U_{i,j}} = \mathrm{Hom}(\theta_{i,j},S)(f_i) = \mathrm{Hom}(\theta_{j,i},S)(f_j) = f_j|_{U_{i,j}}$$

לכל i,j. לפי למה 2.2.8, קיים מורפיזם $f\colon X\to S$ כך ש־$f|_{U_i}=f_i$ לכל i. נגדיר

$$.\varphi = \alpha_{X,A}(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,\Gamma(X,\mathcal{O}_X))$$

אזי לכל i,

$$\begin{aligned}\mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{X,U_i}\circ\varphi &= \mathrm{Hom}(A,\eta^{\#}_i(X))(\alpha_{X,A}(f))\\ &= \alpha_{U_i,A}(f|_{U_i})\\ &= \alpha_{U_i,A}(f_i)\\ &= \psi_i\\ &= \mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{X,U_i}\circ\psi.\end{aligned}$$

לכן

$$,\psi=\varphi=\alpha_{X,A}(f)$$

ולכן $\alpha_{X,A}$ הנה על. ∎

למה 2.4.8: *יהי A חוג, ו־$(X,\mathcal{O}_X)$ סכימה. יהי $f\colon X\to\mathrm{Spec}(A)$ מורפיזם המתאים להומומורפיזם $\varphi\colon A\to\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$. אזי לכל $x\in X$,*

$$.f(x)=\{a\in A \mid \varphi(a)_x\in\mathfrak{m}_{X,x}\}$$

הוכחה: נסמן $S = \operatorname{Spec}(A)$. ראשית נניח כי $X = \operatorname{Spec}(B)$ אפינית. נגדיר את $\psi\colon A \to B$ ע"י $\psi = \lambda_B^{-1} \circ \varphi$. יהי $\mathfrak{q} \in X$. אזי התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\lambda_A"', "\wr"] \arrow[dr, "\varphi"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_B"', "\wr"] & B_{\mathfrak{q}} \\
\Gamma(S, \mathcal{O}_S) \arrow[r, "f^{\#}(S)"] & \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \arrow[r] & \mathcal{O}_{X,\mathfrak{q}} \arrow[u, "\wr"]
\end{tikzcd}$$

אזי f מושרה ע"י ψ ולכן

$$\begin{aligned}
f(\mathfrak{q}) &= \psi^{-1}(\mathfrak{q}) \\
&= \{a \in A \mid \psi(a) \in \mathfrak{q}\} \\
&= \{a \in A \mid \frac{\psi(a)}{1} \in \mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}\} \\
&= \{a \in A \mid \varphi(a)_{\mathfrak{q}} \in \mathfrak{m}_{X,\mathfrak{q}}\}
\end{aligned}$$

לכן הטענה נכונה עבור X אפינית. במקרה הכללי, יהי $x \in X$ ותהי $U \in \operatorname{Open}(X)$ סביבה אפינית פתוחה של x. אזי מטבעיות ההתאמה נובע כי המורפיזם $f|_U\colon U \to S$ מתאים להומומורפיזם $\operatorname{res}^{\mathcal{O}_X}_{X,U} \circ \varphi\colon A \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, ולכן

$$\begin{aligned}
f(x) &= f|_U(x) \\
&= \{a \in A \mid (\operatorname{res}^{\mathcal{O}_X}_{X,U} \circ \varphi)(a)_x \in \mathfrak{m}_{U,x}\} \\
&= \{a \in A \mid \varphi(a)_x \in \mathfrak{m}_{X,x}\}
\end{aligned}$$

לכן הלמה נכונה במקרה הכללי. ∎

תוצאה 2.4.9: *לכל סכימה X קיים מורפיזם יחיד $X \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$. כלומר כל סכימה הנה סכימה מעל $\mathbb{Z}$ באופן יחיד.*

הוכחה: לכל חוג R קיים הומומורפיזם יחיד $\mathbb{Z} \to R$. נציב $R = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ ונשתמש במשפטון 2.4.7. ∎

למעשה, ניתן לרשום את ההעתקה הנ"ל באופן יותר מפורש:

למה 2.4.10: *תהי X סכימה ויהי $f\colon X \to \operatorname{Spec}(Z)$ המורפיזם היחיד. אזי לכל $x \in X$,*

$$f(x) = \operatorname{Char}(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}).$$

הוכחה: הואיל ושני צידי המשוואה הנם מקומיים, נניח בלי הגבלת הכלליות כי X אפינית, נאמר $X = \operatorname{Spec}(A)$. אזי f מושרה ע"י ההומומורפיזם

$$\begin{array}{rccc}
\varphi\colon & A & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\
& n & \longmapsto & n \cdot 1
\end{array}$$

לכן לכל $\mathfrak{p} \in X$,

$$\begin{aligned} f(\mathfrak{p}) &= \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \\ &= \{n \in \mathbb{Z} \mid n \cdot 1 \in \mathfrak{p}\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} \mid A/\mathfrak{p}\text{ ב־ } n \cdot 1 = 0\} \\ &= \mathrm{Char}(\mathrm{Quot}(A/\mathfrak{p})). \end{aligned}$$

הלמה נובעת כעת מכך ש־

$$\blacksquare \qquad \mathrm{Quot}(A/\mathfrak{p}) \cong A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \cong \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}/\mathfrak{m}_{X,\mathfrak{p}}$$

למה 2.4.11: *יהי A חוג ותהי X סכימה. אזי לתת ל־ X מבנה של סכימה מעל A הנו שקול לנתינת מבנה של אלגברת־ A ל־ $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ לכל $U \in \mathrm{Open}(X)$ כך שהצמצומים $\mathrm{res}_{U,V}^{\mathcal{O}_X}$ הנם לינארים־ A.*

אם Y סכימה נוספת מעל A, אזי מורפיזם של סכימות $h\colon X \to Y$ הנו מורפיזם מעל A אם ורק אם כל ההומומורפיזמים $h^\#(V)\colon \Gamma(V, \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(h^{-1}(V), \mathcal{O}_X)$ הנם לינארים־ A.

הוכחה:

א. מבנה של סכימת־ A משרה מבנה של אלגברת־ A על $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$: ראשית נניח כי נתון מורפיזם $f\colon X \to \mathrm{Spec}(A)$. לכל $U \in \mathrm{Open}(X)$ מתקבל מורפיזם $f|_U\colon U \to \mathrm{Spec}(A)$, ולכן הומומורפיזם של חוגים $\varphi_U = \alpha_{U,A}(f|_U)\colon A \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, כלומר, מבנה של אלגברת־$A$ לחוג $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$.

יהיו $V, U \in \mathrm{Open}(X)$ כך ש־$V \subseteq U$ ויהי $\imath\colon V \to U$ מורפיזם השיכון. מטענה 2.4.7 נובע כי התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(U, \mathrm{Spec}(A)) \arrow[r, "\alpha_{U,A}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\imath, \mathrm{Spec}(A))"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A, \Gamma(U, \mathcal{O}_X)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(A, \imath^\#(U))"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(V, \mathrm{Spec}(A)) \arrow[r, "\alpha_{V,A}"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A, \Gamma(V, \mathcal{O}_X)) \end{tikzcd} \qquad (*)$$

עבור $f|_U \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(U, \mathrm{Spec}(A))$ מתקיים

$$\begin{aligned} \alpha_{V,A} \circ \mathrm{Hom}(\imath, \mathrm{Spec}(A))(f|_U) &= \alpha_{V,A}\big((f|_U) \circ \imath\big) \\ &= \alpha_{V,A}\big((f|_U)|_V\big) \\ &= \alpha_{V,A}(f|_V) \qquad \text{לפי למה } 2.2.5 \\ &= \varphi_V. \end{aligned}$$

מאידך,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(A, \imath^{\#}(U)) \circ \alpha_{U,A}(f|_U) &= \mathrm{Hom}(A, \imath^{\#}(U))(\varphi_U)\\ &= \mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{U,V} \circ \varphi_U\end{aligned}$$

לכן מחילופיות $(*)$ נובע כי

$$\mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{U,V} \circ \varphi_U = \varphi_V ,$$

ולכן הומומורפיזם הצמצום $\mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{U,V}$ הנו לינארי־A.

ב. מבנה של אלגברות־A והומומורפיזמי־A מגדירים מבנה של סכימת־A: להפך, נניח כי לכל $U \in \mathrm{Open}(X)$ נתון הומומורפיזם $\varphi_U \colon A \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ כך ש־$\mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{U,V} \circ \varphi_U = \varphi_V$ לכל $V \subseteq U$. אזי טענה 2.4.7 נותנת מורפיזם $f \colon X \to \mathrm{Spec}(A)$ כך ש־$\alpha_{X,A}(f) = \varphi_X$.

ג. ההתאמות הפוכות זו לזו: אם נתון $f \colon X \to \mathrm{Spec}(A)$ וה־φ_U מוגדרים ע"י $f|_U$ אזי φ_X מוגדר ע"י $f|_X = f$ ולכן f מתאים ל־φ_X.

להפך, אם נתחיל מאוסף $\{\varphi_U\}_U$ של הומומורפיזמים ונגדיר את f ע"י φ_X, צריך להראות כי $f|_U$ מתאים ל־φ_U לכל $U \in \mathrm{Open}(X)$. אבל זה נובע שוב מתרשים $(*)$ (עם X במקום U ו־U במקום V).

לכן ההתאמות הן אכן הופכיות זו לזו.

כעת נניח כי $f \colon X \to \mathrm{Spec}(A)$ ו־$g \colon Y \to \mathrm{Spec}(A)$ הן סכימות מעל A. לכל $U \in \mathrm{Open}(X)$ ו־$V \in \mathrm{Open}(Y)$ נסמן ב־$\varphi_U \colon A \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ ו־$\psi_V \colon A \to \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$ את הומומורפיזם המבנה.

יהי $h \colon X \to Y$ מורפיזם של סכימות.

ד. h מורפיזם־A גורר ש־$h^{\#}(V)$ לינארי־A לכל V: ראשית נניח כי h מורפיזם מעל A, כלומר התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & \mathrm{Spec}(A) & \end{tikzcd}$$

יהי $V \in \mathrm{Open}(Y)$ ויהי $U = h^{-1}(V)$. אזי לפי למה 2.2.6, התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "h|_U^V"] \arrow[dr, "f|_U"'] & & V \arrow[dl, "g|_V"] \\ & \mathrm{Spec}(A) & \end{tikzcd}$$

אם נשתמש בטבעיות $\alpha_{-,A}$ עבור המורפיזם $h|_U^V$ נקבל את התרשים החילופי הבא:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(V,\mathrm{Spec}(A)) \arrow[r, "\alpha_{V,A}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(h|_U^V,\mathrm{Spec}(A))"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,\Gamma(V,\mathcal{O}_Y)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(A,(h^{\#})|_U^V(V))=\mathrm{Hom}(A,h^{\#}(V))"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(U,\mathrm{Spec}(A)) \arrow[r, "\alpha_{U,A}"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,\Gamma(U,\mathcal{O}_X))
\end{tikzcd}$$

עבור $g|_V \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(V,\mathrm{Spec}(A))$ נקבל

$$\begin{aligned}
h^{\#}(V)\circ\psi_V &= h^{\#}(V)\circ(\alpha_{V,A}(g|_V)) \\
&= \alpha_{U,A}\big((g|_V)\circ(h|_U^V)\big) && \text{לפי התרשים האחרון} \\
&= \alpha_{U,A}(f|_U) && \text{לפי התרשים הקודם} \\
&= \varphi_U.
\end{aligned}$$

לכן התרשים הבא הנו חילופי:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(U,\mathcal{O}_X) & & \Gamma(V,\mathcal{O}_Y) \arrow[ll, "h^{\#}(V)"'] \\
& A \arrow[ul, "\varphi_U"] \arrow[ur, "\psi_V"'] &
\end{tikzcd}$$

כלומר $h^{\#}(V)$ הנו לינארי-A.

ה. $h^{\#}(V)$ לינארי-A לכל V גורר ש-h מורפיזם-A: להיפך, נניח כי $h^{\#}(V)$ לינארי-A עבור כל $V \in \mathrm{Open}(Y)$. בפרט, עבור $V=Y$ נקבל את התרשים החילופי הבא:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X,\mathcal{O}_X) & & \Gamma(Y,\mathcal{O}_Y) \arrow[ll, "h^{\#}(Y)"'] \\
& A \arrow[ul, "\varphi_X"] \arrow[ur, "\psi_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

בנוסף, נקבל את התרשים החילופי הבא:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(Y,\mathrm{Spec}(A)) \arrow[r, "\alpha_{Y,A}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(h,\mathrm{Spec}(A))"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,\Gamma(Y,\mathcal{O}_Y)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(A,h^{\#}(Y))"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X,\mathrm{Spec}(A)) \arrow[r, "\alpha_{X,A}"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,\Gamma(X,\mathcal{O}_X))
\end{tikzcd}$$

עבור המורפיזם $g \circ h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, \mathrm{Spec}(A))$ נקבל

$$\begin{aligned}
\alpha_{X,A}(g \circ h) &= \alpha_{X,A} \circ \mathrm{Hom}(h, \mathrm{Spec}(A))(g) \\
&= \mathrm{Hom}(A, h^{\#}(Y))(\alpha_{Y,A}(g)) \\
&= \mathrm{Hom}(A, h^{\#}(Y))(\psi_Y) \\
&= h^{\#}(Y) \circ \psi_Y \\
&= \varphi_X \qquad \text{לפי התרשים הקודם} \\
&= \alpha_{X,A}(f).
\end{aligned}$$

אולם $\alpha_{X,A}$ הנה חח"ע, ולכן מתקיים

$$g \circ h = f,$$

כלומר h מורפיזם מעל A. נשים לב כי השתמשנו רק בלינאריות־A של ההומומורפיזם **הגלובלי** $h^{\#}(Y)$. ∎

2.5 תכונות יסודיות של סכימות.

הערה 2.5.1: אם A חוג, נזהה מעתה את A ו־$\Gamma(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ ע"י האיזומורפיזם הטבעי מטענה 2.3.3 ללא אזכור מיוחד.

הגדרה 2.5.2: תהי X סכימה, ויהי $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. נגדיר

$$X_f = \{x \in X \mid f_x \notin \mathfrak{m}_{X,x}\}.$$

למה 2.5.3: *יהי $\varphi\colon X \to Y$ מורפיזם של סכימות, ויהי $\theta = \varphi^{\#}(Y)\colon \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. עבור $f \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ מתקיים*

$$\varphi^{-1}(Y_f) = X_{\theta(f)}.$$

הוכחה: יהי $x \in X$. אזי התרשים הבא הינו חילופי:

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{\theta} & \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} & \xrightarrow{\varphi_x^{\#}} & \mathcal{O}_{X,x}
\end{array}$$

הואיל ו־$\varphi_x^{\#}$ הומומורפיזם מקומי, $\theta(f)_x \in \mathfrak{m}_{X,x}$ אם ורק אם $f_{\varphi(x)} \in \mathfrak{m}_{Y,\varphi(x)}$. לכן $x \in X_{\theta(f)}$ אם ורק אם $\varphi(x) \in Y_f$. ∎

למה 2.5.4: *תהי* X *סכימה, ויהי* $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$*. תהי* $U \in \mathrm{Open}(X)$*. אזי*

$$X_f \cap U = U_{(f|_U)}.$$

הוכחה: הלמה נובעת מהעובדה ש־$\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{U,x}$ לכל $x \in U$. ∎

למה 2.5.5: *תהי* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *סכימה אפינית ויהי* $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = A$*. אזי* $X_f = D(f)$.

הוכחה:

$$\begin{aligned} X_f &= \{\mathfrak{p} \in X \mid f_{\mathfrak{p}} \notin \mathfrak{m}_{X,\mathfrak{p}}\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in X \mid f_{\mathfrak{p}} \notin \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in X \mid f \notin \mathfrak{p}\} \\ &= D(f). \end{aligned}$$

∎

למה 2.5.6: *תהי* X *סכימה, ויהי* $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$*. אזי* $X_f \in \mathrm{Open}(X)$.

הוכחה: יהי $\{U_i\}$ כיסוי אפיני פתוח של X. אזי לפי למה 2.5.4 ולמה 2.5.5, $X_f \cap U_i$ פתוחה ב־U_i, ולכן ב־X, לכל i. לכן X_f פתוחה. ∎

למה 2.5.7: *תהי* X *סכימה* **דחוסה**. *יהי* $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ *ויהיו* $a, f \in A$ *כך ש־*$a|_{X_f} = 0$*. אזי קיים* $n > 0$ *כך ש־*$f^n a = 0$.

הוכחה: ראשית נניח כי X אפינית. אזי $X = \mathrm{Spec}(A)$ ולפי למה 2.5.5, $a|_{D(f)} = 0$, לכן $\frac{a}{1} = 0$ ב־$A_{\mathfrak{p}}$ לכל $\mathfrak{p} \in D(f) \cong \mathrm{Spec}(A_f)$. לכן $\frac{a}{1} = 0$ ב־A_f ולכן קיים $n > 0$ כך ש־$f^n a = 0$.

במקרה הכללי, הואיל ו־X דחוסה, קיים כיסוי פתוח אפיני סופי $X = \bigcup_{i=1}^{r} U_i$. לכל i, יהיו $a_i = a|_{U_i}, f_i = f|_{U_i} \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$. אזי לכל i, $a_i|_{U_{i,f_i}} = 0$. לפי המקרה הפרטי דלעיל, קיים $n_i > 0$ כך ש־$f_i^{n_i} a_i = 0$. יהי $n = \max\{n_i\}$. אזי $f_i^n a_i = 0$ לכל i, ולכן

$$(f^n a)|_{U_i} = 0$$

לכל i. לכן $f^n a = 0$. ∎

למה 2.5.8: *תהי* X *סכימה בעלת כיסוי אפיני סופי* $\{U_i\}$ *כך שלכל* i, j*,* $U_i \cap U_j$ *הנה דחוסה. יהי* $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. *יהי* $f \in A$ *ויהי* $b \in \Gamma(X_f, \mathcal{O}_X)$*. אזי קיימים* $a \in A$ *ו־*$n > 0$ *כך ש־* $\left(f|_{X_f}\right)^n b = a|_{X_f}$.

הוכחה: אם X אפינית אזי $X_f = D(f)$, והלמה נובעת מהאיזומורפיזם $\Gamma(X, D(f)) \cong A_f$.

במקרה הכללי, נניח כי $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$. לכל i, יהי $f_i = f|_{U_i}$, תהי

$$V_i = X_f \cap U_i = (U_i)_{f_i}$$

ויהי $b_i = b|_{V_i} \in \Gamma(V_i, \mathcal{O}_{U_i})$. לפי המקרה הפרטי דלעיל, קיימים $a_i \in A_i$ ו־$n_i > 0$ המקיימים

$$f_i|_{V_i}^{n_i} \cdot b_i = a_i|_{V_i}.$$

אם ניקח $n \in \mathbb{N}$ גדול מספיק, אזי ניתן להניח כי $n = n_i$ לכל i.

עבור כל i, j, תהי $U_{i,j} = U_i \cap U_j$, יהי $a_{i,j} = a_i|_{U_{i,j}}$ ותהי

$$V_{i,j} = U_{i,j} \cap X_f = (U_{i,j})_{f|_{U_{i,j}}}.$$

אזי

$$a_{i,j}|_{V_{i,j}} = f^n|_{V_{i,j}} \cdot b_i|_{V_{i,j}} = f^n|_{V_{i,j}} \cdot b|_{V_{i,j}} = f^n|_{V_{i,j}} \cdot b_j|_{V_{i,j}} = a_{j,i}|_{V_{i,j}}.$$

לכן $a_{i,j} - a_{j,i}$ הנו איבר של $\Gamma(U_{i,j}, \mathcal{O}_{U_{i,j}})$ שמתאפס על הקבוצה $(U_{i,j})_{f|_{U_{i,j}}}$. לפי ההנחה $U_{i,j}$ דחוסה, ולכן לפי למה $2.5.7$, קיים $m_{i,j} > 0$ המקיים

$$f|_{U_{i,j}}^{m_{i,j}}(a_{i,j} - a_{j,i}) = 0$$

לכל i, j. הואיל ומספר הזוגות (i, j) הנו סופי, קיים $m > 0$ המקיים

$$f|_{U_{i,j}}^{m}(a_{i,j} - a_{j,i}) = 0 \qquad (*)$$

לכל i, j. לכל i נגדיר

$$\alpha_i = f_i^m \cdot a_i \in A_i.$$

אזי

$$\alpha_i|_{V_i} = f_i^{m+n} b_i. \qquad (**)$$

מ־$(*)$ נובע כי

$$\alpha_i|_{U_{i,j}} = \alpha_j|_{U_{i,j}}$$

לכל i, j, ולכן קיים איבר יחיד $\alpha \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ המקיים $\alpha|_{U_i} = \alpha_i$. אזי נובע מ־$(**)$ כי

$$\alpha|_{X_f} = f^{m+n} b. \qquad \blacksquare$$

למה 2.5.9: *יהי $(X,\mathcal{O}_X)$ מרחב חוגים, יהי $U \in \mathrm{Open}(X)$ ויהי $\sigma \in \Gamma(U,\mathcal{O}_X)$ כך ש־ $\sigma_x \in \mathcal{O}_{X,x}^{\times}$ לכל $x \in U$. אזי $\sigma \in \Gamma(U,\mathcal{O}_X)^{\times}$.*

הוכחה: לפי ההנחה, קיים כיסוי פתוח $U = \bigcup_i U_i$ וחתכים $\tau_i \in \Gamma(U_i,\mathcal{O}_X)$ כך ש־$\tau_i(\sigma|_{U_i}) = 1$ לכל i. מעל $U_{i,j} = U_i \cap U_j$, האיברים $\tau_i|_{U_{i,j}}$ ו־ $\tau_j|_{U_{i,j}}$ הנם שני איברים הופכיים ל־ $\sigma|_{U_{i,j}}$, ולכן הנם שווים זה לזה. לכן קיים $\tau \in \Gamma(U,\mathcal{O}_X)$ המקיים $\tau|_{U_i} = \tau_i$ לכל i. אזי $(\tau\sigma)|_{U_i} = 1$ לכל i, ולכן $\tau\sigma = 1$. ∎

למה 2.5.10: *תהי X סכימה בעלת כיסוי אפיני סופי $\{U_i\}$ כך שלכל i,j, $U_i \cap U_j$ הנה דחוסה. יהי $A = \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$, ויהי $f \in A$. אזי*

$$\Gamma(X_f,\mathcal{O}_X) \cong A_f.$$

הוכחה: ראשית נציין כי הכיסוי האפיני הסופי גורר כי X דחוסה.

נגדיר הומומורפיזם של חוגים $\varphi\colon A \to \Gamma(X_f,\mathcal{O}_X)$ ע"י $a \mapsto a|_{X_f}$. לפי למה 2.5.9, $f|_{X_f}$ הנו איבר הפיך של $\Gamma(X_f,\mathcal{O}_X)$. לכן φ משרה הומומורפיזם של חוגים

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}\colon A_f &\longrightarrow \Gamma(X_f,\mathcal{O}_X)\\ \frac{a}{f^n} &\longmapsto \frac{a|_{X_f}}{(f|_{X_f})^n}\end{aligned}$$

לפי למה 2.5.7, $\hat{\varphi}$ חח"ע. לפי למה 2.5.8, $\hat{\varphi}$ על. לכן $\hat{\varphi}$ איזומורפיזם. ∎

טענה 2.5.11: *תהי X סכימה ויהי $A = \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$. אזי X אפינית אם ורק אם קיימים איברים $f_1,\dots,f_r \in A$ היוצרים את אידאל היחידה כך ש־ X_{f_i} אפינית עבור $1 \le i \le r$.*

הוכחה: אם X אפינית, ניקח $r=1$, $f_1 = 1$ ו־$X_{f_1} = X$.

להיפך, נניח כי $f_1,\dots,f_r \in A$ כבטענה.

יהיו $a_1,\dots,a_r \in A$ כך ש־$\sum_{i=1}^r a_i f_i = 1$. יהי $x \in X$. אזי $\sum_{i=1}^r (a_i)_x (f_i)_x = 1$ ב־$\mathcal{O}_{X,x}$, ולכן קיים j כך ש־$(f_j)_x \notin \mathfrak{m}_{X,x}$, כלומר $x \in X_{f_j}$. לכן

$$X = \bigcup_{i=1}^r X_{f_i}.$$

לפי ההנחה, X_{f_i} אפינית לכל i. לכל i,j,

$$X_{f_i} \cap X_{f_j} = D_{X_{f_j}}\left(f_i|_{X_{f_j}}\right),$$

קבוצה פתוחה בסיסית של X_{f_j}, בפרט דחוסה. לכן ניתן להשתמש בלמה 2.5.10.

יהי $S=\operatorname{Spec}(A)$. יהי $\varphi\colon A\to\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ הומומורפיזם הזהות, ויהי $\psi\colon X\to S$ המורפיזם המתאים לפי טענה 2.4.7. לפי למה 2.4.8, לכל $x\in X$ מתקיים

$$\psi(x)=\{a\in A\mid a_x\in\mathfrak{m}_{X,x}\}.$$

לכל i, יהי $V_i=D(f_i)\in\operatorname{Open}(S)$. אזי

$$\begin{aligned}\psi^{-1}(V_i)&=\{x\in X\mid \psi(x)\in D(f_i)\}\\&=\{x\in X\mid f_i\notin\psi(x)\}\\&=\{x\in X\mid (f_i)_x\notin\mathfrak{m}_{X,x}\}\\&=X_{f_i}.\end{aligned}$$

נסמן

$$\psi_i=\psi|_{X_{f_i}}^{V_i}\colon X_{f_i}\longrightarrow V_i.$$

יהי $i=1,\dots,r$. אם נתבונן בתרשים החילופי הבא

$$\begin{tikzcd}
X_{f_i} \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, hook] & V_i \arrow[d, hook] \\
X \arrow[r, "\psi"] & S
\end{tikzcd}$$

וניקח חתכים גלובלים נקבל את התרשים החילופי הבא:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X_{f_i},\mathcal{O}_X) & \Gamma(V_i,\mathcal{O}_S) \arrow[l, "\psi_i^{\#}(V_i)"'] & & A_{f_i} \arrow[ll, "\sim"'] \\
\Gamma(X,\mathcal{O}_X) \arrow[u, "\operatorname{res}^{\mathcal{O}_X}_{X,X_{f_i}}"] & \Gamma(S,\mathcal{O}_S) \arrow[l, "\psi^{\#}(S)"'] \arrow[u, "\operatorname{res}^{\mathcal{O}_S}_{S,V_i}"'] & & \\
& A \arrow[ul, "\varphi=\mathrm{id}"] \arrow[u, "\wr"] \arrow[uurr, "a\mapsto\frac{a}{1}"'] & &
\end{tikzcd}$$

בפרט אנחנו רואים כי ההעתקה

$$A_{f_i}\xrightarrow{\ \sim\ }\Gamma(V_i,\mathcal{O}_S)\xrightarrow{\psi_i^{\#}(V_i)}\Gamma(X_{f_i},\mathcal{O}_X)$$

הנה בדיוק האיזומורפיזם המתואר בהוכחת למה 2.5.10. לכן $\psi_i^{\#}(V_i)$ הנו איזומורפיזם. הואיל ו־X_{f_i} ו־V_i הנן אפיניות, המורפיזם ψ_i מושרה ע"י הומומורפיזם של חוגים שמתלכד (עד כדי איזומורפיזם) עם ההומומורפיזם בין חוגי החתכים הגלובלים, כלומר עם $\psi_i^{\#}(V_i)$. לכן ψ_i מושרה ע"י איזומורפיזם של חוגים, ולכן ψ_i הנו איזומורפיזם.

הואיל ו־$(f_1,\dots,f_r)=A$, $S=\bigcup_i V_i$. לכן לפי למה 2.2.9, $\psi\colon X\to S$ הנו איזומורפיזם, ולכן X אפינית. ∎

3.1 הגדרות ותכונות בסיסיות של מרחבים אי־פריקים.

הגדרה 3.1.1: יהי X מרחב טופולוגי. נאמר כי X הנו **פריק** אם קיימות קבוצות סגורות נאותות $Z_1, Z_2 \subseteq X$ כך ש־$X = Z_1 \cup Z_2$. אם $X \neq \emptyset$ ו־X אינו פריק, נאמר כי X הנו **אי פריק**.

למה 3.1.2: *יהי X מרחב טופולוגי. אזי התנאים הבאים הנם שקולים:*

(1) *X אי־פריק.*

(2) *לכל $U, V \in \mathrm{Open}^*(X)$, $U \cap V \neq \emptyset$.*

(3) *לכל $U \in \mathrm{Open}^*(X)$, U הנה צפופה ב־X.*

הוכחה: (2) $\Longleftrightarrow$ (1) נובע ע"י לקיחת משלימים. (3) $\Longleftrightarrow$ (2) נובע מהגדרת צפיפות. ∎

למה 3.1.3: *יהי X מרחב טופולוגי אי־פריק ותהי $Y \in \mathrm{Open}^*(X)$. אזי Y אי־פריקה.*

הוכחה: נשתמש בתנאי (2) של למה 3.1.2. יהיו $U, V \in \mathrm{Open}^*(Y)$. אזי $U, V \in \mathrm{Open}^*(X)$ ולכן $U \cap V \neq \emptyset$. ∎

למה 3.1.4: *יהי X מרחב טופולוגי. אם $Z \subseteq X$ תת־קבוצה* **צפופה** *ואי־פריקה, אזי X אי־פריק.*

הוכחה: יהיו $U, V \in \mathrm{Open}^*(X)$. הואיל ו־$Z$ צפופה, $U \cap Z$ ו־$V \cap Z$ אינן ריקות, ולכן $U \cap Z, V \cap Z \in \mathrm{Open}^*(Z)$. הואיל ו־$Z$ אי־פריקה, $(U \cap Z) \cap (V \cap Z) \neq \emptyset$. בפרט, $U \cap V \neq \emptyset$. לכן X אי־פריק. ∎

למה 3.1.5: *יהי X מרחב טופולוגי אי־פריק, ותהי $f\colon X \to Y$ העתקה רציפה ועל. אזי Y אי־פריק.*

הוכחה: יהיו $U, V \in \mathrm{Open}^*(Y)$. אזי $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ תת קבוצות פתוחות של X, שאינן ריקות הואיל ו־f הנה על. מכיון ש־X אי־פריק, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$. בפרט, $U \cap V \neq \emptyset$. לכן Y מרחב טופולוגי אי־פריק. ∎

3.2 מרחבים קשירים.

הגדרה 3.2.1: יהי X מרחב טופולוגי. נאמר כי X הנו **קשיר** אם לכל $U, V \in \mathrm{Open}^*(X)$ המקיימות $X = U \cup V$, מתקיים $U \cap V \neq \emptyset$. במלים אחרות, לא ניתן לייצג את X בתור איחוד זר של קבוצות פתוחות לא ריקות.

למה 3.2.2: *אם X אי־פריק אזי X קשיר.*

הוכחה: ברור. ∎

למה 3.2.3: *יהי X מרחב טופולוגי. אם $Z \subseteq X$ תת־מרחב צפוף וקשיר, אזי X קשיר.*

הוכחה: יהיו $U, V \in \mathrm{Open}^*(X)$ כך ש־$X = U \cup V$. הואיל ו־Z צפוף, $U \cap Z, V \cap Z \in \mathrm{Open}^*(Z)$ ובנוסף $Z = (U \cap Z) \cup (V \cap Z)$. הואיל ו־$Z$ קשיר, $(U \cap Z) \cap (V \cap Z) \neq \emptyset$. בפרט, $U \cap V \neq \emptyset$. ∎

למה 3.2.4: *יהי X מרחב טופולוגי קשיר, ותהי $f \colon X \to Y$ העתקה רציפה ועל. אזי Y קשיר.*

הוכחה: יהיו $U, V \in \mathrm{Open}^*(Y)$ כך ש־$Y = U \cup V$. הואיל ו־f היא על, $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \in \mathrm{Open}^*(X)$ כך ש־$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. הואיל ו־$X$ קשיר, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$, ולכן $U \cap V \neq \emptyset$.
∎

3.3 מרחב הקבוצות האי־פריקות.

מתוך עמוד 78 של [Har].

הגדרה 3.3.1: יהי X מרחב טופולוגי. נגדיר את $\mathrm{Irr}(X)$ להיות אוסף הקבוצות הסגורות האי־פריקות של X.

למה 3.3.2: *יהי X מרחב טופולוגי.*

(1) *אם* $X \neq \emptyset$ *אז* $\mathrm{Irr}(X) \neq \emptyset$.

(2) *אם* $Y \in \mathrm{Closed}(X)$, *אז* $\mathrm{Irr}(Y) \subseteq \mathrm{Irr}(X)$.

(3) $\mathrm{Irr}(\emptyset) = \emptyset$.

(4) *אם* $Y_1, Y_2 \in \mathrm{Closed}(X)$, *אזי* $\mathrm{Irr}(Y_1 \cup Y_2) = \mathrm{Irr}(Y_1) \cup \mathrm{Irr}(Y_2)$.

(5) *אם* $\{Y_i\}_{i \in I} \subseteq \mathrm{Closed}(X)$, *אזי* $\mathrm{Irr}\left(\bigcap_i Y_i\right) = \bigcap_i \mathrm{Irr}(Y_i)$.

הוכחה:

(1) יהי $x_0 \in X$. אזי $\{x_0\}$ אי־פריקה, ולכן לפי למה 3.1.4, $\overline{\{x_0\}} \in \mathrm{Irr}(X)$.

(2) אם $Z \in \mathrm{Irr}(Y)$, אזי Z סגורה גם ב־X, ולכן $Z \in \mathrm{Irr}(X)$.

(3) ברור (נזכיר כי לפי ההגדרה הקבוצה הריקה אינה אי־פריקה).

(4) עבור $i = 1, 2$, $Y_i \subseteq Y_1 \cup Y_2$, ולכן $\mathrm{Irr}(Y_i) \subseteq \mathrm{Irr}(Y_1 \cup Y_2)$. לכן

$$\mathrm{Irr}(Y_1) \cup \mathrm{Irr}(Y_2) \subseteq \mathrm{Irr}(Y_1 \cup Y_2).$$

להיפך, נניח כי $Z \in \mathrm{Irr}(Y_1 \cup Y_2)$. אזי $Z \subseteq Y_1 \cup Y_2$, ולכן $Z = (Z \cap Y_1) \cup (Z \cap Y_2)$, כאשר $Z \cap Y_i$ קבוצה סגורה. הואיל ו־Z אי־פריקה, $Z = Z \cap Y_1$ או $Z = Z \cap Y_2$, נניח $Z = Z \cap Y_1$. אזי $Z \subseteq Y_1$,

ולכן $Z \in \mathrm{Irr}(Y_1)$. לכן

$$\mathrm{Irr}(Y_1) \cup \mathrm{Irr}(Y_2) \supseteq \mathrm{Irr}(Y_1 \cup Y_2).$$

(5) יהי $Y = \bigcap_i Y_i$. תהי $Z \in \mathrm{Irr}(X)$. אזי $Z \subseteq Y$ אם ורק אם $Z \subseteq Y_i$ לכל $i \in I$, ולכן $Z \in \mathrm{Irr}(Y)$ אם ורק אם $Z \in \mathrm{Irr}(Y_i)$ לכל $i \in I$. ∎

למה 3.3.3: *יהי X מרחב טופולוגי. ניתן להגדיר טופולוגיה על $\mathrm{Irr}(X)$ כך שהקבוצות הסגורות הנן בדיוק $\mathrm{Irr}(Y)$ עבור $Y \subseteq X$ סגורה.*

הוכחה: נובע מלמה 3.3.2. ∎

הגדרה 3.3.4: תהי $f\colon X_1 \to X_2$ העתקה רציפה בין מרחבים טופולוגים. לכל $Z \in \mathrm{Irr}(X_1)$, $f(Z)$ אי־פריקה לפי למה 3.1.5. לפי למה 3.1.4, $\overline{f(Z)} \in \mathrm{Irr}(X_2)$. נגדיר

$$\mathrm{Irr}(f)\colon \mathrm{Irr}(X_1) \longrightarrow \mathrm{Irr}(X_2)$$
$$Z \longmapsto \overline{f(Z)}$$

למה 3.3.5:

(1) *ההעתקה $\mathrm{Irr}(f)$ הנה רציפה.*

(2) *Irr הוא פונקטור מקטגוריית המרחבים הטופולוגים לתוך עצמה.*

הוכחה:

(1) תהי Y תת קבוצה סגורה של X_2. הואיל ו־Y סגורה, עבור כל תת־קבוצה S של X_2, $S \subseteq Y$ אם ורק אם $\overline{S} \subseteq Y$. לכן

$$\begin{aligned}
\mathrm{Irr}(f)^{-1}\big(\mathrm{Irr}(Y)\big) &= \big\{Z \in \mathrm{Irr}(X_1) \mid \mathrm{Irr}(f)(Z) \in \mathrm{Irr}(Y)\big\} \\
&= \big\{Z \in \mathrm{Irr}(X_1) \mid \overline{f(Z)} \subseteq Y\big\} \\
&= \big\{Z \in \mathrm{Irr}(X_1) \mid f(Z) \subseteq Y\big\} \\
&= \big\{Z \in \mathrm{Irr}(X_1) \mid Z \subseteq f^{-1}(Y)\big\} \\
&= \mathrm{Irr}\big(f^{-1}(Y)\big).
\end{aligned}$$

לכן התמונה ההופכית תחת $\mathrm{Irr}(f)$ של כל קבוצה סגורה של $\mathrm{Irr}(X_2)$ הנה סגורה ב־$\mathrm{Irr}(X_1)$. לכן $\mathrm{Irr}(f)$ רציפה.

(2) הזהות $\mathrm{Irr}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathrm{Irr}(X)}$ הנה ברורה.

יהיו

$$X_1 \xrightarrow{f} X_2 \xrightarrow{g} X_2$$

העתקות רציפות. על מנת להוכיח כי $\mathrm{Irr}(g\circ f)=\mathrm{Irr}(g)\circ\mathrm{Irr}(f)$, צריך להוכיח כי לכל $Z\in\mathrm{Irr}(X_1)$,

$$\overline{g\left(\overline{f(Z)}\right)}=\overline{g(f(Z))}.$$

ראשית, $f(Z)\subseteq\overline{f(Z)}$, לכן $g(f(Z))\subseteq g\left(\overline{f(Z)}\right)$, ולכן

$$\overline{g(f(Z))}\subseteq\overline{g\left(\overline{f(Z)}\right)}.$$

הואיל ו־g רציפה, לכל $S\subseteq X_2$ מתקיים $g\left(\overline{S}\right)\subseteq\overline{g(S)}$. לכן $g\left(\overline{f(Z)}\right)\subseteq\overline{g(f(Z))}$, ולכן

$$\overline{g\left(\overline{f(Z)}\right)}\subseteq\overline{g(f(Z))}.$$

לכן אכן $\mathrm{Irr}(g\circ f)=\mathrm{Irr}(g)\circ\mathrm{Irr}(f)$. ∎

הגדרה 3.3.6: יהי X מרחב טופולוגי. נגדיר $\alpha_X\colon X\to\mathrm{Irr}(X)$ ע"י $\alpha_X(x)=\overline{\{x\}}$.

למה 3.3.7:

(1) *ההעתקה* α_X *רציפה.*

(2) *אם* $f\colon X_1\to X_2$ *העתקה רציפה, אז התרשים הבא חילופי:*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\alpha_{X_1}"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Irr}(X_1) \arrow[d, "\mathrm{Irr}(f)"] \\
X_2 \arrow[r, "\alpha_{X_2}"'] & \mathrm{Irr}(X_2)
\end{tikzcd}$$

הוכחה:

(1) תהי $Y\subseteq X$ תת קבוצה סגורה. לכל $x\in X$,

$$x\in Y\iff\overline{\{x\}}\subseteq Y\iff\overline{\{x\}}\in\mathrm{Irr}(Y).$$

לכן $\alpha_X^{-1}(\mathrm{Irr}(Y))=Y$.

(2) יהי S מרחב בעל נקודה אחת. לכל $x\in X_1$, תהי $\mu_x\colon S\to X_1$ ההעתקה על x. נשים לב כי $S\in\mathrm{Irr}(S)$, ולפי למה 3.3.5, מתקיים

$$\mathrm{Irr}(f\circ\mu_x)(S)=\mathrm{Irr}(f)\big(\mathrm{Irr}(\mu_x)(S)\big).$$

לכן

$$\begin{aligned}\mathrm{Irr}(f)\circ\alpha_{X_1}(x) &= \mathrm{Irr}(f)\left(\overline{\{x\}}\right)\\ &= \mathrm{Irr}(f)\big(\mathrm{Irr}(\mu_x)(S)\big)\\ &= \mathrm{Irr}(f\circ\mu_x)(S)\\ &= \overline{\{f(x)\}}\\ &= \alpha_{X_2}\circ f(x).\end{aligned}$$

לכן התרשים אכן חילופי. ∎

למה 3.3.8: *לכל* $U\in\mathrm{Open}(X)$ *נגדיר*

$$.U^*=U^*_X=\{Z\in\mathrm{Irr}(X)\mid Z\cap U\neq\emptyset\}$$

אזי $U^*\in\mathrm{Open}(\mathrm{Irr}(X))$*, וההעתקות*

$$\begin{aligned}\mathrm{Open}(X) &\longrightarrow \mathrm{Open}(\mathrm{Irr}(X))\\ U &\longmapsto U^*\end{aligned}$$

ו־

$$\begin{aligned}\mathrm{Open}(\mathrm{Irr}(X)) &\longrightarrow \mathrm{Open}(X)\\ V &\longmapsto \alpha_X^{-1}(V)\end{aligned}$$

הנן הפוכות זו לזו. בפרט, כל אחת מהן חחע״ע.

הוכחה: עבור $U\in\mathrm{Open}(X)$,

$$,\mathrm{Irr}(X)\smallsetminus U^*=\mathrm{Irr}\big(X\smallsetminus U\big)$$

ולכן $U^*\in\mathrm{Open}(\mathrm{Irr}(X))$. יתר על כן,

$$\begin{aligned}\alpha_X^{-1}(U^*) &= \{x\in X\mid \overline{\{x\}}\cap U\neq\emptyset\}\\ &= \{x\in X\mid x\in U\} \qquad (1)\\ &= U.\end{aligned}$$

תהי $V \in \mathrm{Open}(\mathrm{Irr}(X))$, נאמר $V = \mathrm{Irr}(X) \smallsetminus \mathrm{Irr}(Y)$, כאשר $Y \in \mathrm{Closed}(X)$. לפי הוכחת למה 3.3.7, $\alpha_X^{-1}(\mathrm{Irr}(Y)) = Y$. לכן $\alpha_X^{-1}(V) = X \smallsetminus Y$. לכן

$$\begin{aligned}(\alpha_X^{-1}(V))^* &= (X \smallsetminus Y)^* \\ &= \{Z \in \mathrm{Irr}(X) \mid Z \cap (X \smallsetminus Y) \neq \emptyset\} \\ &= \{Z \in \mathrm{Irr}(X) \mid Z \nsubseteq Y\} \\ &= \{Z \in \mathrm{Irr}(X) \mid Z \notin \mathrm{Irr}(Y)\} \\ &= \mathrm{Irr}(X) \smallsetminus \mathrm{Irr}(Y) \\ &= V.\end{aligned} \tag{2}$$

מ־(1) ו־(2) אנו למדים כי ההעתקות הנ"ל אכן הפוכות זו לזו. ∎

למה 3.3.9: *יהי X מרחב טופולוגי, תהי $U \in \mathrm{Open}^*(X)$ ויהי $\imath\colon U \hookrightarrow X$ השיכון. אזי*

$$\mathrm{Irr}(\imath)\colon \mathrm{Irr}(U) \to \mathrm{Irr}(X)$$

הנו הומאומורפיזם על $\mathrm{Irr}(X) \supseteq U_X^*$.

הוכחה: תהי $F \in \mathrm{Irr}(U)$. אזי F סגורה ב־U, לכן קיימת תת־קבוצה G, סגורה ב־X, כך ש־$F = U \cap G$. יהי Z הסגור של F ב־X. אזי $Z \subseteq G$ ולכן $F = U \cap Z$. בנוסף, $Z = \mathrm{Irr}(\imath)(F)$. הואיל ו־$Z \cap U = F \neq \emptyset$, $Z \in U^*$. לכן $\mathrm{Im}(\mathrm{Irr}(\imath)) \subseteq U^*$.

כפי שהראנו, $F = U \cap \big(\mathrm{Irr}(\imath)(F)\big)$, ולכן $\mathrm{Irr}(\imath)$ חח"ע.

תהי $Z \in U^*$. תהי $F = U \cap Z$. אזי Z אי־פריקה ו־F הנה תת־קבוצה לא ריקה ופתוחה ב־Z. לפי למה 3.1.4, F הנה אי־פריקה. בנוסף, F תת־קבוצה סגורה ב־U, ולכן $F \in \mathrm{Irr}(U)$. הואיל ו־F פתוחה ב־Z ו־Z אי־פריקה, F צפופה ב־Z, ולכן $Z = \overline{F} = \mathrm{Irr}(\imath)(F)$. לכן $\mathrm{Irr}(\imath)$ היא על.

לפי למה 3.3.5, $\mathrm{Irr}(\imath)$ רציפה. נוכיח שהיא פתוחה.

תהי $\mathcal{W}$ תת־קבוצה פתוחה ב־$\mathrm{Irr}(U)$. לפי למה 3.3.8, קיימת $V \in \mathrm{Open}(U) \subseteq \mathrm{Open}(X)$ כך ש־

$$\mathcal{W} = V_U^* = \{Z \in \mathrm{Irr}(U) \mid Z \cap V \neq \emptyset\}.$$

אזי

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Irr}(\imath)(\mathcal{W}) &= \{\mathrm{Irr}(\imath)(F) \mid F \in \mathcal{W}\} \\
&= \{\overline{F} \mid F \in \mathcal{W}\} \\
&= \{\overline{F} \mid F \in V_U^*\} \\
&= \{\overline{F} \mid F \in \mathrm{Irr}(U), F \cap V \neq \emptyset\} \\
&= \{Z \in U_X^* \mid (U \cap Z) \cap V \neq \emptyset\} \\
&= \{Z \in U_X^* \mid Z \cap V \neq \emptyset\} \\
&= U_X^* \cap V_X^* \\
&= V_X^*,
\end{aligned}
$$

וזוהי קבוצה פתוחה ב־U_X^*. לכן $\mathrm{Irr}(\imath)$ הנה העתקה פתוחה. ∎

למה 3.3.10: *יהי $\mathfrak{a}$ אידאל של חוג A. יהי $X = \mathrm{Spec}(A)$, ותהי $Y = V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in X \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$. אזי $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ראשוני אם ורק אם Y אי־פריקה.*

הוכחה: הואיל ו־$V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$, נניח בלי הגבלת הכלליות ש־$\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

ראשית נניח כי $\mathfrak{a}$ ראשוני. אזי $\mathfrak{a} \in X$ ו־$Y = \overline{\{\mathfrak{a}\}}$, ולכן Y אי־פריקה.

להיפך, נניח כי Y אי־פריקה. יהיו $a_1, a_2 \in A$ כך ש־$a_1 a_2 \in \mathfrak{a}$. אזי לכל $\mathfrak{p} \in Y$, $a_1 a_2 \in \mathfrak{p}$, ולכן $a_1 \in \mathfrak{p}$ או $a_2 \in \mathfrak{p}$. לכן $Y \subseteq V(a_1) \cup V(a_2)$, ולכן

$$Y = \big(Y \cap V(a_1)\big) \cup \big(Y \cap V(a_2)\big).$$

הואיל ו־Y אי־פריקה, Y שווה לאחת הקבוצות הנ"ל, נניח $Y = Y \cap V(a_1)$. לכן $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(a_1)$, ולכן $a_1 \in \sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$. לכן $\mathfrak{a}$ ראשוני. ∎

למה 3.3.11: *תהי $(X, \mathcal{O}_X)$ סכימה. אזי $\alpha_X \colon X \to \mathrm{Irr}(X)$ הנה הומאומורפיזם.*

הוכחה: ראשית נניח כי X אפינית, נאמר $X = \mathrm{Spec}(A)$.

תהי $Z \in \mathrm{Irr}(X)$. אז קיים אידאל שורשוני $\mathfrak{a}$ של A כך ש־$Z = V(\mathfrak{a})$. הואיל ו־Z אי־פריקה, $\mathfrak{a}$ ראשוני לפי למה 3.3.10. לכן

$$Z = V(\mathfrak{a}) = \overline{\{\mathfrak{a}\}} = \alpha_X(\mathfrak{a}).$$

לכן α_X היא על.

יהיו $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in X$ כך ש־$\alpha_X(\mathfrak{p}) = \alpha_X(\mathfrak{q})$. אזי

$$\mathfrak{p} \in \alpha_X(\mathfrak{p}) = \alpha_X(\mathfrak{q}) = V(\mathfrak{q}),$$

ולכן $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. באופן סימטרי, $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ ולכן $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. לכן α_X חח"ע.

תהי $Y \in \mathrm{Closed}(X)$. לפי למה 3.3.7, $\alpha_X^{-1}(\mathrm{Irr}(Y)) = Y$. הואיל ו־$\alpha_X$ היא על, $\alpha_X(Y) = \mathrm{Irr}(Y)$. לכן α_X העתקה סגורה.

לכן במקרה האפיני α_X הנה הומאומורפיזם.

במקרה הכללי, $X = \bigcup_\lambda X_\lambda$, כאשר X_λ תת־מרחב פתוח אפיני. לפי המקרה הפרטי הנ"ל ולפי למה 3.3.7 ולמה 3.3.9, התרשים הבא חילופי לכל λ:

$$\begin{tikzcd}
X_\lambda \arrow[r, "\sim", "\alpha_{X_\lambda}"'] \arrow[dd, hook, "\imath_\lambda"'] & \mathrm{Irr}(X_\lambda) \arrow[d, "\sim"', "\mathrm{Irr}(\imath_\lambda)"] \\
& X_\lambda^* \arrow[d, hook] \\
X \arrow[r, "\alpha_X"] & \mathrm{Irr}(X)
\end{tikzcd} \tag{1}$$

יהי $Z \in \mathrm{Irr}(X)$. אזי קיים λ כך ש־$Z \cap X_\lambda \neq \emptyset$, ולכן $Z \in X_\lambda^*$. לכן $\mathrm{Irr}(X) = \bigcup_\lambda X_\lambda^*$ וניתן להסיק כי α_X הנה על.

יהיו $x, x' \in X$ כך ש־$\alpha_X(x) = \alpha_X(x')$. יהי λ כך ש־$x \in X_\lambda$. הואיל ו־$x \in \overline{\{x'\}}$, חייב להתקיים $x' \in X_\lambda$. לפי תרשים (1), $\alpha_X|_{X_\lambda} = \alpha_X \circ \imath_\lambda$ הנה חח"ע, ולכן $x = x'$. לכן α_X הנה חח"ע.

לכן α_X הנה חחע"ע, והנה הומאומורפיזם באופן מקומי. לכן α_X הנה הומאומורפיזם. ∎

תוצאה 3.3.12: *אם X היא סכימה, אזי לכל תת־מרחב סגור ואי־פריק קיימת נקודה יוצרת (כלומר, צפופה) יחידה.*

הוכחה: נובע מלמה 3.3.11. ∎

4.1 סכימות מצומצמות.

הגדרה 4.1.1: תהי $(X, \mathcal{O}_X)$ סכימה. נאמר כי X הנה **מצומצמת** אם לכל $U \in \mathrm{Open}(X)$, $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ הנו חוג מצומצם (כלומר ללא איברים אפיסיים).

למה 4.1.2: *תהי $(X, \mathcal{O}_X)$ סכימה. אזי X מצומצמת אם ורק אם $\mathcal{O}_{X,x}$ הנו חוג מצומצם לכל $x \in X$.*

הוכחה: תהי $(X, \mathcal{O}_X)$ מצומצמת. יהי $x \in X$ ויהי $\gamma \in \mathcal{O}_{X,x}$ איבר אפיסי, נניח $\gamma^n = 0$. אזי קיימת סביבה פתוחה U של x ואיבר $\sigma \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ כך ש־$\sigma_x = \gamma$ ו־$\sigma^n = 0$. לפי ההנחה, $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ מצומצם ולכן $\sigma = 0$. לכן $\gamma = 0$ ולכן $\mathcal{O}_{X,x}$ מצומצם.

להיפך, נניח כי כל הגבעולים מצומצמים. תהי $U \in \mathrm{Open}(X)$ ויהי $\sigma \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ כך ש־$\sigma^n = 0$. אזי לכל $x \in U$, $\sigma_x^n = 0$, ולכן לפי ההנחה $\sigma_x = 0$. לכן $\sigma = 0$. לכן $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ מצומצם. ∎

למה 4.1.3: *יהי A חוג מצומצם ותהי $S \subseteq A$ תת־קבוצה כפלית. אזי $S^{-1}A$ חוג מצומצם.*

הוכחה: יהי $x = \frac{a}{s} \in S^{-1}A$ כך ש־$x^n = 0$ עבור $n \geq 1$ כלשהו. אזי $(\frac{a}{1})^n = 0$, לכן קיים $t \in S$ כך ש־$ta^n = 0$. הואיל ו־$n \geq 1$, גם $t^n \in S$ ומתקיים $(ta)^n = 0$. לפי ההנחה, $ta = 0$, ולכן $x = \frac{a}{s} = 0$. ∎

למה 4.1.4: *יהי A חוג ויהי $X = \mathrm{Spec}(A)$. אזי A חוג מצומצם אם ורק אם X סכימה מצומצמת.*

הוכחה: אם A מצומצם אזי לפי למה 4.1.3, $A_\mathfrak{p}$ חוג מצומצם לכל $\mathfrak{p} \in X$. הואיל ו־$A_\mathfrak{p} \cong \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ לכל $\mathfrak{p} \in X$, נובע מלמה 4.1.2 כי X סכימה מצומצמת.

להיפך, אם X מצומצמת, אזי $A \cong \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ הנו חוג מצומצם. ∎

4.2 סכימות שלמות ואי־פריקות.

הגדרה 4.2.1: תהי $(X, \mathcal{O}_X)$ סכימה. נאמר כי X **שלמה** אם $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ הנו תחום שלמות לכל $U \in \mathrm{Open}(X)$.

למה 4.2.2: *תהי X סכימה שלמה. אזי לכל $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ הנו תחום שלמות.*

הוכחה: יהי $x \in X$. תהי $U = \mathrm{Spec}(A)$ סביבה אפינית פתוחה של x ויהי $\mathfrak{p}$ האידאל הראשוני של A המתאים לנקודה x. אזי $A \cong \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ הנו תחום שלמות ולכן $\mathcal{O}_{X,x} \cong \mathcal{O}_{U,x} \cong A_\mathfrak{p}$ הנו תחום שלמות. ∎

בניגוד ללמה 4.1.2, קיימת הדוגמה הנגדית הבאה:

דוגמה 4.2.3: יהיו K, L שדות ויהי $A = K \times L$. יהי $X = \operatorname{Spec}(A)$. אזי X הנו מרחב בעל שתי נקודות x, y כך ש־$\mathcal{O}_{X,x} \cong K$ ו־$\mathcal{O}_{X,y} \cong L$ הנם תחומי שלמות, אבל $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong A$ אינו תחום שלמות.

הגדרה 4.2.4: תהי $(X, \mathcal{O}_X)$ סכימה. נאמר כי X **אי־פריקה** אם X הנו מרחב טופולוגי אי־פריק.

למה 4.2.5: *תהי $(X, \mathcal{O}_X)$ סכימה. אזי X שלמה אם ורק אם X אי־פריקה ומצומצמת.*

הוכחה: ראשית נניח כי X שלמה. ברור כי X מצומצמת. אם X הנו מרחב פריק, אזי לפי למה 3.1.2, קיימים $U, V \in \operatorname{Open}(X)$ כך ש־$U, V \neq \emptyset$ אבל $U \cap V = \emptyset$. ע"י לקיחת קבוצות קטנות יותר, ניתן להניח כי U, V אפיניות, ולכן $\Gamma(U, \mathcal{O}_X), \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \neq \{0\}$. הואיל ו־$U \cap V = \emptyset$, ההעתקה

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U \cup V, \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \times \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \\ \sigma & \longmapsto & (\sigma|_U, \sigma|_V) \end{array}$$

הנה איזומורפיזם. בפרט, $\Gamma(U \cup V, \mathcal{O}_X)$ **אינו** תחום שלמות, בסתירה להנחה. לכן X אכן אי־פריקה.

להיפך, נניח כי X אי־פריקה ומצומצמת. תהי $U \in \operatorname{Open}(X)$ ויהיו $f, g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ כך ש־$fg = 0$.

יהיו

$$W = U \smallsetminus U_f = \{x \in U \mid f_x \in \mathfrak{m}_{X,x}\}$$

ו־

$$.Z = U \smallsetminus U_g = \{x \in U \mid g_x \in \mathfrak{m}_{X,x}\}$$

לפי למה 2.5.6, Z ו־W סגורות ב־U. הואיל ו־$fg = 0$, $U = W \cup Z$. לפי למה 3.1.3, U הנו מרחב אי־פריק, ולכן $U = W$ או $U = Z$, נניח $U = Z$. אזי $U_g = \emptyset$. תהי V תת־קבוצה אפינית פתוחה של U. לפי למה 2.5.4 ולמה 2.5.5, $U_g \cap V = D(g|_V)$. לכן $D(g|_V) = \emptyset$, ולכן $g|_V$ הנו איבר אפיסי של $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$. לפי ההנחה, $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ הנו חוג מצומצם, ולכן $g|_V = 0$ לכל $V \subseteq U$ אפינית. הואיל ו־U מכוסה ע"י תת־קבוצות אפיניות, $g = 0$. לכן $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ הנו תחום שלמות. ∎

למה 4.2.6: *יהי A חוג ויהי $X = \operatorname{Spec}(A)$. אזי X אי־פריקה אם ורק אם השרשון של A הנו אידאל ראשוני.*

הוכחה: לפי תוצאה 3.3.12, X אי־פריקה אם ורק אם קיימת נקודה $\mathfrak{p}_0 \in X$ כך ש־$X = \overline{\{\mathfrak{p}_0\}}$. נקודה כזו חייבת לקיים $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}_0$ לכל $\mathfrak{p} \in X$, ולכן $\mathfrak{p}_0$ חייב להיות השרשון של A. ∎

למה 4.2.7: *יהי A חוג ויהי $X = \operatorname{Spec}(A)$. אזי X שלמה אם ורק אם A תחום שלמות.*

הוכחה: אם A תחום שלמות אזי A חוג מצומצם והשרשון של A (שהוא 0) הנו אידאל ראשוני. לפי למה 4.1.4, X סכימה מצומצמת. לפי למה 4.2.6, X סכימה אי־פריקה. לכן לפי למה 4.2.5, X סכימה שלמה.

להיפך, אם X סכימה שלמה אזי $A \cong \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ הנו תחום שלמות. ∎

4.3 **סכימות נטר.**

הגדרה 4.3.1: תהי $(X,\mathcal{O}_X)$ סכימה. נאמר כי X סכימת **נטר מקומית** אם קיים כיסוי פתוח אפיני $X=\bigcup U_i$ כך שלכל i, $U_i=\operatorname{Spec}(A_i)$ עבור חוג **נטר** A_i.

הגדרה 4.3.2: תהי $(X,\mathcal{O}_X)$ סכימה. נאמר כי X סכימת **נטר** אם X סכימת נטר מקומית ו־X מרחב טופולוגי דחוס. באופן שקול, X סכימת נטר אם קיים כיסוי פתוח אפיני **סופי** $X=\bigcup U_i$ כך שלכל i, $U_i=\operatorname{Spec}(A_i)$ עבור חוג נטר A_i.

למה 4.3.3: *תהי X סכימת נטר מקומית ויהי $V\in\operatorname{Open}(X)$. אזי V סכימת נטר מקומית.*

הוכחה: יהי $X=\bigcup_i U_i$ כיסוי אפיני פתוח כך ש־$U_i=\operatorname{Spec}(A_i)$ ו־A_i חוג נטר לכל i. לכל i, יהי $V_i=V\cap U_i$, תת־קבוצה פתוחה של U_i. לכן $V_i=\bigcup_j D(f_{i,j})$, כאשר $f_{i,j}\in A_i$. הואיל ו־$D(f_{i,j})\cong\operatorname{Spec}((A_i)_{f_{i,j}})$, ו־$(A_i)_{f_{i,j}}$ הנו מיקום של חוג נטר ולכן הנו חוג נטר בעצמו, אנו רואים כי

$$V=\bigcup_i V_i=\bigcup_{i,j}D(f_{i,j})$$

הנו כיסוי אפיני פתוח של V ע"י ספקטרומים של חוגי נטר. ∎

למה 4.3.4: *תהי X סכימת נטר מקומית ויהי $x\in X$. אזי $\mathcal{O}_{X,x}$ הנו חוג נטר.*

הוכחה: תהי $U=\operatorname{Spec}(A)$ סביבה פתוחה של x כך ש־A חוג נטר ויהי $\mathfrak{p}$ האידאל הראשוני של A המתאים לנקודה x. אזי $\mathcal{O}_{X,x}\cong\mathcal{O}_{U,x}\cong A_{\mathfrak{p}}$ ולכן הנו חוג נטר. ∎

למה 4.3.5: *יהי A חוג ויהיו $f_1,\dots,f_n\in A$ איברים היוצרים את אידאל היחידה. אם A_{f_i} חוג נטר לכל $i=1,\dots,n$ אזי A חוג נטר.*

הוכחה: יהי $\mathfrak{a}$ אידאל של A. נוכיח כי $\mathfrak{a}$ נוצר סופית.

לכל $i=1,\dots,n$, $\mathfrak{a}_{f_i}$ הנו אידאל של A_{f_i}, ולכן הנו נוצר סופית. לכן לכל i קיימים $a_{i,1},\dots,a_{i,r}\in\mathfrak{a}$ ו־$\ell_{i,j}\in\mathbb{N}$ כך ש־$\mathfrak{a}_{f_j}$ נוצר ע"י ש־$\left\{\frac{a_{i,j}}{f_i^{\ell_{i,j}}}\right\}_j$. הואיל ו־$f_i\in A_{f_i}^{\times}$, ניתן לקחת $\ell_{i,j}=0$ לכל i,j ולהניח כי $\mathfrak{a}_{f_j}=(\frac{a_{i,1}}{1},\dots,\frac{a_{i,r}}{1})$.

כעת יהי $a\in\mathfrak{a}$. אזי לכל i, קיימים $c_{i,1},\dots,c_{i,r}\in A$ ו־$k\in\mathbb{N}$ כך ש־

$$\frac{a}{1}=\sum_{j=1}^{r}\frac{c_{i,j}}{f_i^k}\frac{a_{i,j}}{1}=\frac{\sum_{j=1}^{r}c_{i,j}a_{i,j}}{f_i^k}\quad\text{ב־}A_{f_i}.$$

לכן קיים $\ell\in\mathbb{N}$ כך שלכל i,

$$f_i^{\ell+k}a=\sum_{j=1}^{r}f_i^{\ell}c_{i,j}a_{i,j}.\qquad(*)$$

הואיל ו־$A = (f_1, \ldots, f_n)$, גם $A = (f_1^{\ell+k}, \ldots, f_n^{\ell+k})$, ולכן קיימים $b_1, \ldots, b_n \in A$ כך ש־

$$\sum_{i=1}^{n} b_i f_i^{\ell+k} = 1. \qquad (**)$$

אזי מ־$(*)$ ו־$(**)$ נובע כי

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^{n} b_i f_i^{\ell+k} a \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i \big(\sum_{j=1}^{r} f_i^{\ell} c_{i,j} a_{i,j} \big) \\ &= \sum_{i,j} (b_i c_{i,j} f_i^{\ell}) a_{i,j}. \end{aligned}$$

לכן $\mathfrak{a}$ נוצר ע"י $\{a_{i,j} \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le r\}$. בפרט, $\mathfrak{a}$ נוצר סופית. ∎

למה 4.3.6: *יהי A חוג ויהי $X = \mathrm{Spec}(A)$. תהי $U \in \mathrm{Open}(X)$ תת־קבוצה אפינית, נאמר $U = \mathrm{Spec}(B)$. יהי $f \in A$ כך ש־$D(f) \subseteq U$ ויהי $g = f|_U \in B$. אזי*

$$A_f \cong B_g.$$

הוכחה: הואיל ו־$D(f) \subseteq U$, לפי למה 2.5.4 ולמה 2.5.5 מתקיים

$$\begin{aligned} D(g) &= U_g \\ &= U_{(f|_U)} \\ &= X_f \cap U \\ &= D(f) \cap U \\ &= D(f). \end{aligned}$$

לכן

$$A_f \cong \Gamma(D(f), \mathcal{O}_X) = \Gamma(D(g), \mathcal{O}_U) \cong B_g. \quad ∎$$

טענה 4.3.7: *תהי X סכימת נטר מקומית ותהי $U = \mathrm{Spec}(A)$ תת־קבוצה אפינית פתוחה של X. אזי A הנו חוג נטר.*

הוכחה: לפי למה 4.3.3, U הנה סכימת נטר מקומית. יהי $U = \bigcup_i U_i$ כיסוי פתוח ע"י קבוצות אפיניות $U_i = \mathrm{Spec}(B_i)$ כך ש־B_i חוג נטר לכל i. הואיל ו־$U_i \in \mathrm{Open}(U)$, לכל i קיימים $f_{i,j} \in A$ כך ש־$U_i = \bigcup_j D(f_{i,j})$. בפרט $D(f_{i,j}) \subseteq U_i$ ולכן לפי למה 4.3.6, $A_{f_{i,j}} \cong (B_i)_{f_{i,j}|_{U_i}}$ לכל i, j. הואיל

ו־B_i חוג נטר, $A_{f_{i,j}}$ הנו חוג נטר. הואיל ו־U דחוסה, קיים תת־כיסוי סופי לכיסוי הפתוח $U = \bigcup_{i,j} D(f_{i,j})$. לכן קיימים $f_1, \dots, f_r \in A$ כך ש־$U = \bigcup_{k=1}^{r} D(f_k)$ ו־A_{f_k} חוג נטר לכל k. הואיל ותנאי הכיסוי גורר כי $A = (f_1, \dots, f_r)$, נובע מלמה 4.3.5 כי A הנו חוג נטר. ∎

4.4 הטבלות.

הגדרה 4.4.1: יהי $\varphi\colon X \to Y$ מורפיזם של סכימות. נאמר כי φ הנו **הטבלה פתוחה** (open immersion) אם קיים פירוק

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_0"', "\sim"] & & Y \\ & V \arrow[ur, hook, "\imath"'] & \end{tikzcd}$$

כך ש־φ_0 הנו איזומורפיזם ו־$\imath$ הנו שיכון של תת־קבוצה פתוחה $V \subseteq Y$.

הגדרה 4.4.2: יהי $(\varphi, \varphi^{\#})\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ מורפיזם של סכימות. נאמר כי φ הנו **הטבלה סגורה** אם ההעתקה הרציפה φ הנה הומאומורפיזם של X על תת־קבוצה **סגורה** של Y ומורפיזם האלומות $\varphi^{\#}\colon \mathcal{O}_Y \to \varphi_* \mathcal{O}_X$ הנו **אפי** (במובן של הגדרה 1.4.12).

למה 4.4.3: *יהי $(\varphi, \varphi^{\#})\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ מורפיזם של סכימות. אזי $(\varphi, \varphi^{\#})$ הטבלה סגורה אם ורק אם φ הומאומורפיזם של X על תת־קבוצה סגורה של Y ו־$\varphi^{\#}_x$ הנו על לכל $x \in X$.*

הוכחה: נניח כי φ הומאומורפיזם של X על תת־הקבוצה הסגורה Z של Y.

יהי $x \in X$. מלמה 2.1.5 נובע כי קיים תרשים חילופי

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \arrow[rr, "\varphi^{\#}_x"] \arrow[dr, "(\varphi^{\#})_{\varphi(x)}"'] & & \mathcal{O}_{X,x} \\ & (\varphi_* \mathcal{O}_X)_{\varphi}(x) \arrow[ur, "\varphi^{\flat}_x"'] & \end{tikzcd}$$

כך ש־$\varphi^{\flat}_x$ איזומורפיזם. לכן $\varphi^{\#}_x$ הנו על אם ורק אם $(\varphi^{\#})_{\varphi(x)}$ הנו על.

תהי $W = Y \setminus Z$. אזי $\varphi^{-1}(W) = \emptyset$ ולכן

$$(\varphi_* \mathcal{O}_X)(V) = \mathcal{O}_X(\emptyset) = \{0\}.$$

לכן $(\varphi_* \mathcal{O}_X)_y = 0$, ובפרט $(\varphi^{\#})_y$ הנו על לכל $y \in W$.

מסקנה: $\varphi^{\#}_x$ הנו על לכל $x \in X$ אם ורק אם $(\varphi^{\#})_y$ הנו על לכל $y \in Y$. הלמה נובעת כעת מלמה 1.4.13. ∎

למה 4.4.4: *הרכבה של הטבלות סגורות הנה הטבלה סגורה.*

הוכחה: יהיו $(f,f^\#)\colon (X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ ו־ $(g,g^\#)\colon (Y,\mathcal{O}_Y)\to(Z,\mathcal{O}_Z)$ הטבלות סגורות. אזי $f(X)$ סגורה ב־Y ו־$g(Y)$ סגורה ב־Z. הואיל ו־g העתקה סגורה, $g\circ f(X)$ סגורה ב־Z, ו־$g\circ f$ הומאומורפיזם של X על $g\circ f(X)$.

יהי $x\in X$. לפי למה 2.1.6, $(g\circ f)^\#_x = f^\#_x\circ g^\#_{f(x)}$. לפי ההנחה, שתי ההעתקות באגף ימין הנן על, ולכן $(g\circ f)^\#_x$ גם על. לכן $(g,g^\#)\circ(f,f^\#)$ הנה הטבלה סגורה. ∎

למה 4.4.5: *יהיו* $(f,f^\#)\colon (X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ *ו־* $(g,g^\#)\colon (Y,\mathcal{O}_Y)\to(Z,\mathcal{O}_Z)$ *מורפיזמים של סכימות. אם* $(g,g^\#)\circ(f,f^\#)$ *הטבלה סגורה ו־ g חח"ע אזי* $(f,f^\#)$ *הטבלה סגורה.*

הוכחה: הואיל ו־$g\circ f$ חח"ע, גם f חח"ע.

הואיל ו־g חח"ע, לכל $S\subseteq Y$ מתקיים $g^{-1}(g(S))=S$.

תהי $W\in \mathrm{Closed}(X)$. אזי $g\circ f(W)\in\mathrm{Closed}(Z)$ ולכן

$$f(W)=g^{-1}(g(f(W)))\in\mathrm{Closed}(Y).$$

לכן f העתקה סגורה וחח"ע, ולכן הנה הומאומורפיזם על תמונתה.

יהי $x\in X$. לפי למה 2.1.6 התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X,x} & & \mathcal{O}_{Y,f(x)} \arrow[ll, "f^\#_x"'] \\
& \mathcal{O}_{Z,g(f(x))} \arrow[ul, "(g\circ f)^\#_x"] \arrow[ur, "g^\#_{f(x)}"'] &
\end{tikzcd}$$

לפי ההנחה, $(g\circ f)^\#_x$ על, ולכן $f^\#_x$ על. לכן $(f,f^\#)$ הטבלה סגורה. ∎

למה 4.4.6: *יהי* $f\colon X\to Y$ *מורפיזם של סכימות. יהי* $Y=\bigcup_i V_i$ *כיסוי פתוח של* Y*. לכל i יהי* $U_i=f^{-1}(V_i)$ *ויהי* $f_i=f|_{U_i}^{V_i}\colon U_i\to V_i$ *המורפיזם המצומצם (ראה למה 2.2.3). אזי f הטבלה סגורה אם ורק אם f_i הטבלה סגורה לכל i.*

הוכחה: יהי $x\in X$ ויהי i_0 כך ש־$x\in U_{i_0}$. אזי לפי למה 2.2.1 ולמה 2.2.3 קיים תרשים חילופי של הומומורפיזמים

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{U_{i_0},x} & \mathcal{O}_{V_{i_0},f(x)} \arrow[l, "(f_{i_0})^\#_x"'] \\
\mathcal{O}_{X,x} \arrow[u, "\wr"'] & \mathcal{O}_{Y,y} \arrow[l, "f^\#_x"] \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

כך שההומומורפיזמים האנכיים הנם איזומורפיזמים.

מסקנה א: $f^\#_x$ הנו על לכל $x \in X$ אם ורק אם $(f_i)^\#_x$ הנו על לכל i ולכל $x \in U_i$.

נניח כי f הומאומורפיזם של X על $Z \in \mathrm{Closed}(Y)$. נתבונן ב־$f_i \colon U_i \to V_i$. יהי $Z_i = Z \cap V_i$. אזי התנאים הבאים מתקיימים:

$(*)$ $Z_i \in \mathrm{Closed}(V_i)$.

$(*)$ f_i חח"ע.

$(*)$ $f_i(U_i) = Z_i$ כי $U_i = f^{-1}(V_i)$.

$(*)$ תהי $U \in \mathrm{Open}(U_i)$. אזי $f(U) \in \mathrm{Open}(Z)$, לכן קיימת $V \in \mathrm{Open}(Y)$ כך ש־$f(U) = Z \cap V$. הואיל ו־$U \subseteq U_i$, $f(U) \subseteq V_i$, ולכן (ע"י החלפת V ב־$V \cap V_i$) ניתן להניח כי $V \subseteq V_i$. לכן

$$f_i(U) = f(U) = Z \cap V = Z_i \cap V \in \mathrm{Open}(Z_i).$$

לכן f_i הנו הומאומורפיזם של U_i על Z_i.

להיפך, נניח כעת כי לכל i, f_i הומאומורפיזם של U_i על תת־קבוצה סגורה Z_i של V_i. יהי $Z = f(X)$. אזי:

$(*)$ f חח"ע: ואכן יהיו $x_1, x_2 \in X$ כך ש־$f(x_1) = f(x_2) = y$, נניח. יהי i כך ש־$y \in V_i$. אזי $x_1, x_2 \in U_i$ ולכן

$$f_i(x_1) = f(x_1) = y = f(x_2) = f_i(x_2).$$

הואיל ו־f_i חח"ע, $x_1 = x_2$.

$(*)$ לכל i, $Z_i = Z \cap V_i$. לכן $Z \cap V_i$ סגורה ב־V_i לכל i, ולכן Z סגורה ב־Y.

$(*)$ תהי $W \in \mathrm{Open}(X)$. אזי $W = \bigcup W \cap U_i$ ולכן

$$f(W) = \bigcup_i f(W \cap U_i) = \bigcup_i f_i(W \cap U_i).$$

לכל i, $W \cap U_i \in \mathrm{Open}(U_i)$ ולכן $f_i(W \cap U_i)$ פתוחה ב־Z_i, ולכן ב־Z (כי Z_i פתוחה ב־Z). לכן $f(W)$ פתוחה ב־Z.

לכן f הומאומורפיזם של X על Z.

מסקנה ב: f הנו הומאומורפיזם של X על תת־קבוצה סגורה של Y אם ורק אם לכל i, f_i הנו הומאומורפיזם של U_i על תת־קבוצה סגורה של V_i.

אם נצרף את שתי המסקנות דלעיל נסיק את נכונות הטענה. ∎

למה 4.4.7: *יהיו A, B חוגים ויהיו $X = \operatorname{Spec}(A), Y = \operatorname{Spec}(B)$. יהי $\varphi\colon A \to B$ הומומורפיזם של חוגים ויהי $f\colon Y \to X$ מורפיזם הסכימות המושרה. אזי*

(1) *φ חח"ע אם ורק אם המורפיזם $f^{\#}\colon \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ הנו מוני. במקרה זה, $f(Y)$ צפופה ב־X.*[2]

(2) *φ על אם ורק אם f הטבלה סגורה.*

הוכחה:

(1) נציין כי לפי למה 1.4.5, $f^{\#}$ הנו מוני אם ורק אם $f^{\#}(U)$ חח"ע לכל $U \in \operatorname{Open}(X)$.

נניח כי φ חח"ע. יהי $U \in \operatorname{Open}(X)$ ויהי $V = f^{-1}(U) \in \operatorname{Open}(Y)$. צריך להוכיח כי $f^{\#}(U)\colon \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_Y(V)$ הנו חח"ע. ראשית נניח כי U הנה קבוצה פתוחה בסיסית, $U = D(a)$ עבור $a \in A$ כלשהו. לפי למה 2.3.8, $V = D(\varphi(a))$ והתרשים הבא חילופי:

$$\begin{array}{ccc} A_a & \xrightarrow{\varphi_a} & B_{\varphi(a)} \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathcal{O}_X(U) & \xrightarrow{f^{\#}(U)} & \mathcal{O}_Y(V) \end{array}$$

לכן על מנת להוכיח כי $f^{\#}(U)$ חח"ע מספיק להוכיח כי φ_a חח"ע.

יהיו $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$\varphi_a(\frac{x}{a^n}) = 0$. אזי $\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)^n} = 0$, לכן קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש־$\varphi(a)^m\varphi(x) = 0$. הואיל ו־$\varphi$ חח"ע, מתקיים $a^m x = 0$, ולכן $\frac{x}{a^n} = 0$ ב־A_a. לכן φ_a אכן חח"ע.

במקרה הכללי, יהי $\sigma \in \mathcal{O}_X(U)$ כך ש־$f^{\#}(U)(\sigma) = 0$. תהי U_0 פתוחה בסיסית המוכלת ב־U ויהי $V_0 = f^{-1}(V_0)$. אזי

$$f^{\#}(U_0)(\sigma|_{U_0}) = f^{\#}(U)(\sigma)|_{V_0} = 0.$$

לפי המקרה הפרטי דלעיל, $f^{\#}(U_0)$ חח"ע ולכן $\sigma|_{U_0} = 0$. הואיל ו־U מכוסה ע"י תת־קבוצות בסיסיות, $\sigma = 0$, ולכן $f^{\#}(U)$ חח"ע.

להיפך, אם $f^{\#}$ מוני, אזי בפרט $f^{\#}(X)\colon \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_Y(Y)$ חח"ע. הואיל ועד כדי איזומורפיזם (ראה סעיף 3 של למה 2.3.8) $f^{\#}(X)$ מתלכד עם ההומומורפיזם φ, אנו מסיקים כי φ חח"ע.

כעת לצפיפות. תהי $D(a)$ תת־קבוצה פתוחה בסיסית לא ריקה של X, עבור $a \in A$ כלשהו. התנאי $D(a) \neq \emptyset$ שקול לכך ש־a אינו אפיסי. הואיל ו־φ חח"ע, גם $\varphi(a)$ אינו אפיסי, ולכן $D(\varphi(a)) \neq \emptyset$. לכן קיים $\mathfrak{q} \in Y$ כך ש־$\mathfrak{q} \notin \varphi(a)$. לכן $f(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \notin a$, כלומר $f(\mathfrak{q}) \in D(a)$. לכן $D(a) \cap f(Y) \neq \emptyset$.

(2) נניח כי φ על. יהי $\mathfrak{a} = \operatorname{Ker}(\varphi)$. תהי $Z = V(\mathfrak{a})$, תת־קבוצה סגורה של X. אזי ההעתקה $f\colon \mathfrak{q} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ הנה התאמה חח"ע ועל בין האידאלים הראשוניים של B והאידאלים הראשוניים של A המכילים את $\mathfrak{a}$, במילים

2 מורפיזם שתמונתו צפופה בטווחו נקרא **שולט**.

אחרות בין Y ו־Z. בנוסף, הואיל ו־φ על, לכל תת־קבוצה S של B מתקיים $\varphi(\varphi^{-1}(S)) = S$ ולכן $f(V(S)) = V(\varphi^{-1}(S))$, כלומר f העתקה סגורה. לכן f הומאומורפיזם של Y על Z.

לכל $\mathfrak{q} \in Y$, ההומומורפיזם $\varphi_{\mathfrak{q}}\colon A_{f(\mathfrak{q})} \to B_{\mathfrak{q}}$ הנו על. לפי סעיף (2) של טענה $2.3.8$, $f^{\#}_{\mathfrak{q}}$ הנו על עבור כל $\mathfrak{q} \in Y$. לפי למה $4.4.3$, f הטבלה סגורה.

להיפך, נניח כי f הטבלה סגורה. יהי $\mathfrak{a} = \operatorname{Ker}(\varphi)$. יהי $C = A/\mathfrak{a}$, יהי $Z = \operatorname{Spec}(C)$ ותהי $\pi\colon A \to C$ העתקת המנה. אזי קיים תרשים חילופי של חוגים

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

תרשים זה משרה תרשים חילופי של מורפיזמים של סכימות:

$$\begin{tikzcd} X & & Y \arrow[ll, "f"'] \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ & Z \arrow[ul, "p"] & \end{tikzcd}$$

לפי החלק הראשון של הסעיף, הואיל ו־π על, p הנו הטבלה סגורה כך שההעתקה p הנה הומאומורפיזם של Z על $V(\mathfrak{a})$. הואיל ו־$\bar{\varphi}$ חח"ע, מסעיף (1) נובע כי $\bar{f}(Y)$ צפופה ב־Z, ולכן $f(Y) = p(\bar{f}(Y))$ צפופה ב־$V(\mathfrak{a})$. לפי ההנחה, f הנו הטבלה סגורה ובפרט $f(Y)$ סגורה ב־X. לכן $f(Y) = V(\mathfrak{a})$, ולכן קיים תרשים חילופי של **העתקות רציפות**:

$$\begin{tikzcd} V(\mathfrak{a}) & & Y \arrow[ll, "f"'] \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ & Z \arrow[ul, "p"] & \end{tikzcd}$$

כך ש־p ו־f הנן הומאומורפיזמים. לכן ההעתקה $\bar{f}$ הנה הומאומורפיזם של Y על Z.

לפי למה $4.4.5$, המורפיזם $\bar{f}$ הנו הטבלה סגורה כי p חח"ע. לכן $\bar{f}^{\#}$ אפי. הואיל ו־$\bar{\varphi}$ חח"ע, נובע מסעיף (1) כי $\bar{f}^{\#}$ מוני, ולכן מלמה $1.4.14$ נובע כי $\bar{f}^{\#}$ הנו איזומורפיזם של אלומות (של חבורות אבליות, ולכן גם של חוגים). לכן $(\bar{f}, \bar{f}^{\#})\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ הנו איזומורפיזם של סכימות אפיניות, ולכן $\bar{\varphi}$ הנו איזומורפיזם של חוגים. בפרט, φ הנו על. ∎

טענה $4.4.8$: *תהי $f\colon Y \to X$ הטבלה סגורה של סכימות. אם X אפינית אזי גם Y אפינית.*

הוכחה: נניח כי $X = \operatorname{Spec}(A)$. תהי $Z = f(Y) \in \operatorname{Closed}(X)$. הואיל ו־$X$ דחוסה, גם Z דחוסה. הואיל ו־f הומאומורפיזם של Y על Z, גם Y דחוסה.

תהי $U = \operatorname{Spec}(B)$ תת־קבוצה פתוחה אפינית של Y. אזי $f(U) \in \operatorname{Open}(Z)$, לכן קיימת $V \in \operatorname{Open}(X)$ כך ש־$f(U) = V \cap Z$. בפרט, $U = f^{-1}(V)$.

יהי $y \in U$. אזי קיים $a \in A$ כך ש־$f(y) \in D(a) \cap Z \subseteq V \cap Z$.

נתבונן במורפיזם $f|_U \colon U \to X$ של סכימות אפיניות. מורפיזם זה מושרה ע"י הומומורפיזם של חוגים $\theta \colon A \to B$. אזי

$$D(\theta(a)) = (f|_U)^{-1}(D(a)) = f^{-1}(D(a)) \cap U = f^{-1}(D(a)) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(D(a)),$$

כאשר השוויון האחרון נובע מכך ש־$D(a) \subseteq V$. בנוסף, $y \in \varphi^{-1}(D(a))$. לכן ל־U יש כיסוי **אפיני** פתוח ע"י קבוצות מהצורה $f^{-1}(D(a))$, $a \in A$. הואיל ו־Y מכוסה ע"י קבוצות פתוחות אפיניות, ו־Y דחוסה, קיימים $a_1, \dots, a_r \in A$ כך ש־$f^{-1}(D(a_i))$ אפינית ו־

$$Y = \bigcup_{i=1}^{r} f^{-1}(D(a_i)).$$

לכן

$$Z \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} D(a_i)).$$

הואיל ו־$X \smallsetminus Z$ פתוחה ו־X דחוסה, קיימים $a_{r+1}, \dots, a_s \in A$ כך ש־

$$X = \bigcup_{i=1}^{s} D(a_i)$$

ולכל i, $\varphi^{-1}(D(a_i))$ ריקה או אפינית. לפי טענה 2.3.2, $a_1, \dots, a_s$ יוצרים את אידאל היחידה של A ולכן קיימים $b_i \in A$ כך ש־$\sum_i b_i a_i = 1$.

יהי $C = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$. המורפיזם f משרה הומומורפיזם של חוגים $f^{\#}(X) \colon \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = A \to C$.
יהי $c_i = f^{\#}(X)(a_i)$. אזי $\sum_i f^{\#}(X)(b_i) c_i = 1$, לכן $c_1, \dots, c_s$ יוצרים את אידאל היחידה ב־C.

בנוסף, לפי למה 2.5.3 ולמה 2.5.5, לכל i,

$$Y_{c_i} = f^{-1}(X_{a_i}) = f^{-1}(D(a_i)),$$

וזוהי קבוצה אפינית לפי הבניה. לפי בוחן האפיניות בטענה 2.5.11, Y הנה אפינית. ∎

4.5 מורפיזמים נוצרים סופית וסופיים.

הגדרה 4.5.1: יהי $f\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ מורפיזם של סכימות אפיניות, ויהי $\varphi\colon A \to B$ הומומורפיזם החוגים המתאים. תוך שיבוש המינוח, נאמר כי f הנו **אלגברה נוצרת סופית** (בהתאמה, **מודול נוצר סופית**) אם ההומומורפיזם φ הופך את B לאלגברת־A נוצרת סופית (בהתאמה מודול־A נוצר סופית).

הגדרה 4.5.2: יהי $f\colon X \to Y$ מורפיזם של סכימות. נאמר כי f הנו **מטיפוס סופי מקומית** אם קיים כיסוי אפיני פתוח $Y = \bigcup_i V_i$ כך שלכל i יש כיסוי אפיני פתוח $f^{-1}(V_i) = \bigcup_j U_{i,j}$ כך שהמורפיזם

$$f|_{U_{i,j}}^{V_i}\colon U_{i,j} \to V_i$$

הנו אלגברה נוצרת סופית לכל i, j. אם בנוסף הכיסוי $f^{-1}(V_i) = \bigcup_j U_{i,j}$ הנו **סופי** לכל i, אזי נאמר פשוט כי f הנו **מטיפוס סופי**.

הגדרה 4.5.3: יהי $f\colon X \to Y$ מורפיזם של סכימות. נאמר כי f הנו **סופי** אם קיים כיסוי אפיני פתוח $Y = \bigcup_i V_i$ כך שלכל i, $f^{-1}(V_i)$ אפינית והמורפיזם

$$f|_{f^{-1}(V_i)}^{V_i}\colon f^{-1}(V_i) \to V_i$$

הנו מודול נוצר סופית.

הגדרה 4.5.4: יהי $f\colon X \to Y$ מורפיזם של סכימות. נאמר כי f הנו **דחוס** אם קיים כיסוי אפיני פתוח $Y = \bigcup_i V_i$ כך ש־$f^{-1}(V_i)$ דחוסה לכל i.

למה 4.5.5: *יהי $\varphi\colon A \to B$ הומומורפיזם של חוגים ויהי $a \in A$. אם B הנו אלגברת־A נוצרת סופית (בהתאמה, מודול־A נוצר סופית), אזי $B_{\varphi(a)}$ הנו אלגברת־A_a נוצרת סופית (בהתאמה, מודול־A_a נוצר סופית).*

הוכחה: אם $b_1, \ldots, b_k$ יוצרים את B אזי $\frac{b_1}{1}, \ldots, \frac{b_k}{1}$ יוצרים את $B_{\varphi(a)}$. ∎

טענה 4.5.6: *יהי $f\colon X \to Y$ מורפיזם של סכימות מטיפוס סופי מקומית. תהי $V \subseteq Y$ תת־קבוצה פתוחה אפינית. אזי יש כיסוי אפיני פתוח $f^{-1}(V) = \bigcup_j U_j$ כך ש־$f|_{U_j}^{V}\colon U_j \to V$ הנו אלגברה נוצרת סופית לכל j.*

הוכחה: נחלק את ההוכחה לכמה שלבים.

א. תכונת FG: עבור $V \in \mathrm{Open}(Y)$ אפינית, נאמר כי V הנה מסוג FG אם יש כיסוי אפיני פתוח $f^{-1}(V) = \bigcup_j U_j$ כך ש־$f|_{U_j}^{V}$ אלגברה נוצרת סופית לכל j. אם כן אנו מניחים כי יש כיסוי אפיני פתוח של Y מסוג FG ועלינו להוכיח כי כל תת־קבוצה אפינית פתוחה של Y הנה מסוג FG.

ב. אם $V \subseteq Y$ מסוג FG אז כל תת־קבוצה פתוחה בסיסית של V הנה מסוג FG: תהי $V \in \mathrm{Open}(Y)$ אפינית מסוג FG, נניח $V = \mathrm{Spec}(A)$. תהי $U = f^{-1}(V)$ ויהי $U = \bigcup_j U_j$ כיסוי אפיני פתוח כך ש־$U_j = \mathrm{Spec}(B_j)$ ו־B_j אלגברת־A נוצרת סופית. יהי

$$.\theta = f^{\#}(V)\colon \Gamma(V, \mathcal{O}_Y) = A \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$$

לכל j יהי

$$.\theta_j = \mathrm{res}^{\mathcal{O}_X}_{U,U_j} \circ \theta\colon \Gamma(V, \mathcal{O}_Y) = A \to \Gamma(U_j, \mathcal{O}_X) = B_j$$

אזי $\theta_j = (f|^V_{U_j})^{\#}(V)$ הנו הומומורפיזם המבנה של B_j בתור אלגברת־A.

יהי $a \in A$. אזי לפי למה 2.5.3, למה 2.5.4 ולמה 2.5.5 מתקיים

$$\begin{aligned}
(f|^V_{U_j})^{-1}(D(a)) &= f^{-1}(D(a)) \cap U_j \\
&= f^{-1}(V_a) \cap U_j \\
&= U_{\theta(a)} \cap U_j \\
&= (U_j)_{\theta(a)|_{U_j}} \\
&= (U_j)_{\theta_j(a)} \\
&= D(\theta_j(a))
\end{aligned}$$

בפרט,

$$.f^{-1}(D(a)) = \bigcup_j (f^{-1}(D(a)) \cap U_j) = \bigcup_j D(\theta_j(a))$$

לפי למה 2.3.9, ע"י זיהוי החוגים האיזומורפים באופן טבעי מתקבל התרשים החילופי הבא:

$$\begin{tikzcd}
A = \Gamma(V, \mathcal{O}_Y) \arrow[r, "\theta_j"] \arrow[d] & \Gamma(U_j, \mathcal{O}_X) = B_j \arrow[d] \\
A_a = \Gamma(D(a), \mathcal{O}_Y) \arrow[r, "(\theta_j)_a"] & \Gamma(D(\theta_j(a)), \mathcal{O}_X) = (B_j)_{\theta_j(a)}
\end{tikzcd}$$

הואיל ו־B_j אלגברת־A נוצרת סופית, לפי למה 4.5.5 $(B_j)_{\theta_j(a)}$ הנו אלגברת־A_a נוצרת סופית. לכן $D(a)$ הנה מסוג FG.

ג. אם Y אפינית אזי Y מסוג FG: נניח כי $Y = \operatorname{Spec}(C)$. תהי $V = \operatorname{Spec}(A)$ תת־קבוצה אפינית פתוחה של Y מסוג FG. יהי $c \in C$ כך ש־$D(c) \subseteq V$. אזי

$$.D(c) = Y_c = Y_c \cap V = V_{c|_V} = D(c|_V)$$

לכן לפי הסעיף הקודם, $D(c)$ היא מסוג FG. לכן ל־$f^{-1}(D(c))$ יש כיסוי אפיני פתוח ע"י ספקטרומים של אלגברות נוצרות סופית מעל $\Gamma(D(c), \mathcal{O}_Y) = C_c$. הואיל והחוג C_c נוצר ע"י $\frac{1}{c}$ כאלגברה מעל C, אנו רואים כי ל־$f^{-1}(D(c))$ יש כיסוי אפיני פתוח ע"י ספקטרומים של אלגברות נוצרות סופית מעל $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = C$.

הואיל ו־V מכוסה ע"י תת־קבוצות מהצורה $D(c)$ כאשר $c \in C$, ו־Y מכוסה ע"י V־ים כאלו, אנו רואים כי ל־$f^{-1}(Y)$ יש כיסוי אפיני פתוח ע"י ספקטרומים של אלגברות נוצרות סופית מעל $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$. לכן Y הנה מסוג FG.

ד. סיום ההוכחה: תהי $W \subseteq Y$ אפינית פתוחה. לפי סעיף ב ל־W יש כיסוי אפיני פתוח מסוג FG, ולכן ניתן להשתמש במקרה הפרטי של סעיף ג ולהסיק כי W מסוג FG. ∎

במהלך הוכחת הטענה האחרונה קיבלנו את התוצאה הבאה:

תוצאה 4.5.7: *יהי $f\colon X \to Y$ מורפיזם של סכימות. תהי $V \in \operatorname{Open}(Y)$ ותהי $U = f^{-1}(V)$. אם f מטיפוס סופי מקומית אזי גם $f|_U^V$ מטיפוס סופי מקומית.*

למה 4.5.8: *תהי X סכימה ויהי $a \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. אם X דחוסה אזי גם X_a דחוסה.*

הוכחה: יהי $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ כיסוי אפיני פתוח סופי של X. אזי לפי למה 2.5.4 ולמה 2.5.5, לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים

$$, X_a \cap U_i = (U_i)|_{a|_{U_i}} = D(a|_{U_i})$$

ובפרט $X_a \cap U_i$ קבוצה דחוסה. לכן

$$X_a = \bigcup_{i=1}^{n} (X_a \cap U_i)$$

הנה דחוסה. ∎

למה 4.5.9: *יהי $f\colon X \to Y$ מורפיזם של סכימות. אם f דחוס אזי לכל $W \in \operatorname{Open}(Y)$ אפינית, $f^{-1}(W)$ דחוסה.*

הוכחה: תהי $V = \operatorname{Spec}(B) \in \operatorname{Open}(Y)$ אפינית כך ש־$U := f^{-1}(V)$ דחוסה. יהי $b \in B$. אזי לפי למה 2.5.3 ולמה 2.5.5 מתקיים

$$, f^{-1}(D(b)) = f^{-1}(V_b) = U_{\theta(b)}$$

כאשר $\theta = f^{\#}(V)\colon \Gamma(V, \mathcal{O}_Y) = B \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. לכן לפי למה 4.5.8, $f^{-1}(D(b))$ דחוסה.

יהי $Y = \bigcup_i V_i$ כיסוי אפיני פתוח כך ש־$f^{-1}(V_i)$ דחוסה לכל i. תהי $W \in \mathrm{Open}(Y)$ אפינית. אזי

$$.W = \bigcup_i (W \cap V_i)$$

כפי שהראנו דלעיל, לכל תת־קבוצה פתוחה בסיסית של V_i יש תמונה הופכית דחוסה. הואיל ו־$W \cap V_i$ מכוסה ע"י תת־קבוצות פתוחות בסיסיות של V_i, אנו רואים כי קיים כיסוי אפיני פתוח

$$W = \bigcup_\alpha W_\alpha$$

כך ש־$f^{-1}(W_\alpha)$ דחוסה לכל α. הואיל ו־W אפינית, W דחוסה, ולכן ניתן לקחת מספר סופי של α בכיסוי הנ"ל, ואז

$$f^{-1}(W) = \bigcup_\alpha f^{-1}(W_\alpha)$$

הנה איחוד סופי של קבוצות דחוסות, בפרט דחוסה בעצמה. ∎

למה 4.5.10: *יהי $f\colon X \to Y$ מורפיזם של סכימות. אזי f מטיפוס סופי אם ורק אם f מטיפוס סופי מקומית ודחוס. במקרה זה,* **לכל** *$V \subseteq Y$ אפינית קיים כיסוי אפיני פתוח סופי של $f^{-1}(V)$ מהצורה הנדרשת.*

הוכחה: נניח כי f מטיפוס סופי. אזי לפי ההגדרה f מטיפוס סופי מקומית. תהי $V = \mathrm{Spec}(B) \in \mathrm{Open}(Y)$ אפינית כך של־$f^{-1}(V)$ יש כיסוי אפיני פתוח סופי ע"י ספקטרומים של אלגברות נוצרות סופית מעל B. בפרט, $f^{-1}(V)$ דחוסה כי יש לה כיסוי סופי ע"י קבוצות דחוסות. לפי ההנחה, יש ל־Y כיסוי אפיני פתוח מהצורה הנ"ל, ולכן f דחוס.

להיפך, נניח כי f דחוס ומטיפוס סופי מקומית. תהי $V = \mathrm{Spec}(B) \subseteq (Y)$ אפינית. לפי טענה 4.5.6, ל־$f^{-1}(V)$ יש כיסוי אפיני פתוח של ספקטרומים של אלגברות נוצרות סופית מעל B. לפי למה 4.5.9, $f^{-1}(V)$ דחוסה ולכן הכיסוי הזה הנו סופי. לכן f מטיפוס סופי. ∎

למה 4.5.11: *יהי $\varphi\colon B \to A$ הומומורפיזם של חוגים. יהיו $a_1, \ldots, a_n \in A$ כך ש־$(a_1, \ldots, a_n) = (1)$. לכל i יהי $A_i = A_{a_i}$ ויהי $\varphi_i\colon B \to A_i$ ההרכבה של ההומומורפיזם הטבעי $A \to A_i$ על φ. אם φ_i הופך את A_i לאלגברת־B נוצרת סופית לכל i, אזי φ הופך את A לאלגברת־B נוצרת סופית.*

הוכחה: יהיו $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in A$ כך שלכל $i = 1, \ldots, n$ הקבוצה

$$\left\{\frac{\alpha_j}{1} \mid 1 \leq j \leq d\right\} \cup \left\{\frac{1}{a_i}\right\}$$

יוצרת את A_i כאלגברת־B. יהיו $c_1,\dots,c_n$ כך ש־

$$.\sum_{i=1}^{n} c_i a_i = 1 \tag{1}$$

תהי C תת־האלגברת־B של A הנוצרת ע"י

$$.\{\alpha_1,\dots,\alpha_d,a_1,\dots,a_n,c_1,\dots,c_n\}$$

נשלים את ההוכחה ע"י כך שנראה כי $A = C$.

יהי אפוא $a \in A$. אזי לכל $i = 1,\dots,n$, קיימים $b_{\mathbf{j}}^{(i)} \in B$ כך שבחוג A_i מתקיים

$$\begin{aligned}\frac{a}{1} &= \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^{d+1}} \varphi_i\big(b_{\mathbf{j}}^{(i)}\big)\frac{\alpha_1^{\mathbf{j}_1}\cdots\alpha_d^{\mathbf{j}_d}}{a_i^{\mathbf{j}_0}}\\ &= \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^{d+1}} \frac{\varphi\big(b_{\mathbf{j}}^{(i)}\big)}{1}\frac{\alpha_1^{\mathbf{j}_1}\cdots\alpha_d^{\mathbf{j}_d}}{a_i^{\mathbf{j}_0}}\\ &= \frac{1}{a_i^m}\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^{d+1}} \varphi\big(b_{\mathbf{j}}^{(i)}\big)\alpha_1^{\mathbf{j}_1}\cdots\alpha_d^{\mathbf{j}_d}a_i^{m-\mathbf{j}_0}\end{aligned}$$

עבור $m \in \mathbb{N}$ כלשהו. לכן קיים $\ell \in \mathbb{N}$ כך שלכל i,

$$.a_i^{\ell+m}a = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^{d+1}} \varphi\big(b_{\mathbf{j}}^{(i)}\big)\alpha_1^{\mathbf{j}_1}\cdots\alpha_d^{\mathbf{j}_d}a_i^{\ell+m-\mathbf{j}_0} \in C \tag{2}$$

טענה: לכל $s \in \mathbb{N}^+$ קיימים פולינומים

$$F_1^{(s)},\dots F_n^{(s)} \in \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n]$$

המקיימים

$$.\sum_{i=1}^{n} F_i^{(s)}(a_1,\dots,a_n,c_1,\dots,c_n)a_i^s = 1 \tag{3}$$

הוכחה: עבור $s = 1$, הטענה נובעת מ־(1). עבור $s > 1$ נשתמש בשויון

$$1 = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i^{(s-1)}(a_1,\dots,a_n,c_1,\dots,c_n)a_i^{s-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i a_i\right)$$

על מנת להגדיר את $F_i^{(s)}$ באופן אינדוקטיבי.

לכן קיימים $g_1, \dots, g_n \in C$ המקיימים

$$\sum_{i=1}^{n} g_i a_i^{\ell+m} = 1 \tag{4}$$

אם נצרף את (2) ו־(4) נראה כי

$$a = \sum_{i=1}^{n} g_i a_i^{\ell+m} a \in C$$

לכן אכן $A = C$ הנה אלגברת־B נוצרת סופית. ∎

למה 4.5.12: *יהי $f\colon X \to Y$ מורפיזם מטיפוס סופי. יהיו $V = \mathrm{Spec}(B)$ ו־ $U = \mathrm{Spec}(A)$ תת־קבוצות אפיניות פתוחות של Y ו־ X בהתאמה כך ש־ $U \subseteq f^{-1}(V)$. אזי A הנה אלגברת־ B נוצרת סופית.*

הוכחה: לפי ההנחה,

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{k} U_i$$

כאשר $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ ו־A_i אלגברת־B נוצרת סופית. יהי $\alpha \in A_i$. אזי $(A_i)_\alpha$ אלגברת־A_i נוצרת סופית, ולכן $(A_i)_\alpha$ אלגברת־B נוצרת־סופית. נציין כי $U = \bigcup_{i=1}^{k}(U \cap U_i)$. אם $\alpha \in A_i$ כך ש־$D(\alpha) \subseteq U$, אזי

$$D(\alpha) = (U_i)_\alpha = U_{\alpha|_U} = D(\alpha|_U)$$

נשים לב כי (ע"י האיזומורפיזמים הטבעיים) מתקיים

$$(A_i)_\alpha = \Gamma(D(\alpha), \mathcal{O}_X) = \Gamma(D(\alpha|_U), \mathcal{O}_X) = A_{\alpha|_U}$$

לכן קיימים $a_1, \dots, a_n \in A$ כך ש־

$$U = \bigcup_{j=1}^{n} D(a_j)$$

ו־A_{a_i} אלגברת־B נוצרת סופית לכל i. מתנאי הכיסוי של U נובע כי $(a_1, \dots, a_n) = A$, ולכן מלמה 4.5.11 נובע כי A אלגברת־B נוצרת סופית. ∎

למה 4.5.13: *יהי* $\varphi\colon A\to B$ *הומומורפיזם של חוגים. יהיו* $a_1,\dots,a_n\in A$ *כך ש־* $(a_1,\dots,a_n)=(1)$*. לכל* i *נסמן* $A_i=A_{a_i}$*,* $B_i=B_{\varphi(a_i)}$ *ו־* $\varphi_i=\varphi_{a_i}\colon A_i\to B_i$*. אם* B_i *הנו מודול־* A_i *נוצר סופית לכל* $1\le i\le n$ *אזי* B *הנו מודול־* A *נוצר סופית.*

הוכחה: ע"י הוספת יוצרים והבאה למכנה משותף אנו רואים כי קיימים $m\in\mathbb{N}$ ו־ $b_1,\dots,b_r\in B$ כך שלכל $1\le i\le n$, B_i נוצר כמודול־A_i ע"י הקבוצה

$$.\left\{\frac{b_j}{\varphi(a_i)^m}\mid 1\le j\le r\right\}$$

יהי $b\in B$. אזי קיימים $\ell\in\mathbb{N}$ ו־ $\{\alpha_j^{(i)}\mid 1\le i\le n, 1\le j\le r\}\subseteq A$ כך שלכל i מתקיים ב־B_i השויון

$$\begin{aligned}\frac{b}{1}&=\sum_{j=1}^r\varphi_i\big(\frac{\alpha_j^{(i)}}{a_i^\ell}\big)\frac{b_j}{\varphi(a_i)^m}\\&=\frac{\sum_{j=1}^r\varphi(\alpha_j^{(i)})b_j}{\varphi(a_i)^{\ell+m}}\end{aligned}\qquad(*)$$

לכן קיים $k\in\mathbb{N}$ כך שלכל i,

$$.\varphi(a_i)^{k+\ell+m}b=\varphi(a_i)^k\sum_{j=1}^r\varphi(\alpha_j^{(i)})b_j=\sum_{j=1}^r\varphi(a_i^k\alpha_j^{(i)})b_j$$

הואיל ו־$(a_1,\dots,a_n)=(1)$, גם $(a_1^{k+\ell+m},\dots,a_n^{k+\ell+m})=(1)$, ולכן קיימים $c_1,\dots c_n\in A$ כך ש־

$$.\sum_{i=1}^r c_ia_i^{k+\ell+m}=1$$

אם נפעיל את φ על שויון זה ונשתמש ב־$(*)$ נקבל

$$\begin{aligned}b&=\sum_{i=1}^n\varphi(c_i)\varphi(a_i)^{k+\ell+m}b\\&=\sum_{i=1}^n\varphi(c_i)\sum_{j=1}^r\varphi(a_i^k\alpha_j^{(i)})b_j\\&=\sum_{j=1}^r\varphi\big(\sum_{i=1}^n c_ia_i^k\alpha_j^{(i)}\big)b_j.\end{aligned}$$

לכן B נוצר כמודול־A ע"י $\{b_1,\dots,b_r\}$. ∎

טענה 4.5.14: *יהי* $f\colon X \to Y$ *מורפיזם סופי של סכימות. תהי* $V \subseteq Y$ *תת־קבוצה פתוחה אפינית. אזי* $f^{-1}(V)$ *אפינית כך ש־* $f|^{V}_{f^{-1}(V)}\colon f^{-1}(V) \to V$ *הנו מודול נוצר סופית.*

הוכחה: נחלק את ההוכחה לכמה שלבים.

א. תכונת FT: עבור $V \in \mathrm{Open}(Y)$ אפינית, נאמר כי V הנה מסוג FT אם $f^{-1}(V)$ אפינית כך ש־$f|^{V}_{f^{-1}(V)}$ מודול נוצר סופית. אם כן אנו מניחים כי יש כיסוי אפיני פתוח של Y מסוג FT ועלינו להוכיח כי כל תת־קבוצה אפינית פתוחה של Y הנה מסוג FT.

ב. אם $V \subseteq Y$ **מסוג** FT **אז כל תת־קבוצה פתוחה בסיסית של** V **הנה מסוג** FT: תהי $V \in \mathrm{Open}(Y)$ אפינית מסוג FT, נניח $V = \mathrm{Spec}(A)$. תהי $U = f^{-1}(V)$. לפי ההנחה, $U = \mathrm{Spec}(B)$ כך ש־B מודול־A נוצר סופית דרך ההומומורפיזם

$$\theta = f^{\#}(V)\colon \Gamma(V, \mathcal{O}_Y) = A \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = B.$$

יהי $a \in A$. אזי $f^{-1}(D(a)) = D(\theta(a))$, ובפרט זוהי קבוצה אפינית. לפי למה 2.3.9, ע"י זיהוי החוגים האיזומורפים באופן טבעי מתקבל התרשים החילופי הבא:

$$\begin{tikzcd}
A = \Gamma(V, \mathcal{O}_Y) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = B \arrow[d] \\
A_a = \Gamma(D(a), \mathcal{O}_Y) \arrow[r, "\theta_a"] & \Gamma(D(\theta(a)), \mathcal{O}_X) = B_{\theta(a)}
\end{tikzcd}$$

לפי למה 4.5.5, $B_{\theta(a)}$ הנו מודול־A_a נוצר סופית. לכן $D(a)$ הנה מסוג FT.

ג. אם Y **אפינית אזי** Y **מסוג** FT: נניח כי $Y = \mathrm{Spec}(C)$. תהי $V = \mathrm{Spec}(A)$ תת־קבוצה אפינית פתוחה של Y מסוג FT. יהי $c \in C$ כך ש־$D(c) \subseteq V$. אזי

$$D(c) = Y_c = Y_c \cap V = V_{c|_V} = D(c|_V).$$

לכן לפי הסעיף הקודם, $D(c)$ היא מסוג FT. הואיל ו־V מכוסה ע"י תת־קבוצות מהצורה $D(c)$ כאשר $c \in C$, ו־Y מכוסה ע"י V־ים כאלו, אנו רואים כי קיימים $c_1, \ldots, c_n \in C$ כך ש־

$$Y = \bigcup_{j=1}^{n} D(c_j)$$

ו־$D(c_j)$ מסוג FT לכל j. נסמן

$$.\theta = f^{\#}(Y)\colon \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = C \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

לכל $1 \leq j \leq n$, מתקיים

$$.f^{-1}(D(c_j)) = f^{-1}(Y_{c_j}) = X_{\theta(c_j)}$$

הואיל ו־$D(c_j)$ מסוג FT, $X_{\theta(c_j)}$ אפינית לכל j. מהתנאי $Y = \bigcup_j D(c_j)$ נובע כי $C = (c_1, \dots, c_n)$ ולכן $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = (\theta(c_1), \dots, \theta(c_n))$. לפי טענה 2.5.11, X אפינית, נאמר $X = \operatorname{Spec}(B)$.

אזי המורפיזם f מושרה ע"י הומומורפיזם $\varphi\colon C \to B$, ו־$f^{-1}(D(c_j)) = D(\varphi(c_j))$ לכל j. בנוסף, $D(c_j)$ מסוג FT ולכן $B_{\theta(c_j)}$ הנו מודול־C_{c_j} נוצר סופית לכל j. לפי למה 4.5.13, B הנו מודול־C נוצר סופית. לכן Y הנו מסוג FT.

ד. סיום ההוכחה: תהי $W \subseteq Y$ אפינית פתוחה. לפי סעיף ב ל־W יש כיסוי אפיני פתוח מסוג FT, ולכן ניתן להשתמש במקרה הפרטי של סעיף ג ולהסיק כי W מסוג FT. ∎

[EiH] D. Eisenbud and J. Harris, *The Geometry of Schemes,* Graduate Texts in Mathematics **197**, Springer-Verlag, New York, 2000.

[Har] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry,* Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag, New York, 1977.

[Kem] G. Kempf, *Algebraic Varieties,* London Mathematical Society Lecture Note Series **172**, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[KrR] M. Kreuzer and L. Robbiano, *Computational Commutative Algebra. 1,* Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[Liu] Q. Liu, *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves,* Oxford Graduate Texts in Mathematics **6**, Oxford University Press, Oxford, 2002.

[Mac] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician, Second Edition,* Graduate Texts in Mathematics **5**, Springer-Verlag, New York, 1998.

[Mum] D. Mumford, *The Red Book of Varieties and Schemes,* Lecture Notes in Mathematics **1358**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[NVO] C. Năstăsescu and F. Van Oystaeyen, *Methods of Graded Rings,* Lecture Notes in Mathematics **1836**, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[Ten] B. R. Tennison, *Sheaf Theory,* London Mathematical Society Lecture Note Series **20**, Cambridge University Press, Cambridge, 1975.

[Uen1] K. Ueno, *Algebraic Geometry. 1,* Translations of Mathematical Monographs **185**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[Uen2] K. Ueno, *Algebraic Geometry. 2,* Translations of Mathematical Monographs **197**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.