מבוא לאלגברה 2

משה ירדן, אוניברסיטת תל אביב, תשס"ב

1. פריקות בחוגים אוקלידיים

כל מספר טבעי נתן לפרוק חד ערכי למכפלה של מספרים ראשוניים. כל פולינום נתן לפרוק חד ערכי למכפלה של פולינומים אי פריקים. שני המשפטים הם מקרה פרטי של משפט הפרוק החד ערכי למכפלה של אברים אי פריקים בחוג אוקילידי.

הגדרת חוג R. דגמאות: $\mathbb{Z}$, $K[X]$, $M_n(K)$, $\mathrm{Hom}(V,V)$.

$R^\times$ - חבורת האחדות של R.

תחום שלמות, שדה המנות של תחום שלמות. דגמאות: $\mathbb{Q}$ ו $K(X)$.

התחלקות בתחום שלמות R. חברות, אבר ראשוני, אבר אי פריק.

p ראשוני $\Longleftarrow$ p אי פריק.

יהיו $a_1,\ldots,a_n$ אברים בתחום שלמות R. אבר d מכֻנה מחלק משֻתף מרבי, אם $d|a_1,\ldots,a_n$ ואם $c|a_1,\ldots,a_n$ גורר ש $c|d$. אם קים אבר כזה, הוא יחיד עד כדי כפל באחדה.

אבר m של R מכֻנה **כפולה משֻתפת מזערית** אם $a_1,\ldots,a_n|m$ ואם $a_1,\ldots,a_n|m'$ גורר ש $m|m'$. אם קים אבר כזה, הוא יחיד עד כדי כפל באחדה.

הגדרה: תחום שלמות R נקרא **חוג בעל פריקות חד ערכית** אם כל אבר לא הפיך ב R נתן להצגה כמכפלה של אברים אי פריקים וההצגה הנה יחידה עד כדי סדר ועד כדי חברות. ∎

יהי R חוג בעל פריקות חד ערכית. אזי כל אבר אי פריק ב R הנו ראשוני.

נבחר קבוצת מיצגים S למחלקות החברות של האברים הראשוניים של R. כל אבר $a\in R$ נתן להצגה יחידה (עד כדי סדר הגורמים) כמכפלה

$$a = u\prod_{p\in S} p^{v_p(a)}$$

באשר $u\in R^\times$ ו $v_p(a)$ הנו מספר שלם השוה כמעט תמיד לאפס. בהצגה זו $a|b$ אם ורק אם $v_p(a)\le v_p(b)$ עבור כל $p\in S$.

מחלק משֻתף מרבי של אברים $a_1,\ldots,a_n$:

$$d = \gcd(a_1,\ldots,a_n) = \prod_{p\in S} p^{\min(v_p(a_1),\ldots,v_p(a_n))}$$

כפולה משֻתפת מרבית:

$$m = \mathrm{lcm}(a_1,\ldots,a_n) = \prod_{p\in S} p^{\max(v_p(a_1),\ldots,v_p(a_n)}$$

תחום שלמות R מכֻנה **חוג אוקלידי** אם קיֶמת פונקציה $d\colon R\smallsetminus\{0\}\to\{0,1,2,\ldots\}$ המקיֶמת:

$(1a)$ $d(a) \le d(ab)$ לכל $a, b \in R$ שונים מאפס.

$(1b)$ לכל $f, g \in R$ קימים q, r יחידים ב R כך ש $f = qg + r$ יתר על כן, אם $r \neq 0$, אזי $d(r) < d(g)$.

למה: *יהי R חוג אוקלידי ו a, b שני אברים המקימים $a|b$ ו $d(a) = d(b)$. אזי a ו b חברים.*

הוכחה: מחלקים את a ב b עם שארית. ∎

תוצאה: *יהי R חוג אוקלידי ו u אבר ב R. אזי $d(u) = d(1)$ אם ורק אם u הפיך.*

פרוק לגורמים: *כל אבר שונה מאפס בחוג אוקלידי נתן לפרוק למכפלה של אחדה וגורמים אי פריקים.*

הוכחה: אנדוקציה על $d(a)$. ∎

מתכון אוקלידס: *לכל שני אברים a, b שונים מאפס של חוג אוקלידי R קַים מחלק משֻתף מרבי d. יתר על כן, קימים $x, y \in R$ כך ש $d = ax + by$.*

הוכחה: אנדוקציה על $\min\big(d(a), d(b)\big)$. ∎

תוצאה: *כל אבר אי פריק p בחוג אוקלידי R הנו ראשוני.*

משפט הפריקות החד ערכית: *כל חוג אוקלידי הנו חוג בעל פריקות חד ערכית.*

חלֻקה עם שארית: *יהי a מספר טבעי ו b מספר שלם. אזי קימים q ו r שלמים יחידים המקַימים $b = qa + r$ ו $0 \le r < a$.*

במקרה שהחוג הנו $\mathbb{Z}$ אפשר לקחת את $d(a)$ כ $|a|$:

המשפט היסודי של תורת המספרים: *כל מספר טבעי נתן להצגה כמכפלה של מספרים ראשוניים והצגה זו היא יחידה עד כדי סדר הגורמים.*

דֻגמאות: *א. חוג מספרי גאוס $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ הנו חוג אוקלידי ולכן בעל פריקות חד ערכית. מגדירים $d(x+y\sqrt{-1}) = x^2+y^2$ (עמיצור, אלגברה לינארית, עמוד 228).*

ב. החוג $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ אינו בעל פריקות חד ערכית. בחוג זה יש ל 6 שני פרוקים שונים:

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$$

1. פריקות בחוגים אוקלידיים

כל מספר טבעי נתן לפרוק חד ערכי למכפלה של מספרים ראשוניים. כל פולינום נתן לפרוק חד ערכי למכפלה של פולינומים אי פריקים. שני המשפטים הם מקרה פרטי של משפט הפרוק החד ערכי למכפלה של אברים אי פריקים בחוג אוקילידי.

הגדרת חוג R. דגמאות: $\mathbb{Z}$, $K[X]$, $M_n(K)$, $\mathrm{Hom}(V,V)$.

$R^\times$ - חבורת האחדות של R.

תחום שלמות, שדה המנות של תחום שלמות. דגמאות: $\mathbb{Q}$ ו $K(X)$.

התחלקות בתחום שלמות R. חברות, אבר ראשוני, אבר אי פריק.

p ראשוני $\Longleftarrow$ p אי פריק.

יהיו $a_1,\ldots,a_n$ אברים בתחום שלמות R. אבר d מְכֻנֶה מחלק משֻתף מרבי, אם $d|a_1,\ldots,a_n$ ואם $c|a_1,\ldots,a_n$ גורר ש $c|d$. אם קים אבר כזה, הוא יחיד עד כדי כפל באחדה.

אבר m של R מְכֻנֶה **כפולה משֻתפת מזערית** *אם $a_1,\ldots,a_n|m$ ואם $a_1,\ldots,a_n|m'$ גורר ש $m|m'$. אם קים אבר כזה, הוא יחיד עד כדי כפל באחדה.*

הגדרה: תחום שלמות R נקרא **חוג בעל פריקות חד ערכית** אם כל אבר לא הפיך ב R נתן להצגה כמכפלה של אברים אי פריקים וההצגה הנה יחידה עד כדי סדר ועד כדי חברות. ∎

יהי R חוג בעל פריקות חד ערכית. אזי כל אבר אי פריק ב R הנו ראשוני.

נבחר קבוצת מיצגים S למחלקות החברות של האברים הראשוניים של R. כל אבר $a \in R$ נתן להצגה יחידה (עד כדי סדר הגורמים) כמכפלה

$$a = u\prod_{p\in S} p^{v_p(a)}$$

באשר $u \in R^\times$ ו $v_p(a)$ הנו מספר שלם השוה כמעט תמיד לאפס. בהצגה זו $a|b$ אם ורק אם $v_p(a) \le v_p(b)$ עבור כל $p \in S$.

מחלק משֻתף מרבי של אברים $a_1,\ldots,a_n$:

$$d = \gcd(a_1,\ldots,a_n) = \prod_{p\in S} p^{\min(v_p(a_1),\ldots,v_p(a_n))}$$

כפולה משֻתפת מרבית:

$$m = \mathrm{lcm}(a_1,\ldots,a_n) = \prod_{p\in S} p^{\max(v_p(a_1),\ldots,v_p(a_n)}$$

תחום שלמות R מְכֻנֶה **חוג אוקלידי** אם קיֶמת פונקציה $d\colon R\smallsetminus\{0\} \to \{0,1,2,\ldots\}$ המקיֶמת:

$(1a)$ $d(a) \le d(ab)$ לכל $a,b \in R$ שונים מאפס.

$(1b)$ לכל $f,g \in R$ קימים q,r יחידים ב R כך ש $f = qg + r$ יתר על כן, אם $r \neq 0$, אזי $d(r) < d(g)$.

למה: *יהי R חוג אוקלידי ו a,b שני אברים המקימים $a|b$ ו $d(a)=d(b)$. אזי a ו b חברים.*

הוכחה: מחלקים את a ב b עם שארית. ∎

תוצאה: *יהי R חוג אוקלידי ו u אבר ב R. אזי $d(u)=d(1)$ אם ורק אם u הפיך.*

פרוק לגורמים: *כל אבר שונה מאפס בחוג אוקלידי נתן לפרוק למכפלה של אחדה וגורמים אי פריקים.*

הוכחה: אנדוקציה על $d(a)$. ∎

מתכון אוקלידס: *לכל שני אברים a,b שונים מאפס של חוג אוקלידי R קַים מחלק משֻתף מרבי d. יתר על כן, קימים $x,y\in R$ כך ש $d=ax+by$.*

הוכחה: אנדוקציה על $\min\big(d(a),d(b)\big)$. ∎

תוצאה: *כל אבר אי פריק p בחוג אוקלידי R הנו ראשוני.*

משפט הפריקות החד ערכית: *כל חוג אוקלידי הנו חוג בעל פריקות חד ערכית.*

חלֻקה עם שארית: *יהי a מספר טבעי ו b מספר שלם. אזי קימים q ו r שלמים יחידים המקַימים $b=qa+r$ ו $0\le r<a$.*

במקרה שהחוג הנו $\mathbb{Z}$ אפשר לקחת את $d(a)$ כ $|a|$:

המשפט היסודי של תורת המספרים: *כל מספר טבעי נתן להצגה כמכפלה של מספרים ראשוניים והצגה זו היא יחידה עד כדי סדר הגורמים.*

דֻגמאות: *א. חוג מספרי גאוס $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ הנו חוג אוקלידי ולכן בעל פריקות חד ערכית. מגדירים $d(x+y\sqrt{-1})=x^2+y^2$ (עמיצור, אלגברה לינארית, עמוד 228).*

ב. החוג $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ אינו בעל פריקות חד ערכית. בחוג זה יש ל 6 שני פרוקים שונים:

$$6=2\cdot 3=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$$

2. חוג הפולינומים מעל שדה

פולינום במשתנה X מעל חוג R הנו בטוי פורמלי מהצורה $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ שבו ה a_i־ים שַיָכים ל R וכמעט כֻּלם אפס.

חבור פולינומים, כפל פולינומים, המעלה של פולינום. כתיבה מחדש של פולינום בצורה $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, פולינום מתֻקן.

הנֻסחה $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ עבור פולינומים מעל תחום שלמות R וגם עבור פולינומים מתֻקנים.

חוג הפולינומים $K[X]$ מעל שדה K הוא חוג אוקלידי ביחס לפונקציה $\delta(f) = \deg(f)$. כדי להוכיח את משפט החלוק עם השארית נתבונן בשני פולינומים $f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ עם $a_n \neq 0$ ו $g(X) = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$ עם $b_m \neq 0$. אם $n < m$ נרשם $f = 0 \cdot g + f$. אם $m \leq n$ יהי $f_1(X) = f(X) - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} g(X)$. אזי $\deg(f_1) \leq n-1$. אנדוקציה על n נותנת $q_1, r \in K[X]$ כך ש $f_1 = q_1 g + r$ ו $\deg(r) < \deg(g)$. הפולינום $q(X) = \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + q_1(X)$ יקים $f = qg + r$, כמבוקש.

שים לב לכך שמשפט החלוק עם שארית נכון גם עבור חוג פולינומים $R[X]$ שבו R הוא תחום שלמות כלשהוא בתנאי שמגבילים את המחולק g להיות פולינום מתֻקן (כלומר, במונחי הסעיף הקודם, $b_m = 1$).

משפט: *אם R תחום שלמות בעל פריקות חד ערכית, אזי גם $R[X_1, \ldots, X_n]$ הוא תחום שלמות בעל פריקות חד ערכית. בפרט $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ ו $K[X_1, \ldots, X_n]$ הם תחומי שלמות בעל פריקות חד ערכית.*

3. שרשים של פולינום

יהי $f(X)$ פולינום עם מקדמים בשדה K. אבר α של K יכונה **שרש** (root) של $f(X)$ אם $f(\alpha)=0$.

למה 3א: *יהי $f \in K[X]$ ויהי $\alpha \in K$. אזי α הוא שרש של f אם ורק אם $(X-\alpha)|f(X)$.*

הוכחה: הואיל והצבה של α בפולינומים שומרת על החבור והכפל, נובע מ $(X-\alpha)|f(X)$ ש $f(\alpha)=0$.

להפך, נניח ש $f(\alpha)=0$. חלוק של $f(X)$ ב $X-\alpha$ עם שארית נותן פולינומים $q, r \in K[X]$ כך ש

$$f(X) = q(X)(X-\alpha) + r(X) \tag{1}$$

ו $\deg(r) < \deg(X-\alpha)$. לכן $\deg(r)$ הנו 0 או $-\infty$. בכל מקרה $r \in K$. הצבה של α ב (1) נותנת $r=0$ ולכן $(X-\alpha)|f(X)$.

לחלופין, אם $f(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, אפשר לקבל תוצאה זו בעזרת פרוק לגורמים:

$$f(X) = f(X) - f(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_i(X^k - \alpha^k) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i X^{k-i-1}(X-\alpha) \quad \blacksquare$$

תוצאה 3ב:

(א) *לפולינום $f \in K[X]$ ממעלה n יש ב K לכל היותר n שרשים.*

(ב) *אם לפולינום ממעלה n בעל מקדם עליון a_n יש n שרשים שונים ב K והם $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, אזי $f(X) = a_n \prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$.*

הוכחה: הפעל אנדוקציה על n. $\blacksquare$

למה 3ג: *אם $f, g \in K[X]$ ואם g מחלק את f מעל שדה הרחבה L של K אזי g מחלק את f כבר ב $K[X]$.*

הוכחה: נניח ש $f = hg$ באשר $h \in L[X]$. כדי להוכיח ש $h \in K[X]$ נחלק את f ב g עם שארית: כלומר נמצא $q, r \in K[X]$ כך ש $f = qg + r$ ו $\deg(r) < \deg(g)$. לכן, $r = (h-q)g$. אלו היה $q \neq h$ היינו מקבלים ש $\deg(r) \geq \deg(g)$, בסתירה לבחירת r. לכן, $h = q \in K[X]$. $\blacksquare$

נגדיר **רבוי** (multiplicity) של שרש α של פולינום $f \in K[X]$ כמספר הטבעי הגדול ביותר k כך ש $(X-\alpha)^k|f(X)$. נאמר ש α הוא **שרש פשוט** (simple root) אם רבויו 1. במלים אחרות, $(X-\alpha)|f(X)$ אולם $(X-\alpha)^2 \nmid f(X)$. נאמר ש α הוא **שרש כפול** (double root) של f אם רבויו 2. לבסוף נאמר ש α הוא **שרש מֻרבה** (multiple root) אם רבויו לפחות 2.

אם L הוא שדה הרחבה של K ו $f \in K[X]$ אפשר לראות את f גם כפולינום עם מקדמים ב L. אם α הוא שרש של f ב K אין רבויו משתנה במעבר ל L. מושג הנגזרת של פולינום מאפשר לנו לבדק האם לפולינום נתון $f \in K[X]$ יש שרשים מֻרבים בשדה הרחבה של K.

מגדירים את **הנגזרת** (derivative) של פולינום $f(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ כפולינום

$$f'(X) = \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1}.$$

כללי הנגזרות הידועים מאנליזה נתנים לבדיקה באפן ישיר לפולינומים. יהיו $f, g \in K[X]$ ו $a \in K$. אזי:

(2א) $(af(X))' = af'(X)$,

(2ב) $(f(X) + g(X))' = f'(X) + g'(X)$,

(2ג) $(f(X)g(X))' = f(X)g'(X) + f'(X)g(X)$,

(2ד) אם האפיון של K שוה לאפס ו $f'(X) = 0$ אזי $f \in K$ קבוע.

(2ה) אם $\mathrm{char}(K) = p > 0$ אזי $f'(X) = 0$ אם ורק אם $f(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^{pi}$.

למה 3ד: *יהי $\alpha \in K$ שרש של פולינום $f \in K[X]$. אזי α הנו שרש מְרֻבֶּה אם ורק אם $f'(\alpha) = 0$.*

הוכחה: נניח קודם ש $f(X) = (X-\alpha)^k g(X)$ באשר $k \geq 2$. אזי

$$f'(X) = k(X-\alpha)^{k-1} g(X) + (X-\alpha)^k g'(X).$$

לכן $f'(\alpha) = 0$.

אם לעומת זאת α הנו שרש פשוט, אזי $f(X) = (X-\alpha)g(X)$ ו $g(\alpha) \neq 0$. לכן

$$f'(X) = g(X) + (X-\alpha)g'(X)$$

ו $f'(\alpha) = g(\alpha) \neq 0$. ∎

דוגמה 3ה: $\sqrt{-1}$ הוא שרש כפול של הפולינום $X^4 + 2X^2 + 1$. ∎

אפשר להוכיח שלכל פולינום $f \in K[X]$ ממעלה חיובית קים שדה הרחבה L של K שבו f מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים. בפרט כל שרשי f שיכים ל L. יתר על כן, אפשר להוכיח שקים ל K שדה הרחבה L שמעליו כל פולינום מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים. דהיינו, לא רק פולינומים עם מקדמים ב K מתפרקים מעל L לגורמים לינאריים אלא גם פולינומים עם מקדמים ב L עצמו מתפרקים מעליו לגורמים לינאריים. על שדה כזה אומרים שהוא **סגור אלגברית** (algebraically closed). לדגמה, $\mathbb{C}$ הוא שדה סגור אלגברית המרחיב את $\mathbb{Q}$. טענה אחרונה זו נקראת **המשפט היסודי של האלגברה** והוכחה לראשונה על ידי גאוס. כל הוכחותיה חורגות ממסגרת הקורס באלגברה לינארית.

נוסיף ונאמר שאפשר להוכיח שקים ל K שדה מזערי סגור אלגברית. כלומר, שדה סגור אלגברית $\tilde{K}$ המקיף את K ובעל התכונה הבאה: אם C הוא שדה סגור אלגברית המקיף את K אזי קים איזומורפיזם φ של $\tilde{K}$ לתוך C

כך ש $\varphi(a) = a$ לכל $a \in K$. שדה כזה נקבע באפן יחיד (עד כדי איזומורפיזם) ונקרא **הסגור האלגברי** (algebraic closure) של K.

המתכון של אוקלידס מאפשר לבדק האם לפולינום נתון ב $K[X]$ יש שרשים מְרֻבים בסגור האלגברי בלי לעזב את $K[X]$:

משפטון 13: *יהי $f \in K[X]$. אזי כל שרשי f ב $\tilde{K}$ פשוטים אם ורק אם* $\gcd(f, f') = 1$.

הוכחה: יהי $d = \gcd(f, f')$. אזי קימים $g, h \in K[X]$ כך ש $g(X)f(X) + h(X)f'(X) = d$.

אם $d = 1$ ו α הנו שרש של f ב $\tilde{K}$, אזי $f'(\alpha) \neq 0$. לכן, לפי למה 3ד, α הוא שרש פשוט.

להפך, אם $\deg(d) \geq 1$ אזי לפי הנאמר לעיל יש ל d שרש α ב $\tilde{K}$. שרש זה יאפס גם את f וגם את f'.

לכן, לפי למה 3ד, α הוא שרש מְרֻבה של f. ∎

אחת הדגמאות החשובות להרחבת שדות הנה $\mathbb{C}/\mathbb{R}$. לכל מספר מְרֻכב z נסמן ב $\bar{z}$ את הצמוד של z. נזכר שפעולת ההצמדה שומרת על הכפל ועל החבור, ושומרת על אברי $\mathbb{R}$ במקומם. לכן, אם $f \in \mathbb{R}[X]$ ואם z הוא שרש מְרֻכב של f גם $\bar{z}$ הוא שרש של f.

הואיל וכל פולינום ממעלה חיובית עם מקדמים מְרֻכבים מתפרק, לפי המשפט היסודי של האלגברה, למכפלה של גורמים לינאריים, הפולינומים האי פריקים ב $\mathbb{C}[X]$ הם הפולינומים הלינאריים. ב $\mathbb{R}[X]$ יש להוסיף עליהם עוד פולינומים רבועיים.

למה 3ז: *הפולינומים הממשיים האי פריקים הם הפולינומים הלינאריים והפולינומים הרבועיים*

$$aX^2 + bX + c$$

שבהם $b^2 - 4ac < 0$.

הוכחה: אם $f \in \mathbb{R}[X]$ אי פריק ומְתֻקן ממעלה ≤ 2 ואם z הוא שרש של f ב $\mathbb{C}$, אזי גם $\bar{z}$ הוא שרש שלו השונה מ z. לכן $(X - \bar{z})(X - z)$ הוא פולינום ממשי אי פריק המחלק את $f(X)$ ולכן שוה לו. ∎

תוצאה 3ח:

(א) *כל פולינום ממשי מתפרק ב $\mathbb{R}[X]$ למכפלה של גורמים לינאריים וגורמים רבועיים אי פריקים.*

(ב) *לכל פולינום ממשי ממעלה אי זוגית יש שרש ממשי.*

תרגיל 3ט: מצא את המחלק הגדול ביותר של זוגות הפולינומים הבאים מעל $\mathbb{Q}$:

(ט1) $X^3 - 6X^2 + X + 4$ ו $X^5 - 6X + 1$.

(ט2) $X^2 + 1$ ו $X^6 + X^3 + X + 1$.

תרגיל 3י: פולינום f ממעלה שלישית מעל שדה K הנו אי פריק אם ורק אם אין לו שרש ב K. תן דוגמה לכך שכלל זה אינו חל על פולינום ממעלה רביעית.

תרגיל 3יא: הוכח:

(יא1) X^2+X+1 אי פריק מעל $\mathbb{F}_2$.

(יא2) X^2+1 אי פריק מעל $\mathbb{F}_7$.

(יא3) X^3-9 אי פריק מעל $\mathbb{F}_{31}$.

(יא4) X^3-9 אי פריק מעל $\mathbb{F}_{11}$.

4. התאמה בין העתקות לינאריות לבין מטריצות

נעמד בסעיף זה על הקשר ההדוק בין העתקות לינאריות של מרחב וקטורי מממד n מעל שדה K לבין המטריצות מסדר $n \times n$ מעל K.

נגדיר איזומורפיזם של חוגים

$$\Phi\colon \mathrm{End}_K(V) \to M_n(K)$$

האיזומורפיזם תלוי בבחירה של בסיס $v_1, \ldots, v_n$ של V. עבור $T \in \mathrm{End}_K(V)$ יהי $A' = (a'_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ המטריצה ב $M_n(K)$ המוגדרת על ידי היחסים:

$$Tv_i = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij} v_j \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

יהי $A = (a_{ij})$ **המטריצה המוחלפת** של A', כלומר $a_{ij} = a'_{ji}$ לכל i ו j (נסמן $A = (A')^t$). נרשם את (1) גם בצורה

$$.Tv_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_j \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

נגדיר $\Phi(T) = A$ ונאמר ש $\Phi(T)$ הנה **המטריצה המתאימה ל** T **לפי הבסיס** $v_1, \ldots, v_n$. להפך, בהנתן המטריצה A ב $M_n(K)$ מגדיר (2) העתקה לינארית $T\colon V \to V$. לכן Φ הנה חד חד ערכית ועל. יתר על כן, Φ שומרת גם על החבור, על הכפל ועל הכפל באברי K. ואכן אם $S \in \mathrm{End}_K(V)$ הנו העתקה נוספת ו $Sv_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} v_j$ אזי

$$S(Tv_i) = S(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} S v_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \sum_{k=1}^{n} b_{kj} v_k = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} b_{kj} a_{ji}) v_k$$

$\sum_{j=1}^{n} b_{kj} a_{ji}$ הנו האבר ה־ki־י של המטריצה BA. לכן $\Phi(TS) = BA = \Phi(T)\Phi(S)$, כמבוקש.

יהי אפוא $A = \Phi(T)$ ו $f \in K[X]$. אזי $\Phi(f(T)) = f(A)$. בפרט, $f(T) = 0$ אם ורק אם $f(A) = 0$.

כדי שנוכל להשתמש בהתאמה בין העתקות לינאריות למטריצות ביעילות נסמן את $\Phi(T)$ גם ב $[T]_{\mathbf{v}}$. מה שהוכחנו מסתכם בסימונים אלו בכללים הבאים:

(3א) $[T]_{\mathbf{v}} = [S]_{\mathbf{v}}$ אם ורק אם $T = S$.

(3ב) $[T+S]_{\mathbf{v}} = [T]_{\mathbf{v}} + [S]_{\mathbf{v}}$,

(3ג) $[TS]_{\mathbf{v}} = [T]_{\mathbf{v}}[S]_{\mathbf{v}}$,

(ד3 $[\lambda T]_{\mathbf{v}} = \lambda [T]_{\mathbf{v}}$.

הבסיס $\mathbf{v}$ של V קובע גם איזומורפיזם $[w]_{\mathbf{v}} \mapsto w$ של V על K^n. אם $w = \sum_{i=1}^n b_i v_i$ אזי

$$[w]_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

איזומורפיזם זה מתקשר לאיזומורפיזם הקודם על ידי הכלל:

(4 $[Tw]_{\mathbf{v}} = [T]_{\mathbf{v}}[w]_{\mathbf{v}}$.

כלל זה נובע בסימונים דלעיל מהחשוב הבא:

$$Tw = \sum_{i=1}^n b_i T v_i = \sum_{i=1}^n b_i \sum_{j=1}^n a_{ji} v_j = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n a_{ji} b_i) v_j$$

מקרה פרטי אחד של התאמת מטריצות להעתקות יהיה חשוב לשמושים. נראה את המרחב $V = K^n$ כמרחב של עמודות מארך n. למרחב זה בסיס **טבעי**, $e_1, \dots, e_n$, באשר e_i הנו העמודה שבה 1 במקום ה־i־י ו 0 בשאר המקומות. יהי $A = (a_{ij})$ מטריצה ב $M_n(K)$. יהי T ההעתקה הלינארית של V המוגדרת על ידי $Tv = Av$. אזי

$$Te_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j$$

לכן A הנה המטריצה המתאימה ל T לפי הבסיס $e_1, \dots, e_n$.

נבחן עתה את התלות של Φ בבסיס. יהי $w_1, \dots, w_n$ בסיס נוסף ל V. אזי קימים $p_{ij} \in K$ כך ש

$$w_i = \sum_{j=1}^n p_{ji} v_j \qquad i = 1, \dots, n$$

$P = (p_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ תקרא **מטריצת המעבר** מ $v_1, \dots, v_n$ ל $w_1, \dots, w_n$. יהי $Tw_i = \sum_{j=1}^n b_{ji} w_j$, $i = 1, \dots, n$. נסמן $B = (b_{ij})$. אזי $B = [T]_{\mathbf{w}}$. את Tw_i אפשר לחשב בשני אפנים שונים:

$$Tw_i = \sum_{j=1}^n p_{ji} T v_j = \sum_{j=1}^n p_{ji} \sum_{k=1}^n a_{kj} v_k = \sum_{k=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{kj} p_{ji}) v_k$$

$$Tw_i = \sum_{j=1}^n b_{ji} w_j = \sum_{j=1}^n b_{ij} \sum_{k=1}^n p_{kj} v_k = \sum_{k=1}^n (\sum_{j=1}^n p_{kj} b_{ji}) v_k$$

לכן $AP = PB$, $B = P^{-1}AP$, ולכן

$$[T]_{\mathbf{w}} = P^{-1}[T]_{\mathbf{v}}P. \tag{5}$$

להפך, אם P היא מטריצה הפיכה המקימת את (4), ו $w_1, \dots, w_n$ מוגדר על ידי (5), אזי $B^t = [T]_{\mathbf{w}}$.

אנו נאמר שמטריצות $A, B \in M_n(K)$ **צמודות זו לזו** (או **דומות זו לזו**) אם קימת מטריצה הפיכה $P \in M_n(K)$ כך ש $B = P^{-1}AP$.

הלמה הבאה מסכמת את הדיון:

למה 4א: *יהי T העתקה לינארית של מרחב וקטורי V לתוך עצמו מעל שדה K. אזי כל המטריצות המיצגות את T צמודות זו לזו. להפך, אם מטריצות צמודות זו לזו, הן מיצגות את אותה ההעתקה.*

מטרתנו תהיה אפוא למצא עבור העתקה לינארית נתונה בסיס כזה כך שהמטריצה המתאימה להעתקה תהיה פשוטה ככל האפשר. לחלופין, בהנתן מטריצה, נחפש לה מטריצה צמודה פשוטה ככל האפשר.

תרגיל 3ב: ודא באפן ישיר ש $Ae_i = e_{i+1}$ עבור $i = 0, 1, \dots, d-1$ ו $Ae_d = -a_0e_1 - \cdots - a_de_d$.

∎

תרגיל 3ג: יהיו $B = \mathrm{Diag}(B_1, B_2, \dots, B_m)$ ו $B' = \mathrm{Diag}(B_1', B_2', \dots, B_m')$ מטריצות גושים אלכסוניות. הוכח שאם B_i צמודה ל B_i' עבור $i = 1, \dots, m$ אזי B צמודה ל B'.

תרגיל 3ד: נתבונן במטריצת גושים אלכסונית $B = \mathrm{Diag}(B_1, B_2, \dots, B_m)$. יהי π תמורה של $1, 2, \dots, m$. הוכח ש B צמודה ל $B' = \mathrm{Diag}(B_{\pi(1)}, B_{\pi(2)}, \dots, B_{\pi(m)})$.

תרגיל 4ה: תהי $P\colon V \to V$ **הטלה** של מרחב וקטורי V ממימד n, כלומר P היא העתקה לינארית המקימת $P^2 = P$. הוכח ש $V = \mathrm{Ker}(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$. הראה שקים ל V בסיס כך שהמטריצה המתאימה ל P לפיהו תהיה מטריצה אלכסונית מהצורה $\mathrm{Diag}(0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1)$. כמה 0־ים וכמה 1־ים נמצאים באלכסון של מטריצה זו?

תרגיל 4ו: נתבונן במישור $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$.

(1) השלם את $v_1 = (1, -1, 1)$ לבסיס v_1, v_2, v_3 של $\mathbb{R}^3$ כך ש $v_2, v_3 \in U$.

(2) נצל בסיס זה כדי למצא הטלה $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ כך ש $\mathrm{Ker}(P)$ נפרש על ידי v_1.

(3) חשב את המטריצה A המתאימה ל P לפי בסיס זה.

(4) חשב את המטריצה B המתאימה ל P לפי הבסיס הטבעי.

(5) מצא מטריצה הפיכה C כך ש $A = C^{-1}BC$.

תרגיל 14: תהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית של מרחב וקטורי V המקימת $T^2 = I$. השתמש בתרגיל 14 כדי להוכיח שקים בסיס כך שהמטריצה המיצגת את T לפי בסיס זה הנה מטריצה אלכסונית מהצורה $\mathrm{Diag}(-1,-1,\ldots,-1,1,1,\ldots,1)$. רמז: $P = \frac{I-T}{2}$ היא הטלה.

5. ערכים עצמיים ווקטורים אָפיניים

יהי V מרחב וקטורי ממַמד n מעל שדה K ויהי $T\colon V\to V$ העתקה לינארית. אנו רוצים למצא בסיס של V כך שהמטריצה המתאימה ל T ביחס אליו פשוטה ככל האפשר. הטוב ביותר הוא להגיע למטריצה אלכסונית, אחרת מסתפקים במטריצה משֻׁלשית.

אבר λ של K מכֻנה **ערך עצמי** של T אם קים $v\in V$ שונה מאפס כך ש $Tv\subseteq\lambda v$. הוקטור v עצמו נקרא **וקטור אָפיני** של T **השיך** ל λ.

נשים לב ש v הנו וקטור אָפיני של T אם ורק אם $T\langle v\rangle=\langle v\rangle$.

לכל $\lambda\in K$ נסמן $V_\lambda=\{v\in V\mid Tv=\lambda v\}$. זהו מרחב וקטורי. λ הנו ערך עצמי של T אם ורק אם $V_\lambda\neq 0$. הממד של $V_\lambda\neq 0$ מכֻנה **הרִבּוי הגאומטרי** של λ.

אסף האברים של V_λ השונים מאפס הם הוקטורים האָפיניים של T השיכים ל λ.

אם $v_1,\dots,v_n$ הנו בסיס של V המֻרכב מוקטורים אָפיניים, אזי $[T]_{\mathbf{v}}$ הנה מטריצה אלכסונית, ולהפך. במקרה זה נאמר ש T **נִתֶּנֶת ללכסון**.

דגמה 5א: יהי $T\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ טרנספורמצית השִׁקּוף ביחס לישר $Y=X$. דהיינו, $T(x,y)=(y,x)$. הערכים העצמיים של T הם $1,-1$. מרחבי הוקטורים המתאימים להם הם הישרים $Y=X$ ו $Y=-X$. ∎

למה 5ב: *יהיו $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ ערכים עצמיים שונים זה מזה של T.*

(א) *לכל i יהי v_i וקטור עצמי של T השיך ל λ_i. אזי $v_1,\dots,v_m$ אינם תלויים לינארית.*

(ב) *לכל i יהיו $v_{i1},\dots,v_{il_i}$ וקטורים ב V_{λ_i} שאינם תלויים לינארית. אזי הוקטורים v_{ij}, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,l_i$ אינם תלויים לינארית.*

(ג) *נניח בסימונים של (ב), ש $\sum_{i=1}^m\dim(V_{\lambda_i})=n$. אזי הוקטורים v_{ij} מהוים בסיס של V.*

דגמה 5ג: יהי $V=C^\infty(\mathbb{R})$ מרחב כל הפונקציות הממשיות הגזירות אינסוף פעמים ויהי $D\colon V\to V$ העתקת הגזירה. לכל $\lambda\in\mathbb{R}$ הפונקציה $e^{\lambda t}$ הנה וקטור אָפיני של D. השיך ל λ. בפרט, אם $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ הם מספרים ראשוניים שונים זה מזה, אזי, לפי למה 5ב(א), הפונקציות $e^{\lambda_1 t},\dots,e^{\lambda_m t}$ אינן תלויות לינארית מעל $\mathbb{R}$. ∎

תוצאה 5ד:

(א) *ל T יש לכל היותר n ערכים עצמיים שונים.*

(ב) *אם ל T יש n ערכים עצמיים שונים, אזי T נתנת ללכסון.*

דגמה 5ה: בדגמה 5א נבחר בסיס $(1,1),(1,-1)$ עבור $\mathbb{R}^2$. המטריצה המיצגת את T ביחס לבסיס זה הנה $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. ∎

תוצאה 5ו:

(א) *סכום הרבויים הגאומטריים של הערכים העצמיים השונים של T אינו עולה על n.*

(ב) *תנאי הכרחי ומספיק לכך ש T נתנת ללכסון הוא שסכום הערכים העצמיים של ערכיה העצמיים הנו n.*

תהי $A \in M_n(K)$ מטריצה. אבר λ של K מכֻנה **ערך עצמי** של A אם קים

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in K^n$$

שונה מאפס כך ש $A\tilde{x} = \lambda\tilde{x}$. $\tilde{x}$ נקרא **וקטור אָפיני** של A השיך ל λ.

תוצאה 5ז: *יהי $v_1, \ldots, v_n$ בסיס של V.*

(א) *ל T ול $[T]_{\mathbf{v}}$ יש אותם ערכים אָפיניים.*

(ב) *יהי λ ערך עצמי של T ויהי w וקטור שונה מאפס ב V. אזי w שיך ל λ אם ורק אם $[w]_{\mathbf{v}}$ שיך ל $[T]_{\mathbf{v}}$.*

תוצאה 5ח: *למטריצות דומות יש אותם ערכים עצמיים.*

תוצאה 5ט: *מטריצה $A \in M_n(K)$ דומה למטריצה אלכסונית (במקרה זה אומרים ש A **נתנת ללכסון**) אם ורק אם סכום הרבויים הגאומטריים של ערכיה העצמיים שוה ל n. בפרט, אם יש ל A n ערכים עצמיים, אזי A דומה למטריצה אלכסונית.*

בעיה 5י: נניח ש $A \in M_n(K)$ נתנת ללכסון, כלומר קימת מטריצה הפיכה $P \in M_n(K)$ כך ש $D = P^{-1}AP$ אלכסונית. מצא את **המטריצה המלכסנת** P ואת המטריצה האלכסונית D. ∎

פתרון חלקי: נניח שמצאנו בסיס $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n$ ל K^n המֻרכב מוקטורים אפיניים של A. לכל j יהי λ_j הערך העצמי של A המתאים ל $\tilde{p}_j$. אזי $P = (\tilde{x}_1 \ \ldots \ \tilde{x}_n)$ ו $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. ואכן, $AP = PD$.

כדי למצא את λ_j ואת הוקטורים $\tilde{x}_j$ יש לפתֹר מערכות משואות. זאת נשתדל לעשות בסעיף הבא. ∎

דגמה 5יא: המטריצה להעתקת השקוף בדֻגמה 5א המתאימה לבסיס הטבעי $(1,0), (0,1)$ של $\mathbb{R}^2$ היא $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. ערכים אָפיניים ש A הם $1, -1$ ווקטורים אפיניים מתאימים הם $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ו $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. לכן, $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ו $D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. ∎

5. הפולינום האָפְיני של מטריצה

יהי K שדה ו $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ מטריצה ב $M_n(K)$. **הפולינום האָפיני** (characteristic polynomial) של A מֻגדר כדטרמיננטה

$$f_A(X) = \det(XI - A)$$

באשר X משתנה סקלרי ו I מטריצת היחידה מסדר $n\times n$. ביתר פרוט:

$$f_A(X) = \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & X - a_{nn} \end{vmatrix}$$

זהו פולינום מתֻקן ממעלה n:

$$f_A(X) = X^n - t_{n-1}X^{n-2} + t_{n-2}X^{n-2} + \cdots + (-1)^n t_0$$

שבו $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn} = t_{n-1}$ הנו העִקבה של A ו ו $t_0 = \det(A)$ הנו הדטרימיננטה שלה. באפן כללי, t_{n-i} שוה ל $(-1)^i$ כפול סכום של המינורים של A מסדר i.

נזכיר שלשה מכללי העִקבה:

$$\mathrm{tr}(aA) = a\mathrm{tr}(A)$$

$$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$$

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

דגמה 6א: $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ הנו הפולינום האָפיני של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

הוכחה באנדוקציה על n. מפתחים את הדטרימננטה $\det(XI - A)$ לפי העמודה הראשונה. ∎

משפט 6ב: *אבר λ של K הנו ערך עצמי של מטריצה A אם ורק אם λ הנו שרש של הפולינום האָפיני של A. יתר על כן, V_λ הנו מרחב הפתרונות של מערכת המשואות ההומוגנית $(\lambda I - A)\tilde{x} = 0$, באשר $\tilde{x}$ הוא עמודה מגֹבה n של משתנים.*

תוצאה 6ג: *למטריצות דומות יש אותו פולינום אָפיני ולכן גם אותה הדטרמיננטה ואותה העקבה. בפרט, אם מטריצה A דומה למטריצה אלכסונית D, אזי האברים העומדים באלכסון D הם הערכים העצמיים של A.*

תוצאה 6ד: *אם הערכים העצמיים של מטריצה $A \in M_n(K)$ אינם שיכים ל K, אין A דומה למטריצה אלכסונית מעל K.*

יהיו V מרחב וקטורי ממּמד n מעל K ו $T\colon V \to V$ העתקה לינארית. נבחר בסיס $v_1, \dots, v_n$ של V ונגדיר את הפולינום האפיני של T בעזרת הנֻסְחה

$$f_T(X) = f_{[T]_{\mathbf{v}}}(X)$$

שנוי בסיס מעביר את $[T]_{\mathbf{v}}$ למטריצה דומה ולכן אינו משנה את הפולינום האפיני. לכן, $f_T(X)$ מֻגְדר היטב.

דגמה 6ה: יהיו $a_0, \dots, a_{n-1}$ אברים של K ונגדיר $T\colon V \to V$ על ידי

$$Tv_1 = v_2,\ Tv_2 = v_3,\ \dots,\ Tv_{n-1} = v_n,\ Tv_n = -a_0v_1 - \cdots - a_{n-1}v_n$$

אזי

$$[T]_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

זוהי המטריצה המֻחְחלפת של המטריצה המופיעה בדגמה 6א. לכן, $f_T(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$.

∎

7. לכסון מטריצה

במשפטים שהוכחנו עד עתה ישנם יסודות חשובים אשר נהפכם כאן למתכונים ללכסון מטריצות.

7א. מתכון ללכסון מטריצות: יהי A מטריצה ב $M_n(K)$. כדי למצא האם A צמודה למטריצה אלכסונית D ובמקרה זה למצא מטריצה הפיכה $P \in M_n(K)$ כך ש $P^{-1}AP = D$, פעל לפי ההוראות הבאות:

(א) חשב את הפולינום האפיני של המטריצה: $f_A(X) = \det(XI - A)$.

(ב) פתר את המשואה $f_A(X) = 0$. אם לא כל שרשי המשואה שיכים ל K, אין A צמודה למטריצה אלכסונית (תוצאה 6ד). אחרת, יהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ השרשים השונים של המשואה. אלו יהיו הערכים העצמיים השונים של A. כלם שיַכים ל K.

(ג) לכל i חשב בסיס למרחב הוקטורים העצמיים V_{λ_i} על ידי פתרון מערכת המשואות ההומוגנית (הסנגולרית) $(\lambda_i I - A)(\mathbf{X}) = 0$.

(ד) אם $\sum_{i=1}^m \dim(V_{\lambda_i}) < n$ אין A צמודה למטריצה אלכסונית (תוצאה 5וב). אחרת אחוד הבסיסים של ה־V_{λ_i}־ים מהוה בסיס $v_1, \ldots, v_n$ של K^n המורכב מוקטורים עצמיים של A (למה 5ב(ג)), $Av_i = \mu_i v_i$ (כל אחד מה־μ_i־ים שוה לאחד ה־λ_j־ים). נצרף את הוקטורים (שהם עמודות בארך n) למטריצה $P = (v_1\ v_2\ \cdots\ v_n)$. זוהי מטריצה הפיכה המקימת

$$P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \qquad \blacksquare$$

דגמה 7ב: הערכים העצמיים של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ הם $\pm\sqrt{-1}$. לכן, A אינה נתנת ללכסון מעל $\mathbb{R}$. בסיס ל $V_{\sqrt{-1}}$ מעל $\mathbb{C}$ הנו $\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{-1} \end{bmatrix}$. בסיס ל $V_{-\sqrt{-1}}$ מעל $\mathbb{C}$ הנו $\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{-1} \end{bmatrix}$. לכן, $P^{-1}AP = D$ באשר

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{-1} & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}$$

דגמה 7ג: מטריצות מסדר 2×2. הפולינום האפיני של מטריצה $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ הנו

$$f_A(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A).$$

כדי לפתר את המשואה הרבועית $f_A(X) = 0$ נחשב את הדסקרימיננטה: $\mathrm{Disc}(f_A) = (a-d)^2 + 4bc$ נבחין בין שלשה מקרים:

מקרה א: $\mathrm{Disc}(f_A)$ *אינו רבוע ב* K. במקרה זה שרשי המשואה אינם שיכים ל K ולכן, לפי (ב), אין A דומה (מעל K) למטריצה אלכסונית.

מקרה ב: $\mathrm{Disc}(f_A) = e^2$ *הוא רבוע שונה מאפס ב* K. במקרה זה יש ל $f_A(X)$ שני שרשים שונים ב K:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a + d \pm e).$$

עבור $i = 1, 2$ שוה דרגת המטריצה $\left(\begin{smallmatrix} \lambda_i - a & -b \\ -c & \lambda_i - d \end{smallmatrix}\right)$ ל 1. וקטור עצמי של A השיך ל λ_i יהי למשל $\left(\begin{smallmatrix} b \\ \lambda_i - a \end{smallmatrix}\right)$. המטריצה המלכסנת המתאימה תהיה $P = \left(\begin{smallmatrix} b & b \\ \lambda_1 - a & \lambda_2 - a \end{smallmatrix}\right)$. היא תקים $AP = P\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$ ולכן $P^{-1}AP = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$.

מקרה ג: $\mathrm{Disc}(f_A) = 0$. במקרה זה יש ל $f_A(X)$ שרש אחד בלבד: $\lambda = \frac{1}{2}(a + d)$. ממד המרחב

$$V_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K^2 \,\Big|\, (\lambda I - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

הוא 1 או 2, בהתאם לדרגת $\lambda I - A$.

מקרה ג1: $\mathrm{rank}\left(\begin{smallmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{smallmatrix}\right) = 0$. במקרה זה $\dim(V_\lambda) = 2$. לכן $V_\lambda = K^2$. נבחר ל V_λ את הבסיס הטבעי. P תהיה מטריצת היחידה ו $A = P^{-1}AP = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ היא מטריצה אלכסונית.

מקרה ג2: $\mathrm{rank}\left(\begin{smallmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{smallmatrix}\right) = 1$. במקרה זה $\dim(V_\lambda) = 1$. לפי (ד) אין A דומה למטריצה אלכסונית. אולם אם נבחר וקטור שונה מאפס $\left(\begin{smallmatrix} p_1 \\ p_2 \end{smallmatrix}\right) \in V_\lambda$ ונשלים אותו לבסיס ל K^2 על ידי וקטור $\left(\begin{smallmatrix} q_1 \\ q_2 \end{smallmatrix}\right)$ נקבל מטריצה הפיכה $P = \left(\begin{smallmatrix} q_1 & p_1 \\ q_2 & p_2 \end{smallmatrix}\right)$. יתקים

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} &= \alpha\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} &= \qquad\qquad \lambda\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

הואיל והמטריצה $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ מיצגת את A ביחס לבסיס נוסף, הפולונם האפיני שלה, $(X - \alpha)(X - \lambda)$ שוה ל $f_A(X)$. לכן $\alpha = \lambda$. מכאן נובע ש

$$A\begin{pmatrix} q_1 & p_1 \\ q_2 & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda q_1 + \beta p_1 & \lambda p_1 \\ \lambda q_2 + \beta p_2 & \lambda p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & p_1 \\ q_2 & p_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \beta & \lambda \end{pmatrix}$$

כלומר $P^{-1}AP = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ \beta & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ הוא מטריצה מְשֻלשית. הואיל ו A אינה דומה למטריצה אלכסונית, $\beta \neq 0$. נוכל אפוא להחליף את $\left(\begin{smallmatrix} p_1 \\ p_2 \end{smallmatrix}\right)$ ב $\left(\begin{smallmatrix} \beta p_1 \\ \beta p_2 \end{smallmatrix}\right)$ כדי לקבל ש $P^{-1}AP = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$. ∎

דוגמה 77: בפרט נקבל שמטריצה $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ נתנת ללכסון אם רק אם $a \neq d$ או $a = d$ ו $c = 0$. ∎

8. הפולינום המזערי של מטריצה

תהי A מטריצה מסדר $n \times n$ מעל שדה K. בנוסף לפולינום האָפיני שהתאמנו ל A בסעיף 6, נתאים בסעיף זה "פולינום מזערי". נעמד על הקשר בין שני הפולינומים ונוכיח ש A נתנת ללכסון מעל K אם ורק אם הפולינום המזערי מתפרק מעל K למכפלה של פולינומים לינאריים.

יהי $f(X) = \sum_{i=1}^n c_i X^i$ פולינום עם מקדמים ב K. נגדיר $f(A) = \sum_{i=1}^n c_i A^i$ (באשר $A_0 = I$ היא מטריצה היחידה מסדר $n \times n$). ההעתקה $f(X) \mapsto f(A)$ שומרת על החבור ועל הכפל. במלים אחרות היא מהוה הומומורפיזם של חוגים $K[X] \to M_n(K)$. יתר על כן, היא שומרת גם על הכפל באברי K. אם $f(A) = 0$, נאמר ש A מאפס את $f(X)$.

אפשר לראות את $M_n(K)$ כמרחב וקטורי ממַמד n^2 מעל K. לכן המטריצות A^i, $i = 0, \ldots, n^2$, תלויות לינארית מעל K. במלים אחרות, קימים $c_0, \ldots, c_{n^2}$ כך ש $\sum_{i=0}^{n^2} c_i X^i = 0$ נסמן $h(X) = \sum_{i=0}^{n^2} c_i X^i$ ונקבל ש $h(A) = 0$.

נסמן ב $m_A(X)$ את הפולינום המתֻקן בעל המעלה המזערית ש A מאפס. נקרא לו **הפולינום המזערי** של A. הלמה הבאה מוכיחה שהשמוש בְּ ה הידוע מֻצדק.

למה 8א: *הפולינום המזערי של מטריצה רבועית A מחלק כל פולינום אחר ש A מאפס. בפרט $m_A(X)$ הוא הפולינום המתֻקן היחיד ממעלה מזערית ש A מאפס.*

הוכחה: השתמש במשפט החלוק עם שארית. ∎

למה 8ב: *למטריצות דומות יש אותו פולינום מזערי.*

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה K ותהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית. הואיל ו $\mathrm{Hom}(V,V)$ הוא מרחב וקטורי מעל K ממַמד n מאפסת T פולינום ממעלה n^2. נסמן ב $m_T(X)$ את הפולינום המתֻקן ממעלה מזערית ש T מאפס. אזי, כמו בלמה 8א, $m_T(X)$ מחלק כל פולינום ש T מאפס. לכן, מֻצדק לקרא ל $m_T(X)$ **הפולינום המזערי** של T.

יהי עתה $v_1, \ldots, v_n$ בסיס של V. לפי סעיף 4, ההעתקה $T \mapsto [T]_{\mathbf{v}}$ שומרת על החבור, הכפל, והכפל בסקלר. לכן, לכל פולינום $f \in K[X]$ מתקיֵם $[f(T)]_{\mathbf{v}} = f([T]_{\mathbf{v}})$. בפרט, T מאפס את $f(X)$ אם ורק אם $[T]_{\mathbf{v}}$ מאפס את $f(X)$. מכאן ש $m_T(X) = m_{[T]_{\mathbf{v}}}(X)$.

דגמאות 8ג:

(א) תהי I מטריצת היחידה מסדר $n \times n$. אזי $f_A(X) = (X-1)^n$ ו $m_A(X) = X - 1$.

(ב) המטריצה $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ מקימת $A^2 = A$. לכן $m_A(X) = f_A(X) = X^2 - X$.

(ג) המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מקיֶמת $A^2 = A$*. לכן,* $m_A(X) = X^2 - X$ ו $f_A(X) = (X-1)X^2$.

(ד) המטריצה $A = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$ *מיַצגת סִבוּב המישור בזוית* $\frac{2\pi}{3} = 120^0$ *סביב הראשית במגמה חיובית ביחס לבסיס הטבעי. לכן* $A^3 = I$*. בפרט* $m_A(X) | X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$. A *אינה מאפסת את* $X - 1$ *אולם* $A^2 + A + I = 0$*. לכן* $m_A(X) = X^2 + X + 1 = f_A(X)$. ∎

הקדמה להוכחת משפט Cayley-Hamilton.

נתבונן בחוג המטריצות $M_n(K[X])$ **מסדר** $n \times n$ **מעל** $K[X]$ **ובחוג הפולינומים** $M_n(K)[X]$ **במשתנה** X **מעל** $M_n(K)$.

למה 8ד: *קים איזומורפיזם טבעי של חוגים*

$$\varphi \colon M_n(K[X]) \to M_n(K)[X]$$

$$\big(f_{ij}(X)\big) \mapsto \sum_{k=1}^{r} A_k X^k$$

$$f_{ij}(X) = \sum_{k=1}^{r} a_{ijk} X^k \qquad A_k = (a_{ijk})_{i,j=1}^{n}$$

דגמה 8ה:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X^2 + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2X + 1 & -1 \\ 2X - 3 & -X^2 + 2 \end{pmatrix}$$

למה 8ו: *יהיו* R *חוג עם יחידה (לאו דוקה חלופי),* $g \in R[X]$ ו $a \in R$. אזי $g(a) = 0$ אם ורק אם קים $h \in R[X]$ כך ש $g(X) = h(X)(X - a)$.

הוכחה: נניח ש $g(X) = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i$. אזי

$$\begin{aligned} g(X) - g(a) &= \sum_{i=0}^{n} c_i X^i - \sum_{i=0}^{n} c_i a^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} c_i (X^i - a^i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} c_i (X^{i-1} + aX^{i-2} + \cdots + a^{i-1})(X - a) \\ &= h(X)(X - a) \end{aligned}$$

כלומר, $g(X)=h(X)(X-a)+g(a)$ באשר $h(X)$ הנו פולינום ממעלה $n-1$.

אם $g(a)=0$, אזי $g(X)=h(X)(X-a)$.

להפך, נניח שקים $q\in R[X]$ כך ש

$$g(X)=q(X)(X-a).$$

לכן,

$$(q(X)-h(X))(X-a)=g(a).$$

משויון זה נובע ש $q(X)-h(X)=0$. לכן $g(a)=0$, כמבֻקש. ∎

הערה 8ז: יתכן ש $g(X)g(X)=h(X)$ עבור פולינומים ב $R[X]$ אולם $f(a)g(a)\neq h(a)$. ואכן, אם $ab\neq ba$ ו $f(X)=g(X)=X-b$, אזי $(X+b)^2=X^2=2bX+b^2$ אולם $(a+b)^2\neq a^2+2ba+b^2$.
∎

תוצאה 8ח: *יהי* $g\in M_n(K)[X]$ *פולינום ותהי* $A\in M_n(X)$ *מטריצה. אזי* $g(A)=0$ *אם ורק אם קים* $h\in M_n(K)[X]$ *כך ש* $g(X)=h(X)(XI-A)$.

דטרמיננטות מעל $K[X]$: אם $A\in M_n(K[X])$ אזי $\det(A)\in K[X]$, $\tilde{A}\in K[X]$ (המטריצה המצֹרפת) ו $\tilde{A}A=A\tilde{A}=\det(A)I$. ∎

משפט 8ט (Cayley-Hamilton): *כל מטריצה* $A\in M_n(K)$ *מאפסת את הפולינום האָפיני שלה. במלים אחרות,* $f_A(A)=0$.

הוכחה: יהי $f_A(X)=\det(XI-A)=\sum_{i=1}^n c_iX^i$. נפעיל את נֻסחת המטריצה המצֹרפת על המטריצה $XI-A\in M_n(K[X])$:

$$(\widetilde{XI-A})(XI-A)=\det(XI-A)I$$

זהו שויון בחוג $M_n(K[X])$. נתרגמו לשויון ב $M_n(K)[X]$ לפי למה 8ד:

$$H(X)(XI-A)=\sum_{i=0}^n(c_iI)X^i$$

מלמה 8ה נובע ש $f_A(A)=\sum_{i=0}^n c_iA^i=0$, כפי שטענו. ∎

הצרוף של למה 8א ומשפט Cayley-Hamilton נותן:

תוצאה 8י: *הפולינום המזערי של מטריצה $A \in M_n(K)$ מחלק את הפולינום האָפְיני שלה.*

המשפט הבא משלים את תוצאה 8י.

משפט 8יא: *הפולינום האפיני של מטריצה $A \in M_n(K)$ מחלק חזקה של הפולינום המזערי שלה.*

הוכחה: יהי $m_A(X) = \sum_{i=0}^m b_i X_i$. נראה את $m_A(X)$ גם כפולינום $\sum_{i=0}^m b_i I X^i$ של $M_n(K)[X]$. הואיל ו A מאפסת פולינום זה, קים לפי תוצאה 8ח פולינום $H \in M_n(K)[X]$ כך ש

$$.H(X)(XI - A) = \sum_{i=0}^m (b_i I) X^i \qquad (1)$$

למה 8ד מאפשרת לנו לראות את (1) גם כשויון ב $M_n(K[X])$:

$$.H(X)(XI - A) = m_A(X) I \qquad (2)$$

חשוב הדטרמיננטה בשני האגפים של (2) נותן פולינום $h(X) = \det(H(X))$ ב $K[X]$ המקיֵם

$$.h(X) f_A(X) = m_A(X)^n \qquad \blacksquare$$

צרוף תוצאה 8י ומשפט 8יא נותן:

תוצאה 8יב: *לפולינום האפיני של מטריצה $A \in M_n(K)$ ולפולינום המזערי שלה יש אותם השָרשים. אלו הם הערכים האפיניים של A.*

דגמה 8יג: הפולינום האפיני והפולינום המזערי של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

הם $f_A(X) = (X-1)(X-2)^2$ ו $m_A(X) = (X-1)(X-2)$. $\blacksquare$

ברצוננו עתה להוכיח שתנאי הכרחי ומספיק לכך שמטריצה $A \in M_n(K)$ נתנת ללכסון מעל K הוא שכל הערכים העצמיים שלה שיַכים ל K, לשם כך עלינו להוכיח תחילה את התוצאה הבאה:

משפט 8יד (Silvester): *יהי V מרחב וקטורי ממֵמד n מעל K ותהיינה $T_1, T_2 \colon V \to V$ העתקות לינאריות. אזי* $\dim(\mathrm{Ker}(T_1 T_2)) \le \dim(\mathrm{Ker}(T_1)) + \dim(\mathrm{Ker}(T_2))$.

הוכחה: נשים לב לכך ש $\mathrm{Ker}(T_2) \subseteq \mathrm{Ker}(T_1 T_2)$ ו $T_2(\mathrm{Ker}(T_1 T_2)) \subseteq \mathrm{Ker}(T_1)$. נבחר בסיס $v_1, \ldots, v_k$ ל $\mathrm{Ker}(T_2)$ ונשלים אותו לבסיס $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_l$ ל $\mathrm{Ker}(T_1 T_2)$. אזי

$$.T_2 v_{k+1}, \ldots, T_2 v_l \in \mathrm{Ker}(T_1)$$

יתר על כן, $T_2v_{k+1},\dots,T_2v_l$ אינם תלויים לינארית. לכן, $l-k \le \dim(\mathrm{Ker}(T_1))$. ∎

יהי λ ערך עצמי של מטריצה $A \in M_n(K)$. לפי משפט 6ב, $f_A(\lambda)=0$. לכן, $X-\lambda$ מחלק את $f_A(X)$. **הרבוי האלגברי** של λ יהיה המעריך המרבי r שעבורו $(X-\lambda)^r|f_A(X)$. הוא מקֵים $1 \le r \le n$. אם כל הערכים העצמיים של A שיכים ל K, שוה סכום הרבויים האלגבריים של A ל n.

למה 8טו: *הרבוי הגאומטרי של ערך עצמי λ של מטריצה $A \in M_n(K)$ אינו עולה על הרבוי האלגברי של λ.*

הוכחה: נוכיח את המשפט עבור ההעתקה T המתאימה ל A לפי איזה שהוא בסיס. נבחר בסיס $v_1,\dots,v_k$ ל V_λ ונשלים אותו לבסיס $v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n$ של V. חשוב המטריצה המתאימה ובעקבותיו של הפולינום האפיני יתן פרוק של הפולינום האפיני מהצורה $f_A(X)=(X-\lambda)^k f_C(X)$, באשר C היא מטריצה מסדר $(n-k)\times(n-k)$. ∎

משפט 8טז: *תהי A מטריצה ב $M_n(K)$ שכל ערכיה העצמיים שיכים ל K. תנאי הכרחי ומספיק לכך ש A נתנן ללכסון מעל K הוא שכל השרשים של הפולינום המזערי $m_A(X)$ פשוטים.*

הוכחה: מספיק להוכיח שהעתקה לינארית $T\colon K^n \to K^n$ נתנת ללכסון אם ורק אם כל השרשים של $m_T(X)$ פשוטים.

נניח קודם ש T נתנת ללכסון. יהיו $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ הערכים העצמיים השונים של T. אזי אפשר ליצג את T בעזרת מטריצה אלכסונית:

$$B=\mathrm{Diag}(\lambda_1 I_{k_1},\dots,\lambda_m I_{k_m})$$

באשר $k_1,\dots,k_m$ הם מספרים טבעיים שסכומם n. לכן,

$$\begin{aligned}&(B-\lambda_1 I)\cdots(B-\lambda_m I)\\&\quad=\mathrm{Diag}((\lambda_1-\lambda_1)I_{k_1},\dots,(\lambda_m-\lambda_1)I_{k_m})\cdots\mathrm{Diag}((\lambda_1-\lambda_m)I_{k_1},\dots,(\lambda_m-\lambda_m)I_{k_m})\\&\quad=0\end{aligned}$$

מתוצאה 8יב נובע ש $m_B(X)=(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_m)$. לכן כל השרשים של $m_T(X)$ פשוטים.

להפך, נניח ש

$$m_T(X)=(X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_m) \tag{3}$$

באשר $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ הם אברים שונים זה מזה של K. לפי תוצאה 8יב, אלו הם הערכים העצמיים של T. נציב את A במקום X ב (3):

$$.0=m_T(T)=(T-\lambda_1 I)\cdots(T-\lambda_m I)$$

נסמן ב k_i את הרבוי האלגברי של λ_i. לפי משפט Sylvester ולפי למה 8טו

$$n = \dim(\mathrm{Ker}(0)) \leq \sum_{i=1}^{m} \dim(\mathrm{Ker}(T - \lambda_i I)) = \sum_{i=1}^{m} \dim(V_{\lambda_i}) \leq \sum_{i=1}^{m} k_i = n$$

לכן, $\sum_{i=1}^{m} \dim(V_{\lambda_i}) = n$. מתוצאה 15 נובע ש T נתנת ללכסון. ∎

דגמה 8יז: מטריצה משֻׁלשית $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ שבה $c \neq 0$ נתנת ללכסון אם ורק אם $a \neq d$. ∎

דגמה 8יח: מטריצה A מסדר $n \times n$ מכֻנה **אֲפיסית** (**נִלפוטנטית**) אם קים r כך ש $A^r = 0$. השרש העצמי היחיד של A הוא 0. המטריצה נתנת ללכסון אם ורק אם היא 0. ∎

דגמה 8יט: מטריצה $A \in M_n(K)$ מכֻנה **יחידנית** (**אוניפוטנטית**) אם קים r כך ש $A^r = I$. אם $\mathrm{char}(K) \nmid r$ אזי הפולינום המזערי שלה הנו $X^r - 1$. כל השרשים של פולינום זה פשוטים. לכן, A נתנת ללכסון מעל $\tilde{K}$. ∎

הגדרה ודיון 8כ: פרוק ישר של מרחב וקטורי. יהי V מרחב וקטורי ויהיו $V_1, \ldots, V_m$ מרחבים חלקיים. נאמר ש V הנו **הסכום הישר** של $V_1, \ldots, V_m$ אם כל $v \in V$ נתן להצגה יחידה בצורה $v = v_1 + \cdots + v_m$ באשר $v_i \in V_i$, $i = 1, \ldots, m$. במקרה זה נרשֹם $V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i$. לחלופין, לכל $v \in V$ קימים $v_i \in V_i$ כך ש $v = v_1 + \cdots + v_m$ ואם $w_i \in V_i$ מקיְמים $w_1 + \cdots + w_m = 0$, אזי $w_1, \ldots, w_m = 0$.

אם $v_{i1}, \ldots, v_{ik_i}$ הנו בסיס ל V_i, אזי $v_{11}, \ldots, v_{1k_1}, \ldots, v_{m1}, \ldots, v_{mk_m}$ הנו בסיס של V.

יהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית. נניח ש T **שומר** על כל אחד מה V_i־ים, כלומר, $T(V_i) \subseteq V_i$. אזי הצמצום $T|_{V_i}$ של T ל V_i הוא העתקה לינארית של V_i לתוך עצמו. אם A_i היא המטריצה המיצגת את $T|_{V_i}$ ביחס לבסיס $V_{i1}, \ldots, V_{ik_i}$ אזי מטריצת הגושים האלכסונית $A = \mathrm{Diag}(A_1, \ldots, A_m)$ מיצגת את T ביחס לבסיס $v_{11}, \ldots, v_{1k_1}, \ldots, v_{m1}, \ldots, v_{mk_m}$. ∎

למה 8כא: *יהיו V מרחב וקטורי ממֵמד סופי, $T\colon V \to V$ העתקה לינארית, ו $V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i$ פרוק ישר של V לסכום ישר של מרחבים חלקיים הנשמרים על ידי T. יהיו T_i הצמצום של T ל V_i ו m_i הפולינום המזערי של T_i. אזי* $m_T = \mathrm{lcm}(m_1, \ldots, m_k)$.

9. צורת ז'ורדן של מטריצה

תהי A מטריצה ב $M_n(K)$ שכל ערכיה העצמיים שיכים ל K. אפשר להראות ש A דומה (מעל K) למטריצה מְשֻׁלֶּשֶׁת מיֻחדת J: באלכסון הראשי של J עומדים הערכים העצמיים של A, כל אחד כמה פעמים. כל אברי A העומדים מתחת לאלכסון הראשי שוים ל 1 או ל 0. יתר אברי המטריצה שוים לאפס. יתר על כן, אפשר לסדר את האלכסונים הראשי והמשני בצורה אחידה כך ש J תהיה תלויה באפן מהותי אך ורק ב A. המטריצה J תקרא **צורת ז'ורדן** של A.

נאמר שמטריצה $A \in M_n(K)$ הנה **אֲפִיסִית** (או בלעז **נִ**לפוטנטית) אם קים r טבעי כך ש $A^r = 0$. אם בנוסף לכך $A^{r-1} \neq 0$, נאמר ש A **אפיסית־**r. לדגמה,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

היא מטריצה אפיסית־3. במקרה זה מתקים גם $\mathrm{rank}(A) = 3$.

יהי V מרחב וקטורי מעל K ו $T\colon V \to V$ העתקה לינארית. נאמר ש T **אֲפִיסִי** אם קים r כך ש $T^r = 0$. אם בנוסף לזה $T^{r-1} \neq 0$, נאמר ש T **אפיסית־**r.

באפן כללי, אם A מיצג העתקה לינארית $T\colon V \to V$ ביחס לאיזה שהוא בסיס של V, אזי A אפיסי אם ורק אם T אפיסי ובמקרה זה A אפסית־r אם ורק אם T אפיסית־r.

נאמר שהמרחב V הנו **מעגלי־**T אם קים $v \in V$ כך ש $V = \langle v, Tv, T^2v, \dots \rangle$. אם בנוסף לזה T אפיסי־r, אזי $V = \langle v, Tv, \dots, T^{r-1}v \rangle$. אם בנוסף לזה, $\dim(V) = r$, אזי $v, Tv, \dots, T^{r-1}v$ מהוים בסיס של V.

למה 9א: *יהיו V מרחב וקטורי ו $T\colon V \to V$ העתקה לינארית. נניח שקים $v \in V$ כך ש $V = \langle v, Tv, T^2v, \dots \rangle$. יהי r המספר הקטן ביותר כך ש $T^r v = 0$ (אנו מניחים שקים מספר כזה). אזי $v, Tv, \dots, T^{r-1}v$ מהוים בסיס של V, הפולינום המזערי של T הנו X^r והמטריצה המתאימה ל T לפי בסיס זה היא*

$$J_r(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

הוכחה: כדי להוכיח ש $v, Tv, \dots, T^{r-1}v$ מהוים בסיס מספיק להוכיח שהם אינם תלויים לינארית. נניח אפוא ש $a_0, \dots, a_{r-1}$ הם אברים של K המקימים $\sum_{i=0}^{r-1} a_i T^i v = 0$. יהי i מספר בין 0 ל $r-1$. נניח באנדוקציה שהוכחנו כבר ש $a_0 = \cdots = a_{i-1} = 0$. אזי $a_i T^i v + \cdots + a_{r-1} T^{r-1} v = 0$. הפעלת T^{r-1-i} על אי שויון גורדת $a_i T^{r-1} v = 0$. לפי ההנחה $T^{r-1} v \neq 0$. לכן, $a_i = 0$, והאנדוקציה הֻשלמה.

מההגדרה נובע ש $T^r(T^iv) = 0$ *לכל* i*. מהפסקה הקודמת נובע ש* $T^rw = 0$ *לכל* $w \in V$*. לכן,* $T^r = 0$.
מכאן ש $m_T(X) = X^d$ *עבור* $d \le r$*. אולם,* $T^{r-1}v \neq 0$*. לכן* $m_T(X) = X^r$. ■

למה 9ב: *יהיו* V *מרחב וקטורי ממימד סופי,* $T\colon V \to V$ *העתקה אפיסית־* r *ו* U *תת מרחב מעגלי־* T *ממימד* r*. אזי יש ל* U **משלים־** T *ישר ב* V*. כלומר, קים תת מרחב* W *של* V *הנשמר על ידי* T *והמקים* $V = U \oplus W$.

הוכחה: נוכיח את המשפט באנדוקציה על r. אם $r = 0$, אזי $U = 0$ ונוכל לקחת $W = V$. אם $r = 1$, אזי $T = 0$. במקרה זה כל משלים ישר W של U הנו גם משלים־T ישר.

נניח אפוא ש $r \ge 2$ ושהלמה הוכחה עבור $r - 1$. לפי ההנחה קים $v \in V$ כך ש $U = \langle \hat{u}, T\hat{u}, \ldots, T^{r-1}\hat{u}\rangle$. לפי למה 9א, $\hat{u}, T\hat{u}, \ldots, T^{r-1}\hat{u}$ מהוים בסיס של U.

נסמן $V' = TV$ ו $U' = TU$. אזי V' ו U' נשמרים על ידי T. נסמן ב T' את הצמצום של T ל V'. אזי T' אפיסית־$r - 1$ ו $U' = \langle \hat{u}, T'\hat{u}, \ldots, (T')^{r-2}\hat{u}\rangle$. בפרט, לפי למה 9א, $\dim(U') = r - 1$. הנחת האנדוקציה נותנת אפוא תת מרחב W' של V' הנשמר על ידי T' (ולכן על ידי T) כך ש $V' = U' \oplus W'$. נסמן $W_0 = T^{-1}W'$. אזי W_0 הוא תת מרחב של V הנשמר על ידי T.

טענה א: $V = U + W_0$. ואכן, לכל $v \in V$ קימים $u \in U$ ו $w \in V$ כך ש $Tv = Tu + Tw$ ו $Tw \in W'$. בפרט $w \in W_0$. כמו כן, $T(v - u - w) = 0$ ולכן, $v - u - w \in W_0$. מכאן ש $w + (v - u - w) \in W_0$. יוצא אפוא ש $v = u + w + (v - u - w) \in U + W_0$.

טענה ב: $U \cap W' = 0$. ואכן, יהי $u \in U \cap W'$. אזי קימים $a_0, \ldots, a_{r-1} \in K$ כך ש $u = \sum_{i=0}^{r-1} a_iT^i\hat{u}$. לכן, $\sum_{i=0}^{r-2} a_iT^i\hat{u} = Tu \in U' \cap W' = 0$. מכאן ש $a_0 = \cdots = a_{r-2} = 0$. לכן,

$$u = a_{r-1}T^{r-1}\hat{u} = T^{r-2}(T\hat{u}) \in U' \cap W' = 0.$$

נוכל להסיק אפוא ש $u = 0$.

מטענה ב נובע ש $(U \cap W_0) \cap W' = 0$. כמו כן, נובע מ $TW' \subseteq W'$ ש $W' \subseteq W_0$. לכן, $(U \cap W_0) \oplus W' = (U \cap W_0) + W' \subseteq W_0$. נבחר תת מרחב W'' של W_0 כך ש

$$(U \cap W_0) \oplus W' \oplus W'' = W_0.$$

נסמן $W = W' \oplus W''$.

טענה ג: W *נשמר על ידי* T. ואכן, $TW \subseteq TW_0 = W' \subseteq W$.

טענה ד: $V = U \oplus W$. ואכן, $V = U + W_0 = U + (U \cap W_0) + W = U + W$. לבסוף, מהגדרת W'' נובע ש $U \cap W = (U \cap W_0) \cap W = 0$. טעון זה משלים את הוכחת טענה ד וגם את הוכחת הלמה כֻּלה.
■

למה 9ג: *יהיו V מרחב וקטורי ממֵמד סופי ו $T\colon V \to V$ העתקה אפיסית. אזי $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ באשר V_i מרחב מעגלי־ T ממֵמד r_i והצמצום של T ל V_i אפיסי־ r_i.*

הוכחה: לפי ההנחה קיים r כך ש T אפיסית־r. במלים אחרות, $T^r = 0$ ו $T^{r-1} \neq 0$. לכן, קיים $v \in V$ כך ש $T^{r-1}v \neq 0$. לפי למה 9א, $V_1 = \langle v, Tv, \ldots, T^{r-1}v\rangle$ הוא מרחב מעגלי־T ממֵמד r. יתר על כן, הצמצום של T ל V_1 אפיסי־r. נסמן $r_1 = r$. למה 9ב נותנת תת מרחב W של V הנשמר על ידי T והמקיים $V = U \oplus W$. הממד של W קטן מזה של V והצמצום של T ל W אפיסי. הנחת אנדוקציה נותנת פרוק ישר $W = \bigoplus_{i=2}^m V_i$ כך ש V_i הוא תת מרחב מעגלי־T ממֵמד r_i והצמצום של T ל V_i אפיסי r_i. יחד עם V_1 אנו מקבלים את הפרוק המבֻקש $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$. ∎

למה 9ד: *יהיו $T\colon V \to V$ העתקה לינארית ו λ אבר של K כך ש $T - \lambda I$ אפיסית. נניח שקים $v \in V$ כך ש $V = \langle v, (T-\lambda I)v, (T-\lambda I)^2 v, \ldots\rangle$. יהי r דרגת האפיסיות של $T-\lambda I$. אזי $v, (T-\lambda I)v, \ldots, (T-\lambda I)^{r-1}v$ מהוים בסיס של V, הפולינום המזערי של T הוא $(X-\lambda)^r$ והמטריצה המיצגת את T לפי בסיס זה היא*

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

הוכחה: לפי ההנחה $(T-\lambda I)^r v = 0$. יהי d המספר הקטן ביותר המקים $(T-\lambda I)^d v = 0$. לפי למה 9א (עבור $T - \lambda I$ במקום T), $m_{T-\lambda I}(X) = (X-\lambda)^d$. מצד שני, לפי ההנחה על r, $m_{T-\lambda T}(X) = (X-\lambda)^d$. לכן $d = r$.

מלמה 9א נובע ש $v, (T-\lambda I)v, \ldots, (T-\lambda I)^{r-1}v$ מהוים בסיס של V. יהי $w_i = (T-\lambda I)^i v$. אזי

$$Tw_i = \lambda w_i + (T-\lambda I)w_i = \lambda w_i + w_{i+1}$$

זה נותן את ההצגה של T כנאמר בלמה. ∎

המטריצה $J_r(\lambda)$ המופיעה בלמה 9ב מכֻנה **מטריצת ז'ורדן בסיסית.**

למה 9ה: *יהי V מרחב וקטורי ממֵמד סופי ו $T\colon V \to V$. נניח שיש ל T וקטור עצמי יחיד λ והוא שיך ל K. אזי V מתפרק לסכום ישר $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$, כל V_i הוא מרחב מעגלי־ $(T-\lambda I)$ ממֵמד r_i והצמצום של $T - \lambda I$ ל V_i הוא העתקה אפיסית־ r_i.*

הוכחה: מההנחה נובע ש $(T-\lambda I)^r = 0$ עבור איזה שהוא r. הלמה נובעת אפוא מלמה 9ב. ∎

למה 9ו: *יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי ו $T\colon V \to V$. נניח שיש ל T וקטור עצמי יחיד λ והוא שייך ל K. אזי T נתנת להצגה על ידי מטריצה אלכסונית $J = \mathrm{Diag}(J_1, \dots, J_l)$ באשר J_i הנה מטריצה ז'ורדן בסיסית עם λ באלכסון הראשי.*

הוכחה: מההנחות על T ו λ נובע שקיים r טבעי כך ש $m_T(X) = (X - \lambda)^r = 0$. במלים אחרות, $T - \lambda I$ אפיסית. הלמה נובעת עתה מהלמות 9ב ו 9ה. ∎

אפשר לסדר את ה V_i־ים בלמה 9ה כך שממדיהם ילכו וירדו: $\dim(V_1) \ge \dim(V_2) \ge \cdots \ge \dim(V_m)$. אזי גם הסדרים של המטריצות J_i ילכו וירדו. נאמר ש J שבלמה 9ו היא **מטריצת ז'ורדן עם λ באלכסון הראשי.**

למה 9ז: *יהי V מרחב וקטורי מעל K ממימד n, תהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית, ויהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ הערכים העצמיים השונים של T. נניח ש $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ שייכים ל K. אזי V מתפרק לסכום ישר $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ של מרחבים חלקיים V_i הנשמרים על ידי T והערך העצמי היחיד של $T|_{V_i}$ הנו λ_i.*

הוכחה: לפי ההנחה $f_T(X) = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{k_i}$. נסמן $g_j(X) = \prod_{i \ne j} (X - \lambda_i)^{k_i}$ ו $V_j = g_j(T)V$. אזי $T\big(g_j(T)v\big) = g_j(T)(Tv) \in V_j$. במלים אחרות, T שומר על V_j.

לפי משפט קיילי־המילטון, $(T - \lambda_j I)^{k_j} g_j(T) = f_T(T) = 0$ לכן, לכל $v \in V$,

$$(T - \lambda_j I)^{k_j} g_j(T)v = f_T(T)v = 0.$$

לכן, $(T - \lambda_j I)^{k_j}|_{V_j} = 0$. מכאן שהערך העצמי היחיד של $(T - \lambda_j I)|_{V_j}$ הוא λ_j.

כדי להוכיח ש $V = \sum_{i=1}^m$ נשים לב שהמחלק המשֻתף המרבי של הפולינומים $g_1(X), \dots, g_m(X)$ הוא 1. לכן, קיימים פולינומים $e_1(X), \dots, e_m(X)$ כך ש $\sum_{i=1}^m e_i(X) g_i(X) = 1$. מכאן שעבור כל v ב V מתקיים:

$$v = \sum_{j=1}^m e_j(T) g_j(T) v = \sum_{j=1}^m g_j(T)\big(e_j(T)v\big) \in \sum_{j=1}^m V_j.$$

כדי להוכיח את יחידות ההצגה נתבונן ב $v_j \in V_j$, $j = 1, \dots, m$ ונניח ש $\sum_{j=1}^m v_j = 0$. אם $k \ne j$ אזי $g_k(X) g_j(X)$ הנו כפולה של $f_T(X)$ ולכן, $g_k(T) g_j(T) = 0$. מכאן ש

$$g_k(T) v_k = \sum_{j=1}^k g_k(T) v_j = g_k(T) \sum_{j=1}^m v_j = 0.$$

לכן $e_k(T) g_k(T) v_k = 0$. בנוסף, $e_j(T) g_j(T) v_k = 0$ לכל $j \ne k$. לכן,

$$v_k = \sum_{j=1}^m e_j(T) g_j(T) v_k = 0.$$

כנדרש. ∎

הצרוף של למה 9ו ולמה 9ז נותן את המשפט המרכזי של הסעיף.

משפט 9ח (ז'ורדן): *יהי V מרחב וקטורי ממֵמד n מעל שדה K, תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית ויהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ כל השרשים העצמיים של T. נניח ש $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$. אזי T נתנת ליצוג על ידי מטריצה אלכסונית $J = \mathrm{Diag}(J_1, \ldots, J_m)$ באשר J_i היא מטריצה ז'ורדן עם λ_i באלכסונה הראשי.*

נתרגם את משפט 9ח לשפת המטריצות:

משפט 9ט: *תהי $A \in M_n(K)$ מטריצה בעלת ערכים עצמיים שונים $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ השיכים ל K. אזי A דומה מעל K למטריצה אלכסונית $J = \mathrm{Diag}(J_1, \ldots, J_m)$ באשר J_i היא מטריצת ז'ורדן עם λ_i באלכסונה הראשי.*

האלכסון שמתחת לאלכסון הראשי במטריצה J_i בנוי מ l_i שרשראות ש 1־ים (חלקן מארך 0) ו 0 מבדיל בין שתי שרשראות סמוכות. לכל i נסמן ב $n_j(J, \lambda_i)$ את מספר השרשראות באלכסון שמתחת לאלכסון הראשי של J_i שארכן j. המשפט הבא נותן נֻסחה למספר זה כפונקציה של A בלבד.

משפט 9י: *בהנחות של משפט 9ט מתקים לכל j טבעי*

$$n_j(J, \lambda_i) = \mathrm{rank}\big((A - \lambda_i I)^j\big) - 2\mathrm{rank}\big((A - \lambda_i I)^{j+1}\big) + \mathrm{rank}\big((A - \lambda_i I)^{j+2}\big)$$

ממשפט 9ח נובע שהמטריצה J של משפט 9ט נקבעת באפן יחיד על ידי A (עד כדי סדר הערכים העצמיים $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$). נקרא לה **צורת ז'ורדן** של A. משפט 9י נותן מתכון לחשוב צורת ז'ורדן של A בתנאי שאנו יודעים לחשב את הערכים העצמיים של A.

משפט 9י נותן לנו גם אפשרות לחשב את הפולינום המזערי של מטריצה A.

משפט 9יא: *בהנחות של משפט 9ט יהי d_i המספר הגדול ביותר כך ש $n_{d_i}(J, \lambda_i) \neq$. אזי*

$$.m_A(X) = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{d_i + 1}$$

דגמה 9יב: *הפולינום האפיני של מטריצה A להלן הוא $f_A = X^8$. החזקות של A הן:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = (0)$$

הדרגות של חזקות אלו הן: $\mathrm{rank}(A)=4$, $\mathrm{rank}(A^2)=1$, *ו* $\mathrm{rank}(A^i)=0$ *לכל* $i\geq 3$. *לכן,*

$$n_i(J,0)=0 \qquad i\geq 3$$

$$N_2(J,0)=\mathrm{rank}(A^2)=1$$

$$n_1(J,0)=\mathrm{rank}(A)-2\mathrm{rank}(A^2)=4-2=2$$

$$n_0(J,0)=\mathrm{rank}(A^0)-2\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(A^2)=8-2\cdot 4+1=1$$

צורת ז'ורדן של A *תהיה אפוא*

$$J=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_3(0)&0&0&0\\ 0&J_2(0)&0&0\\ 0&0&J_2(0)&0\\ 0&0&0&J_1(0) \end{pmatrix}$$

לכן $m_A(X)=X^3$. ∎

הרי דגמה לשמוש במשפט ז'ורדן:

משפט פיב: *כל מטריצה* $A\in M_n(K)$ *דומה למטריצה המֻחלפת שלה.*

הוכחה: נוכיח את המשפט רק עבור המקרה שבו כל הערכים העצמיים של A שיכים ל K. במקרה זה דומה A למטריצת ז'ורדן. מספיק להוכיח את המשפט לכל מטריצת ז'ורדן בסיסית $J_r(\lambda)$. המטריצה המֻחלפת $J_r(\lambda)^t$ תקיֵם

$$\mathrm{rank}((J_r(\lambda)-\lambda I)^j)=\mathrm{rank}((J_r(\lambda)^t-\lambda I)^j)$$

לכל j. לכן, לפי משפט פט, יש ל $J_r(\lambda)$ ול $J_r(\lambda)^t$ אותה צורת ז'ורדן. מכאן ש $J_r(\lambda)^t$ דומה מעל K ל $J_r(\lambda)$.
∎

10. מערכת משוואות דיפרנציאליות לינאריות

אחד השמושים המובהקים לתהליך התקינה של מטריצות רבועיות הנו לפתרון מערכת משוואות דיפרנציאליות לינאריות. אנו נסתפק פה בהדגמת הכלים בפתחנו בסעיפים הקודמים ונמנע להכנס לשקולי התכנסות של הטורים שנפגש במהלך הדיון. דיון ממצא על הנושא אפשר למצא בעמודים 287 – 307 של הספר „אנליסה קלסית" של שמואל אגמון, הוצאת אקדמון, ירושלים תשכה.

יהי אפוא x משתנה מרוכב, יהי $\mathbf{y}$ עמודה מגבה n של משתנים מרוכבים התלויים ב x, ויהי $A \in M_n(\mathbb{C})$. נסמן ב $\mathbf{y}'$ את עמודת הנגזרות של $\mathbf{y}$. משפט הקיום והיחידות מראה שלמערכת המשוואות הדיפרנציאליות

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \tag{1}$$

יש בתנאי התחלה נתונים $\mathbf{y}(0) = \mathbf{b}$ פתרון יחיד:

$$\mathbf{y} = e^{Ax}\mathbf{b} \tag{2}$$

שבו

$$e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k x^k. \tag{3}$$

אפשר להראות שלכל x מרוכב הטור באגף ימין של (3) מתכנס למטריצה ב $M_n(\mathbb{C}[x])$. יתר על כן הפונקציות המתקבלות באפן כזה גזירות ואפשר לגזר את שני האגפים של (3) לפי הכללים הרגילים.

בפרט אסף כל הפתרונות של (1) מהוה מרחב וקטורי ממםד n. בסיס למרחב זה יתקבל למשל על ידי הצבה של וקטורי היחידה $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ בזה אחר זה במקום $\mathbf{b}$.

כדי לחשב את הטור ב (3) נבצע חלוף משתנה, $\mathbf{z} = P^{-1}\mathbf{y}$ באשר $P \in M_n(\mathbb{C})$ הוא מטריצה שתקבע בהמשך. אם נציב $\mathbf{z}' = P^{-1}\mathbf{y}'$ ו $J = P^{-1}AP$ ב (1) תקבל מערכת המשוואות את הצורה $\mathbf{z}' = J\mathbf{z}$ ופתרונה יהיה בהתאמה $\mathbf{z} = e^{Jx}\mathbf{c}$, באשר, $\mathbf{c} = P^{-1}\mathbf{b}$. הפתרון של המשואה המקורית (1) יהיה $\mathbf{y} = Pe^{Jx}\mathbf{c}$.

המקרה הנח ביותר הוא כאשר $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. במקרה זה

$$e^{Jx} = \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}).$$

כמובן ש $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ הם הערכים העצמיים של A ו P הוא המטריצה המלכסנת. אפשר לחשב אותם בעזרת תהליך הלכסון בסעיף 15.

אם אי אפשר ללכסן את A, אפשר עדין להביא אותה לצורת ז'ורדן. במקרה זה $J = N + D$, באשר D מטריצה אלכסונית ו N מטריצה המקימת $N^n = 0$ ו $ND = DN$ (סעיף 11) יתר על כן, ל N צורה פשוטה במיוחד המקילה על חשוב החזקות שלה. אם $k \geq n$ נקבל מכאן ש

$$J^k = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} N^m D^{k-m} = \sum_{m=0}^{n} \binom{k}{m} N^m D^{k-m}.$$

טענה: $e^{ND}=e^Ne^D$.

הוכחה:

$$
\begin{aligned}
e^Ne^D &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}N^i\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}D^j=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i+j=k}\frac{1}{i!j!}N^iD^j\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}N^iD^{k-i}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(N+D)^k=e^{N+D}
\end{aligned}
$$

לכן אם $D=\mathrm{Diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, אזי

$$
e^{Jx}=e^{Nx}e^{Dx}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}N^kx^k\cdot\mathrm{Diag}(e^{\lambda_1 x},\ldots,e^{\lambda_n x})
$$

בזאת הצגנו את הפתרון כצרוף סופי של פולינומים ופונקציות מעריכיות.

לדגמה, אם $J=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, אזי $e^{Jx}=\begin{pmatrix}1&0\\x&1\end{pmatrix}e^x$.

דגמה 17א: התפשטות גזים. שני תאים X ו Y מופרדים על ידי מחיצה חדירה. בתאים נמצא גז בכמויות x ו y בהתאמה. הגז מפעפע מ X ל Y במהירות ax ומ Y ל X במהירות by. בנוסף לזה נמלט הגז מהתא X במהירות $a'x$ ומהתא Y במהירות $b'y$. אנו מניחים ש $a,a',b,b'\geq 0$.

הכמויות x ו y תלויות כמובן בזמן t. אם נסמן ב $\dot{x}$ וב $\dot{y}$ את הנגזרות של x ושל y בהתאמה לפי הזמן נקבל שהן מקימות את מערכת המשואות

$$
\dot{x}=-(a+a')x+by
$$

$$
\dot{y}=ax-(b+b')y
$$

נתן עתה לשאל עבור אלו ערכים של הקבועים נקבל פתרון מחזורי או עבור אלו ערכים של הקבועים יתכנס הפתרון.

∎

11. מרחבים אוקלידיים

מטרתנו הבאה היא להוכיח שכל מטריצה סמטרית A מעל $\mathbb{R}$ נתנת ללכסון מעל $\mathbb{R}$. כדי להוכיח משפט זה צריך קודם כל להוכיח שכל הערכים העצמיים של A הם ממשיים. בהוכחה אנו רואים את הערכים הללו קודם כל כמספרים מֻרכבים ומוכיחים שכל אחד מהם צמוד לעצמו. לשם כך אנו מכניסים מושגים גאומטריים בסיסיים למרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{R}$ ומעל $\mathbb{C}$. למען אחידות הדיון יהי K בסעיף זה (ובסעיפים הבאים) שדה המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ או שדה המספרים המֻרכבים $\mathbb{C}$.

יהי V מרחב וקטורי מעל K. **מכפלה פנימית** ב V הנה העתקה $(\ ,\ ): V \times V \to \mathbb{R}$ המקימת את הדרישות הבאות לכל $u, v \in V$ ו $\alpha \in \mathbb{R}$:

(א) **הרמיטיות:** $(u,v) = \overline{(v,u)}$.

(ב) **בילינאריות:** $(u+u',v) = (u,v) + (u',v)$.

(ג) **הומוגניות:** $\alpha(u,v) = (\alpha u, v)$.

(ד) **חיוביות:** $(v,v) > 0$ אם $v \neq 0$.

למרחב V יחד עם המכפלה הסקלרית קוראים **מרחב מכפלה פנימית**. אם $K = \mathbb{R}$ קוראים לו **מרחב אוקלידי**.

תוצאות מִיָדיות של (א)–(ד) הם:

(ה) $\sum_{i=1}^m \alpha_i(u_i,v) = (\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i, v)$.

(ו) $\sum_{i=1}^m \beta_i(u,v_i) = (u, \sum_{i=1}^m \bar{\beta}_i v_i)$.

(ז) $(0,v) = (u,0) = 0$.

הנורמה של וקטור $v \in V$ מוגדרת על ידי הבטוי $\|v\| = \sqrt{(v,v)}$ ואלו **המרחק** בין שני וקטורים u ו v הנו $d(u,v) = \|u-v\|$. לבסוף **קוסינוס הזוית** בין u ל v הנו

$$\cos(u,v) = \frac{(u,v)}{\|u\| \cdot \|v\|} .$$

מ (ז) נובע ש $\|v\| \geq 0$ וש $\|v\| = 0$ אם ורק אם $v = 0$.

יהיו u, v וקטורים שונים מאפס. נאמר ש u ו v **נצבים זה לזה** אם $\cos(u,v) = 0$, לחלופין אם $(u,v) = 0$.

משפט הקוסינוסים אומר ש

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\|u\|\|v\|\mathrm{Re}(\cos(u,v)) + \|v\|^2$$

בפרט אם u ו v נצבים זה לזה מקבלים את משפט פתגורס:

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 .$$

דוגמא 11א:

א. במרחב $V = K^n$ נגדיר מכפלה פנימית **רגילה** בין $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ו $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ על ידי

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{b}_i$$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2}$$

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|^2}$$

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\sum a_i \bar{b}_i}{\sqrt{\sum |a_i|^2 \sum |b_i|^2}}$$

ב. נגדיר מכפלה פנימית על $M_n(\mathbb{R})$ בעזרת הנֻסחה

$$(A, B) = \mathrm{tr}(A^t B)$$

בפרט $\|A\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$ אם $A = (a_{ij})$.

ג. יהיו $a < b$ מספרים ממשיים ו V מרחב כל הפונציות המֻרכבות הרציפות בקטע $[a, b]$. נגדיר:

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \bar{g}(x) dx$$

משפט 11ב (אי שויון קושי־שורץ): *יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל K. אזי*

$$|(u, v)| \le \|u\| \|v\| \tag{1}$$

לכל $u, v \in V$. יתר על כן, השויון ב (1) מתקים אם ורק אם u ו v נמצאים על אותו ישר.

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות נניח ש $(u, v) \neq 0$. נסמן $\varepsilon = \frac{\overline{(u,v)}}{|(u,v)|}$. אזי $|\varepsilon| = 1$. לכל λ ממשי מתקים

$$0 \le \|\lambda \varepsilon u + v\| = \lambda^2 \|u\|^2 + 2|(u, v)| \lambda + \|v\|^2.$$

במלים אחרות, לפולינום (הממשי) באגף ימין יש לכל היותר שרש ממשי אחד. לכן הדסקרימיננטה שלו אינה חיובית:

$$4|(u, v)|^2 - 4\|u\|^2 \|v\|^2 \le 0$$

כלומר, $|(u, v)| \le \|u\| \|v\|$. ∎

דגמה 11ג: א. יהיו $a_1,\dots,a_n$ ו $b_1,\dots,b_n$ מספרים מְרֻכבים. אזי

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} a_i\bar{b}_i\Big|^2 \le \big(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\big)\big(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\big).$$

ומתקים שויון אם ורק אם שתי הנקֻדות $(a_1,\dots,a_n)$ ו $(b_1,\dots,b_n)$ נמצאות על ישר אחד.

ב. תהיינה f,g פונקציות מְרֻכבות בקטע $[0,1]$. אזי

$$\Big|\int_0^1 f(x)\bar{g}(x)dx\Big| \le \int_0^1 |f(x)|^2dx \int_0^1 |g(x)|^2dx$$

ומתקים שויון אם ורק אם קימים α,β מְרֻכבים שאינם שניהם אפס כך ש $\alpha f+\beta g=0$. ∎

מאי שויון המשלש נובעות המסקנות הבאות:

(א) $\|u+v\| \le \|u\|+\|v\|$.

(ב) $\|u-v\| \ge \|u\|-\|v\|$.

(ג) $d(u,v) \le d(u,w)+d(w,v)$.

12. מערכות נצבות ומתֻקנות

בסעיף זה יסמנו K את השדה $\mathbb{R}$ או את השדה $\mathbb{C}$ ו V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה K. נגדיר את מושג הנצבות ונראה שלכל תת מרחב יש משלים נצב.

קבוצת וקטורים $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ תקרא **מערכת נצבת ומתֻקנת** (**אורתונורמלית**). אם $(e_1, e_j) = \delta_{ij}$ באשר δ_{ij} הנו 1 אם $i = j$ ואפס אם $i \neq j$. δ_{ij} מכֻנה **הדלתא של קרונקֶר**. מערכת נצבת ומתֻקנת המהוה בסיס ל V תקרא **בסיס נצב ומתֻקן.**

דגמאות 12א:

א. קבוצת וקטורי היחידה $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ ב $\mathbb{R}^n$ הנה בסיס נצב ומתֻקן.

ב. בקבוצה הבאה של פונקציות ב $C(-\pi, \pi)$ כל שני אברים שונים נצבים זה לזה

$$1, \cos(kt), \sin(lt), \quad k, l = 1, 2, 3, \ldots$$

אפשר להפך קבוצה זו לנצבת ומתֻקנת על ידי חלוק כל אבר (פרט ל 1) ב $\sqrt{\pi}$. הנצבות ההדדית של אברים שונים בקבוצה נובעת מהשויונות

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)dt = 0 \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)dt = 0$$

ומהזהויות הבאות:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big)$$
$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\big)$$
$$\cos\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\big)$$
$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big)$$

זהויות אלו נובעות מהזהויות

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta$$

הנובעות מצדן מהנֻסחה

$$.e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

למה 12ב: *תהי $e_1,\dots,e_k$ מערכת נצבת ומתֻקנת ב V ו $v=\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ וקטור ב V. אזי $\alpha_i=(v,e_i)$, $i=1,\dots,k$ ו $\|v\|^2=\sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2$. לכן, $v=\sum_{i=1}^k (v,e_i)e_i$.*

למה 12ג: *כל מערכת נצבת ומתֻקנת אינה תלויה לינארית.*

למה 12ד: *תהי $e_1,\dots,e_k$ מערכת נצבת ומתֻקנת ב V ויהי $v\in V$.*

(א) *הוקטור $u=v-\sum_{i=1}^k (v,e_i)e_i$ נצב ל $\langle e_1,\dots,e_k\rangle$.*

(ב) $\|u\|^2=\|v\|^2-\sum_{i=1}^k |(v,e_i)|^2$.

(ג) $\|v\|^2\geq \sum_{i=1}^k |(v,e_i)|^2$.

מלמה 12ד(א) נוכל להסיק גם את המשפט היסודי הבא:

משפט 12ה (תהליך היִצוב של גרם־שמידט): *יהי $v_1,\dots,v_n$. אזי קים ל V בסיס נצב ומתֻקן $e_1,\dots,e_n$ שעבורו $\langle v_1,\dots,v_k\rangle=\langle e_1,\dots,e_k\rangle$.*

הוכחה: יהי $0\leq m<n$. נניח כבר שבנינו מערכת נצבת ומתֻקנת $e_1,\dots,e_m$ כך ש

$$\langle v_1,\dots,v_k\rangle=\langle e_1,\dots,e_k\rangle$$

לכל $1\leq k\leq m$. נגדיר $e'_{m+1}=v_{m+1}-\sum_{i=1}^m (v_{m+1},e_i)e_i$. לפי למה 12ד(א), e'_{m+1} נצב ל $\langle e_1,\dots,e_m\rangle$. נסמן

$$e_{m+1}=\frac{e'_{m+1}}{\|e_{m+1}\|}$$

אזי $e_1,\dots,e_{m+1}$ מערכת נצבת ומתֻקנת ו $\langle v_1,\dots,v_{m+1}\rangle=\langle e_1,\dots,e_{m+1}\rangle$. ∎

משפט 12ו: *נניח ש V נוצר סופית. אזי כל מערכת נצבת ומתֻקנת ב V נתנת להשלמה לבסיס נצב ומתֻקן.*

הוכחה: תהי $e_1,\dots,e_m$ מערכת נצבת ומתֻקנת. נשלים אותה לבסיס $e_1,\dots,e_m,v_{m+1},\dots,v_n$ ונפעיל את תהליך האורתוגונליזציה של גרם־שמידט החל מהשלב ה $m+1$־י. ∎

נסחת Parseval: *יהי $e_1,\dots,e_n$ בסיס נצב ומתֻקן של V ויהיו $a=\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ ו $b=\sum_{i=1}^n \beta_i e_i$ וקטורים ב V. אזי $(a,b)=\sum_{i=1}^n (a,e_i)(e_i,b)$.*

יהי U תת מרחב של V. **המשלים הנצב** של U ב V הנו הקבוצה

$$U^\perp=\{v\in V \mid v\perp U\}$$

למה 12ז:

(א) $U^\perp$ *הוא תת מרחב של* V.

(ב) $U \subseteq U^{\perp\perp}$.

(ג) $U \cap U^\perp = 0$.

(ד) $U + U^\perp = V$.

הוכחה (ד): נבנה בסיס נצב ומתֻקן $e_1, \ldots, e_m$ ל U ונשלים אותו לבסיס נצב ומתֻקן $e_1, \ldots, e_n$ ל V. בפרט e_j נצב ל U לכל $m+1 \le j \le n$. לכן, $\langle e_{m+1}, \ldots, e_n \rangle \subseteq U^\perp$. להפך, אם $v \in U^\perp$ אזי $v = \sum_{i=1}^n (v, e_i) e_i = \sum_{i=m+1}^n (v, e_i) e_i$. לכן, $U^\perp = \langle e_{m+1}, \ldots, e_n \rangle$ ו $V = U + U^\perp$. ∎

משפט 12ח: *יהי* V *מרחב מכפלה פנימית מממד סופי ויהי* U *תת מרחב. אזי*

(א) $V = U \oplus U^\perp$.

(ב) $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$.

(ג) $U = U^{\perp\perp}$.

הוכחת (ג): משני השויונות

$$\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$$
$$\dim(U^\perp) + \dim(U^{\perp\perp}) = \dim(V)$$

נובע ש $\dim(U) = \dim(U^{\perp\perp})$. הואיל ו U מוכל ב $U^{\perp\perp}$, הוא שוה לו. ∎

13. העתקות לינאריות במרחבי מכפלה פנימית

בסעיף זה יסמן K את שדה המספרים הממשיים או את שדה המספרים המרֻכבים. נקבע מרחב מכפלה פנימית V ממםד n מעל K ובסיס נצבות מתֻקן $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ של V. לכל העתקה לינארית $T\colon V \to V$ נתאים העתקה לינארית $T^*\colon V \to V$ בעלת תכונות מועילות. בפרט, במקרה ש $K = \mathbb{R}$ המטריצות המתאימות ל T ול T^* ביחס לבסיס $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ מֻחלפות זו לזו. בעזרת מכשיר זה נוכיח שכל מטריצה סימטרית ב $M_n(\mathbb{R})$ נתנת ללכסון.

פונקציונל לינארי של V הנו העתקה לינארית $\varphi\colon V \to K$. לדגמה, לכל $v \in V$ ההעתקה $\varphi\colon V \to K$ המֻגדרת על ידי $\varphi(u) = (u, v)$ מהוה פונקציונל לינארי.

למה 13א: *לכל פונקציונל לינארי $\varphi\colon V \to K$ קים $v \in V$ יחיד כך ש $\varphi(u) = (u, v)$ לכל $u \in V$.*

הוכחה: $v = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i$. ∎

למה 13ב: *לכל העתקה לינארית $T\colon V \to V$ קיֶמת העתקה לינארית יחידה $T^*\colon V \to V$ המקיֶמת*

$$(Tu, v) = (u, T^*v)$$

לכל $u, v \in V$.

הוכחה: לכל $v \in V$ נגדיר פונקציונל לינארי $\varphi_v\colon V \to K$ על ידי $\varphi_v(u) = (Tu, v)$. למה 13א נותנת וקטור יחיד ב V שנסמנו ב T^*v המקיֵם $\varphi_v(u) = (u, T^*v)$. ההעתקה $T^*\colon V \to V$ הנה המבֻקשת. ∎

נקרא ל T^* **ההעתקה הצמודה** ל T.

למה 13ג: *תהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית ותהי $T^*\colon V \to V$ ההעתקה הצמודה לה. תהיינה $A = (a_{ij})$ ו $A^* = (a^*_{ij})$ המטריצות המתאימות ל T ו T^* בהתאמה ביחס ל $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. אזי $a^*_{ij} = \bar{a}_{ji}$ לכל i ו j.*

הוכחה: מתקיֵם $Te_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} e_k$ ו $T^*e_k = \sum_{k=1}^n A^*_{ki} e_k$. הקשר בין A ו A^* נובע מהזהויות $(Te_i, e_j) = (e_i, T^*e_j)$. ∎

את A^* מכנים **המטריצה הצמודה** ל A. המטריצה הצמודה למטריצה ממשית אינה אלא המטריצה המֻחלפת שלה.

דֻגמה 13ד: תהי T ההעתקה הלינארית ב $\mathbb{C}^2$ המֻגדרת על ידי

$$T(z_1, z_2) = (z_1 + iz_2, 2z_2 + (2 - 3i)z_1).$$

יהי $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ הבסיס הטבעי. חשב את T, T^*, A, ו A^*. ∎

למה 13ה: *לִפְעֻלַת ההצמדה של העתקות לינאריות יש התכונות הבאות:*

(א) $(T+S)^* = T^* + S^*$.

(ב) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$.

(ג) $(TS)^* = S^* T^*$.

(ד) $(T^*)^* = T$.

(ה) *ההעתקה* $T \mapsto T^*$ *מעתיקה את* $\mathrm{Hom}(V,V)$ *באפן חד חד ערכי על עצמו.*

הוכחה: השתמש ביחידות שבלמה 13ב. ∎

משפט דומה נכון גם בחוג $M_n(K)$.

אומרים שהעתקה לינארית $T\colon V \to V$ **צמודה לעצמה** אם $T = T^*$. העתקה צמודה לעצמה במרחב אוקלידי מכֻנה גם **סימטרית.**

מטריצה $A \in M_n(K)$ **צמודה לעצמה** אם $A^* = A$. מטריצה רבועית ממשית צמודה לעצמה אם ורק אם היא סימטרית. אם A מיצגת את T ביחס ל $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, אזי A צמודה לעצמה אם ורק אם T צמודה לעצמה.

למה 13ו: *כל הערכים העצמיים של מטריצה ממשית סימטרית* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *הנם ממשיים.*

הוכחה: יהי $\lambda \in \mathbb{C}$ ערך עצמי של A. נראה את A בתור העתקה לינארית של $\mathbb{C}^n$ לתוך עצמו. ונראה את $\mathbb{C}^n$ בתור מרחב מכפלה פנימית ביחס למכפלה הפנימית הרגילה. קַיָם וקטור שונה מאפס $v \in \mathbb{C}^n$ כך ש $Av = \lambda v$. לפי הנתון $A = A^*$. לכן

$$\lambda(v,v) = (\lambda v, v) = (Av, v) = (v, A^* v) = (v, Av) = (v, \lambda v) = \bar{\lambda}(v,v).$$

הואיל ו $(v,v) \neq 0$ מקבלים $\lambda = \bar{\lambda}$. במלים אחרות, $\lambda \in \mathbb{R}$. ∎

משפט 13ז: *יהי V מרחב אוקלידי ממֵמד סופי ו $T\colon V \to V$ העתקה לינארית צמודה לעצמה. אזי קים ל V בסיס נצבות מתֻקן $v_1, \ldots, v_n$ המֻרכב מוקטורים אָפִיניים.*

הוכחה: לפי למה 13ו, יש ל T ערך עצמי ממשי λ_1. יהי $v \in V$ וקטור עצמי השיך ל λ_1. בפרט, $v \neq 0$. נסמן $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$. אזי $Tv_1 = \lambda_1 v_1$ ו $\|v_1\| = 1$.

נסמן $U = \langle v_1 \rangle$. לפי משפט 12ח, $V = U \oplus U^\perp$. הואיל ו T שומר על U, הוא שומר גם על $U^\perp$. כדי להוכיח טענה זו נתבונן ב $u^\perp \in U^\perp$ ויהי $u \in U$. אזי $(u, Tu^\perp) = (T^*u, u^\perp) = (Tu, u^\perp) = 0$.

נסמן ב T' את הצמצום של T ל $U^\perp$. אזי T' סימטרי. הנחת אנדוקציה נותנת ל $U^\perp$ בסיס נצבות מתֻקן $v_2, \ldots, v_n$ המֻרכב מוקטורים אפיניים של T'. הוקטורים $v_1, v_2, \ldots, v_n$ מהוים בסיס נצבות מתֻקן ל V. ∎

למה 13ח: *יהי V מרחב אוקלידי ו $T\colon V \to V$ העתקה סימטרית. אזי וקטורים אפיניים של T השיכים לערכים עצמיים שונים נצבים זה לזה.*

הוכחה: נניח ש $Tv = \lambda v$, $Tu = \mu u$, $u, v \neq 0$ ו $\mu \neq \lambda$. אזי $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$. לכן

$$\mu(u,v) = (\mu u, v) = (Tu, v) = (u, Tv) = (u, \lambda v) = \lambda(u,v)$$

לכן $(u,v) = 0$. ∎

14. העתקות לינאריות השומרות על המבנה של מרחבי מכפלה פנימית

ממשפט 13ז נובע כבר שכל מטריצה לינארית סימטרית נתנת ללכסון. יתר על כן, העובדה שהבסיס של וקטורים אפיניים של V הנו נצב ומתקן נותנת מידע חשוב על מטריצה המעבר למטריצה אלכסונית. לצרך זה נלמד על העתקות לינאריות השומרות על המבנה של מרחב מכפלה פנימית.

טענה 14א: *כל העתקה לינארית* $T\colon V \to V$ *נתנת להצגה יחידה בצורה* $T = T_1 + iT_2$ *באשר* T_1 *ו* T_2 *צמודות לעצמן.*

למה 14ב: *יהי* V *מרחב מכפלה פנימית מעל* $\mathbb{C}$ *ותהי* $T\colon V \to V$ *העתקה לינארית. אם* $(Tv, v) = 0$ *לכל* $v \in V$*, אזי* $T = 0$.

הוכחה: הפעלת התנאי על $u + v$ נותנת $(Tu, v) + (Tv, u) = 0$. הפעלת התנאי על $u + iv$ נותנת $-(Tu, v) + (Tv, u) = 0$. לכן $(Tu, v) = 0$. ∎

הערה 14ג: למה 14ב אינה נכונה עבור מרחבי מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$. ואכן, יהי T סבוב של המישור הממשי סביב הראשית ב 90^0. אזי $(Tv, v) = 0$ לכל v למרות ש $T \neq 0$. כדי לקבל את למה 14ב במקרה זה צריך להטיל תנאי נוסף על T.

למה 14ד: *יהי* V *מרחב מכפלה פנימית כלשהוא ותהי* $T\colon V \to V$ *העתקה לינארית צמודה לעצמה. אם* $(Tv, v) = 0$ *לכל* $v \in V$*, אזי* $T = 0$.

הוכחה: למה 14ב מטפלת במקרה שבו $K = \mathbb{C}$. במקרה שבו $K = \mathbb{R}$ נפעיל את התנאי על $u + v$ כדי לקבל $2(Tu, v) = 0$. ∎

למה 14ה: *יהי* V *מרחב מכפלה פנימית מעל* $\mathbb{C}$ *ותהי* $T\colon V \to V$ *העתקה לינארית. אזי* $T = T^*$ *אם ורק אם* $(Tv, v) \in \mathbb{R}$ *לכל* $v \in V$.

הוכחה: ההעתקה $i(T - T^*)$ צמודה לעצמה ומקימת את התנאי של למה 14ד. ∎

למה 14ו: *התנאים הבאים על העתקה לינארית* $T\colon V \to V$ *במרחב מכפלה פנימית מממד סופי שקולים זה לזה:*

(א) $(Tu, Tv) = (u, v)$ *לכל* $u, v \in V$.

(ב) $||Tu|| = ||u||$

(ג) $T^*T = 1$.

(ד) T *הפיכה ו* $T^{-1} = T^*$.

(ה) $TT^* = 1$.

(ו) T *מעבירה כל בסיס נצבות מתֻקן לבסיס נצבות מתֻקן.*

(ז) T *מעבירה לפחות בסיס נצבות מתֻקן אחד לבסיס נצבות מתֻקן.*

הוכחה: כל שלב בשרשרת הגרירות הבאה נובע מההגדרות או מאחת הלמות הקודמות: (א) $\Longleftarrow$ (ב) $\Longleftarrow$ (ג) $\Longleftarrow$ (ד) $\Longleftarrow$ (ה) $\Longleftarrow$ (ד) $\Longleftarrow$ (ג) $\Longleftarrow$ (א) $\Longleftarrow$ (ז) $\Longleftarrow$ (ו) $\Longleftarrow$ (א). ∎

העתקה לינארית המקימת את התנאים של למה 14ו נקראת **העתקה אוניטרית**. אם $K = \mathbb{R}$ מכנים אותה גם **נִצבת** או **אורתוגונלית**.

מטריצה $A \in M_n(K)$ מכונה **אוניטרית** (או **נִצֶבֶת** או **אורתוגונלית** במקרה הממשי) אם $AA^* = A^*A = I$.

למה 14ז: *מטריצה $A \in M_n(K)$ הנה אוניטרית אם ורק אם שורותיה (וגם עמודותיה) מהוות בסיס נצבות מתֻקן ל K^n עם המכפלה הפנימית $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i$.*

דגמה 14ח: העתקה לינארית $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ הנה שומרת מרחקים אם ורק אם היא נצבת, לחלופין, אם המטריצה המיצגת את T ביחס לבסיס נצבות מתֻקן היא אוניטרית.

תהי $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ המטריצה המיצגת את T. אזי $AA^t = I$. לכן $A^t = A^{-1}$ ו $\det(A) = \pm 1$, כלומר

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

אם $\det(A) = 1$, אזי $a = d$, $b = -c$ ו $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. אם $\det(A) = -1$, אזי $a = -d$, $b = c$ ו $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. בשני המקרים $a^2 + b^2 = 1$. לכן $|a|, |b| \leq 1$ וקים $0 \leq \theta \leq 2\pi$ כך ש $a = \cos\theta$ ו $b = \sin\theta$.

ל A יש אפוא שתי צורות אפשריות:

$$A^+ = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
$$A^- = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

A^+ מיצגת סבוב של המישור סביב הראשית במגמה חיובית בזוית θ. A^- הוא סבוב כנ"ל ולאחריו שקוף ביחס לציר ה x־ים. ∎

תרגיל 14ט: *השתמש במשפטי חפיפה של משֻלשים כדי להוכיח שלהעתקה $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ השומרת על הראשית ושומרת מרחקים הנה לינארית.*

משפט 14י: *לכל מטריצה סימטרית ממשית $A \in M_n(\mathbb{R})$ קַיֶמת מטריצה נצבת $U \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש $U^{-1}AU$ אלכסונית.*

הוכחה: תהי $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ההעתקה המיצגת את A לפי הבסיס הטבעי $e_1, \ldots, e_n$. משפט 13ז נותן ל $\mathbb{R}^n$ בסיס נצבות מתֻקן $v_1, \ldots, v_n$ המֻרכב מוקטורים אפיניים. תהי D המטריצה האלכסונית המתאימה ל T לפי הבסיס

האחרון. תהי U מטריצה המעבר מ $e_1,\dots,e_n$ ל $v_1,\dots,v_n$. אזי $U^{-1}AU=D$. לפי למה 114, U הנה מטריצה נצבת. ∎

תהליך הלכסון של מטריצה סימטרית:

(א) חשב את הפולינום האפיני $f_A(X)=\det(XI-A)$ של A.

(ב) מצא את שרשי $f_A(X)$. אלו הערכים העצמיים של A. כֻּלם ממשיים.

(ג) עבור כל ערך עצמי λ_i חשב בסיס למרחב V_i של הוקטורים האפיניים השיכים ל λ_i על ידי פתרון מערכת המשואות $(\lambda_i I-A)\mathbf{X}=0$.

(ד) עבור כל i הפעל את תהליך גרם־שמידט על הבסיס של V_i שמצאת וקבל באפן כזה בסיס נצבות מתֻקן של V_i.

(ה) קבץ את כל הבסיסים שמצאת למטריצה U. זו תהיה מטריצה אוניטרית המלכסנת את A.

(ו) רשם את U^* ואמת ש $UU^*=I$ וש U^*AU אלכסונית. ∎

דגמה 14יא:

$$A=\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}\qquad \lambda_1=5\quad \lambda_2=0\qquad U=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}\qquad ∎$$

הראינו שאם T צמודה לעצמה, אזי T נתנת ללכסון בעזרת מטריצה אוניטרית ובאלכסון של המטריצה המיצגת D עומדים הערכים העצמיים של T. אם יש ל T רק ערך עצמי אחד, אזי $D=\lambda I$ ולכן $T=\lambda$ היא העתקה סקלרית. אחרת יש ל T לפחות שני ערכים עצמיים שונים זה מזה. תצפית זו מאפשרת לנו ללכסן בו זמנית קבוצה של העתקות נורמליות:

משפט 14יא: *יהי V מרחב אוקלידי ממד סופי ותהי $\mathcal{T}$ קבוצה של העתקות סימטריות של V המתחלפות זו עם זו בכפל. אזי קים ל V בסיס נצבות מתֻקן $e_1,\dots,e_n$ כך שכל המטריצות המיצגות את אברי $\mathcal{T}$ ביחס לבסיס זה אלכסוניות.*

הוכחה באנדוקציה על $\dim(V)$: אם כל $T\in\mathcal{T}$ סקלרית, כל בסיס נצבות מתֻקן יקים את הדרישה. אחרת קימת $T\in\mathcal{T}$ לא סקלרית. הואיל ולפי משפט 13ז, T נתנת ללכסון, יש ל T לפחות שני ערכים עצמיים שונים. יהיו $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ הערכים העצמיים של T ויהיו $V_1,\dots,V_k$ מרחבי הוקטורים האפיניים המתאימים. לכל $S\in\mathcal{T}$ ולכל $v\in V_i$ מתקים $TSv=STv=S\lambda_i v=\lambda_i Sv$, ולכן $Sv\in V_i$. הואיל ו $k\ge 2$, הממד של V_i קטן מממד V. נוכל להפעיל אפוא את הנחת האנדוקציה על כל אחד מה V_i־ים ועל הצמצום של אברי $\mathcal{T}$ עליהם. אסף הבסיסים שנקבל יתן בסיס ל V כנטען במשפט. ∎

מטריצה $A\in M_n(\mathbb{C})$ מכֻנה **נורמלית** אם $AA^*=A^*A$. בפרט כל מטריצה צמודה לעצמוה או אוניטרית הנה נורמלית.

משפט 14יב: *לכל מטריצה נורמלית* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *קימת מטריצה אוניטרית* $U \in M_n(\mathbb{C})$ *כך ש* $U^{-1}AU$ *אלכסונית.*

תרגיל 14יג: לכסן על ידי מטריצה נצבת את כל אחת מהמטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

תרגיל 14יד: תהי Q מטריצה סימטרית ממשית כך ש $Q^k = I$ עבור איזה שהוא k טבעי. הוכח ש $Q^2 = I$.