תרגילים לקורס אלגברה ב1

משה ירדן

תל אביב, תשס"ד

תרגיל 1 באלגברה ב1

1. תהי A תת קבוצה סופית של חבורה G הסגורה תחת הכפל. הוכח ש A היא חבורה חלקית של G.

2. הוכח את נֻסחת המגדל עבור האנדקס בחבורות: $(G:J)=(G:H)(H:J)$ אם $J \le H \le G$.

3. תהְיֶינה A ו B חבורות חלקיות בעלות אנדקס סופי של חבורה G.

   (א) הוכח ש $(G:A\cap B) \le (G:A)(G:B)$.

   (ב) אם המספרים $(G:A)$ ו $(G:B)$ זרים זה לזה, אזי $(G:A\cap B)=(G:A)(G:B)$. אם, בנוסף לזה, G סופית, אזי $G=AB$.

4. הוכח שאם כל אבר של חבורה G מקיֵם $g^2=1$, אזי G חבורה חלופית.

תרגיל 2 באלגברה ב1

1. יהיו a, b אברים בעלי סדרים זרים זה לזה בחבורה G המקיְמים $ab = ba$. הוכח ש $\langle a, b\rangle = \langle ab\rangle$.

2. הוכח שאם H היא תת חבורה בעלת אנדקס 2 של חבורה G אזי H נורמלית ב G.

3. קבע את כל החבורות מסדר לכל היותר 6. הוכח שכל החבורות מסדר ≤ 5 חלופיות והצבֵּע על חבורה מסדר 6 שאינה חלופית.

4. הוכח שאם H היא תת חבורה נאותה של חבורה סופית G (כלומר $H < G$), אזי $G \neq \bigcup_{x\in G} H^x$.

תרגיל 3 באלגברה ב1

1. עבור חבורה G נסמן $G^2 = \langle g^2 \mid g \in G \rangle$. הוכח ש $G^2 \lhd G$ ו G/G^2 חלופית.

2. תן דֻגמה לחבורה G המקיפה חבורה נורמלית N כך ש N ו G/N חלופיות אולם G עצמה אינה חלופית.

3. תן דֻגמה לחבורות $N_1 \lhd G_1$ ו $N_2 \lhd G_2$ המקַיְמות $N_1 \cong N_2$, $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$ אבל $G_1 \ncong G_2$.

4. תהי A תת חבורה חלופית נורמלית של חבורה סופית G המקַיֶמת $\gcd((G:A), |A|) = 1$. תהי $\varphi\colon G \to A$ העתקה המקַיֶמת $\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)^{g_2}\varphi(g_2)$ לכל $g_1, g_2 \in G$ ו $\varphi(a) = a^{-(G:A)}$ לכל $a \in A$ (φ נקרא **הומומורפיזם מְשֻׁכָּל** (crossed homomorphism)).

(א) הוכח ש $N = \{g \in G \mid \varphi(g) = 1\}$ הוא תת חבורה של G.

(ב) הוכח ש φ מעתיקה את A באפן חד חד ערכי לתוך עצמה.

(ג) הסֵק ש φ מעתיקה את A על עצמה וש $A \cap N = 1$.

(ד) הוכח את הנֻסחה $\varphi(ga) = \varphi(g)\varphi(a)$ לכל $g \in G$ ו $a \in A$.

(ה) נצל את (ג) ו (ד) כדי להוכיח ש $G = NA$.

5. יהיו A, B ו N תת חבורות של חבורה G. נניח ש $N \lhd G$, $A \le B$ ו $NA = G$. הוכח ש $(N \cap B)A = B$.

תרגיל 4 באלגברה ב1

1. הוכח שכל תת חבורה H בעלת אנדקס סופי של חבורה G מקיפה תת חבורה נורמלית N של G בעלת אנדקס סופי.

2. תהי H תת חבורה בעלת אנדקס סופי של חבורה G.
   (א) הוכח שאם H נוצרת סופית, גם G נוצרת סופית.
   (ב) הוכח שאם G נוצרת סופית, גם H נוצרת סופית.

פתרון: יהיו $x_1, \dots, x_e$ יוצרים של G. נציג את G כאחוד של מחלקות ימניות $G = \dot\bigcup_{i=1}^n Hg_i$ כך ש $g_1 = 1$. אזי יש רק מספר סופי של אברים מהצורה $g_i x_j^{\pm 1} g_k^{-1}$ השַיָכים ל H. נציג כל אבר $h \in H$ כמכפלה של אברים כאלו. לצרך זה נרשם קודם כל $h = y_1 y_2 \cdots y_m$ באשר $y_i \in \{x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}\}$. הואיל ו $g_1 = 1$ מתקיֵם $h = g_1 y_1 y_2 \cdots y_m g_1^{-1}$. עבור האבר $h_1 y_1$ קיָמים $f_1 \in \{g_1, \dots, g_n\}$ ו $h_1 \in H$ כך ש $g_1 y_1 = h_1 f_1$. לכן $g_1 y_1 f_1^{-1} \in H$ ו $h = (g_1 y_1 f_1^{-1}) f_1 y_2 \cdots y_m g_1^{-1}$. עתה נמשיך באנדוקציה על m ונציג את האבר $h' = f_1 y_2 \cdots y_m g_1^{-1}$ השיך ל H כמכפלה של אברים מהצורה $g_i x_j^{\pm 1} g_k^{-1}$ השַיָכים ל H. יחד עם הגורם הראשון נקבל את ההצגה המבֻקשת של h. ∎

3. נסמן ב $\mathbb{T}$ את חבורת המספרים המרֻכּבים בעלי ערך מֻחלט 1.
   (א) הוכח ש $\mathbb{C}^\times/\mathbb{T} \cong \mathbb{R}_{>0}^\times$.
   (ב) הוכח ש $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{T}$.

4. תהי A חבורה סופית. נניח של A יש בדיוק שלש חבורות חלקיות לא טריביאליות וכֻלן מסדר 2. הוכח ש $A \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

תרגיל 5 באלגברה ב1

1. הוכח שאם המרכז של חבורה G טריביאלי, גם המרכז של $\mathrm{Aut}(G)$ טריביאלי.

2. הוכח שאם A הנה חבורה חלופית מסדר n, אזי יש ל A סדרת הרכב $A = A_0 \triangleright A_1 \triangleright \cdots \triangleright A_r = 1$ כך ש $A_i/A_{i+1} \cong \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ באשר p_i ראשוני ו $n = p_0 p_1 \cdots p_{r-1}$.

3. סדרה של חבורות עם הומומורפיזמים

$$\cdots \longrightarrow G_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} G_i \xrightarrow{\varphi_i} G_{i+1} \longrightarrow \cdots \tag{1}$$

תִכֻנה מדֻיקת אם $\mathrm{Im}(\varphi_{i-1}) = \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ לכל i. הוכח שהסדרה

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 1$$

מדֻיקת אם ורק אם (א) α חד חד ערכי; (ב) $\alpha(A) = \mathrm{Ker}(\beta)$; ו (ג) β על. סדרה כזו נקראת **סדרה מדֻיקת קצרה**. הוכח שבמקרה זה $C \cong B/\alpha(A)$ ולכן, $|B| = |A| \cdot |C|$.

4. נניח שהסדרה (1) מדֻיקת. הוכח ש

$$|G_i| = |\mathrm{Ker}(\varphi_i)| \cdot |\mathrm{Ker}(\varphi_{i+1})|.$$

הסֵק שאם הסדרה סופית והיא מתחילה ומסתימת ב 1, אזי

$$\prod_{i \geq 1} |G_{2i-1}| = \prod_{i \geq 0} |G_{2i}|.$$

תרגיל 6 באלגברה ב1

1. יהי $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_k$ הפרוק של תמורה π ב S_n למכפלה של חשוקים זרים. נסמן ב l_i את הארך של π_i.
הוכח ש $\mathrm{ord}(\pi) = \mathrm{lcm}(l_1, \ldots, l_k)$ (lcm = הכפולה המשֻׁתפת המזערית).

2. מצא את כל סדרות ההרכֵּב של S_4.

3. אומרים על תת חבורה של S_n שהיא **יוצֵאת** (transitive) אם לכל $i \neq j$ בין 1 ל n קיָם $\sigma \in G$ כך ש $i^\sigma = j$. נניח שחבורה כזו מכילה את החשוק $\alpha = (1\,2\,\cdots\,n{-}1)$ ואת החלוף $\beta = (a\,b)$.
   (א) הוכח ש G מכילה חלוף מהצורה $(i\,n)$.
   (ב) הוכח ש G מכילה כל חלוף מהצורה $(i\,n)$.
   (ג) הוכח ש G מכילה כל חלוף.
   (ד) הסק ש $G = S_n$.

4. הוכח שאם $\alpha\colon G \to H$ הנו אפימורפיזם של חבורות ו G פתירה גם H פתירה.

תרגיל 7 באלגברה 1ב

1. הוכח שאם G היא חבורת תמורות יוצאת של הקבוצה $\{1, 2, \dots, p\}$ באשר p ראשוני ואם G מכילה חִלוף ואבר מסדר p, אזי $G = S_p$. הראה על ידי דֻגמה שטענה זו אינה נכונה אם p פריק.

פתרון: טענה: כל תמורה $\pi \in S_p$ מסדר p היא חִשוק מארך p.

ואכן, יהי $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_r$ הפרוק של π למכפלה של חשוקים זרים. אלו היה $r \geq 2$ היה הארֹך של כל אחד מהחשקים π_i קטן מ p ולכן זר ל p. הסדר של π הוא המכפלה המשֻתפת המזערית של אָרְכֵּי π. לכן $\mathrm{ord}(\pi)$ זו ל p, סתירה. לכן $r = 1$ ו π הוא חשוק.

לפי ההנחה קיֶמת ב G תמורה π מסדר p. מהטענה נובע, בלי הגבלת הכלליות, ש $\pi = (1\,2\,\cdots\,p)$. כמו כן קיָם ב G חשוקון $(i\,j)$ שבו $i < j$. אם $j = i+1$, אזי $\pi = (\cdots\,i\,j\,\cdots)$, אחרת π^{j-i-1} היא תמורה מסדר p ולכן, לפי הטענה, היא חשוק מסדר p שבו j חומד מיד אחרי i: $\pi^{j-i-1} = (\cdots\,i\,j\,\cdots)$.

בלי הגבלת הכלליות נקבל אפוא ש $(1\,2), (1\,2\,\cdots\,p) \in G$. לכן גם

$$(1\,3\,4\,\cdots\,p) = (1\,2)(1\,2\,\cdots\,p) \in G.$$

זהו חשוק מארך $p - 1$. הואיל ו G יוצאת, נובע מ 3. בתרגיל 6 ש $G = S_p$.

2. הוכח שאם G היא חבורת תמורות יוצאת של קבוצה סופית X ואם G נוצרת על ידי חִלופים, אזי $G = S(X)$. רמז: לכל תת קבוצה A של X התבונן בתת החבורה $S(A)$ של $S(X)$ הקובעת במקומו כל אבר של $X \setminus A$. הוכח שאם A היא תת קבוצה מרבית של X שעבורה $S(A) \leq G$, אזי $A = X$.

3. חשֵב את מספר האברים מסדר 2 ב A_8 ו S_8.

4. יהי p מספר ראשוני אי זוגי.

(א) תהי G חבורה לא חלופית אחת מסדר p^3 המקיֶמת $g^p = 1$ לכל $g \in G$. הוכח ש $Z(G) = \langle z \rangle$ היא חבורה מסדר p ו $G/\langle z \rangle \cong C_p \times C_p$ (באשר C_p היא החבורה המעגלית מסדר p). הסֵק ש G נוצרת על ידי שלשה אברים x, y, z המקיְמים את היחסים הבאים: $x^p = y^p = z^p = 1$, $z^x = z$, $z^y = z$ ו $x^y = xz$.

(ב) הסֵק מ (א) שאם H היא חבורה לא חלופית נוספת מסדר p^3 המקיֶמת $h^p = 1$ לכל $h \in H$, אזי $G \cong H$.

(ג) הוכח ש G איזומורפית לחבורת כל המטריצות

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

השיכות ל $\mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_p)$. חבורה זו נקראת **חבורת Heisenberg**.

פתרון חלק א: המרכָּז של G אינו טריביאלי (כי G הנה חבורת־p סופית). אלו המרכז היה מסדר גדול מ p היתה G אבלית, בנגוד להנחה. לכן, $Z(G) = \langle z \rangle$. הואיל ו $|G| = p^3$ נוצרת G על ידי z ועל ידי שני אברים נוספים x, y. נסמן את התמונות של אברי G ב $\bar{G} = G/\langle z \rangle$ תחת העתקת המנה בגג. בפרט $\bar{G} = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ היא חבורה מסדר p^2 שבה כל אבר השונה מהיחידה הוא מסדר p. לכן, $\bar{G} = C_p \times C_p$. בפרט, $\bar{x}^{-1}\bar{y}^{-1}\bar{x}\bar{y} = 1$. לכן, $x^{-1}y^{-1}xy = z^i$ עבור איזה שהוא i בין 0 ל $p-1$. אלו היה $i = 0$, היתה G אבלית, בנגוד להנחה. לכן, $1 \leq i \leq p-1$ ו z^i יוצר את החבורה $\langle z \rangle$. אם $i \geq 2$ נחליף את z ב z^i כדי להניח בכל מקרה ש $i = 1$. במלים אחרות, מתקיֵם

$$.xy = yxz \tag{1}$$

מכאן נובע שכל אבר של G נתן להצגה באפן יחיד כמכפלה $x^i y^j z^k$ באשר $0 \leq i, j, k \leq p-1$.

פתרון חלק ב: אם G' היא חבורה לא אבלית נוספת מסדר p^3 שבה $(g')^p = 1$ לכל $g' \in G'$, אזי, כמו בחלק א, נתן להציג כל אבר ב G' באפן יחיד כמכפלה $g' = (x')^i (y')^i (z')^j$, באשר $\mathrm{ord}(x') = \mathrm{ord}(y') = \mathrm{ord}(z') = p$ ו $Z(G) = \langle z' \rangle$. ההעתקה $(x, y, z) \mapsto (x', y', z')$ נתנת להרחבה לאיזומורפיזם של G על G'.

פתרון חלק ג: נסמן ב H את אסף כל המטריצות המופיעות בחלק ג. זוהי תת חבורה מסדר p^3. מחלק ב נובע שמספיק להוכיח שהחזקה ש p־ית של כל מטריצה ב H היא מטריצת היחידה ושהחבורה לא חלופית. ואכן, מוכיחים באנדוקציה על n ש

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na & nb + \frac{n(n-1)}{2}ac \\ 0 & 1 & nc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הואיל ו $p \neq 2$, נובע מכאן שאגף שמאל שוה למטריצת היחידה אם $n = p$. נסמן עתה

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אזי $z \in Z(H)$, $H = \langle x, y, z \rangle$ ו $xy = yxz$, כמבֻקש.

תרגיל 8 באלגברה ב1

.1

(א) הוכח של A_4 (זוהי חבורה מסדר 12) אין שום תת חבורה מסדר 6.

(ב) תאר את חבורות סילו־2 ואת חבורות סילו־3 של A_{12}.

.2 תהי G חבורה סופית, יהי p המספר הראשוני הקטן ביותר המחלק את הסדר של G ותהי H תת חבורה של G בעלת אנדקס p. הוכח ש H נורמלית ב G. רמז: שכן את G בתוך $S(G/H)$ והשתמש בגרעין של שכון זה.

.3 יהיו $p_1, \ldots, p_k$ כל המספרים הראשוניים המחלקים חבורה סופית G. לכל i תהי P_i חבורת סילו־p_i. הוכח ש $G = \langle P_1, \ldots, P_k \rangle$.

.4 הוכח שכל חבורה מסדר 20 פתירה.

תרגיל 9 באלגברה ב1

1. הוכח שאם N היא חבורה חלקית נורמלית של חבורה סופית G ו P היא חבורת סילו־p של N, אזי $G = N \cdot N_G(P)$. רמז: אם $g \in G$, אזי גם P^g היא חבורת סילו־p של N.

2. הבֵא דֻגמה לחבורה סופית G, לתת חבורה H (לא נורמלית) ולחבורת סילו־p של G כך ש $H \cap P$ אינה חבורת סילו־p של H.

3. להי A תת חבורה נורמלית של המכפלה הישרה $G = G_1 \times \cdots \times G_n$. נניח ש $A \cap G_i = 1$ עבור $i = 1, \ldots, n$. הוכח ש A מוכלת במרכז של G. בפרט, אם G_1 הנה חבורה אבלית, אזי G_1 מוכלת במרכז של G.

4. תהיינה $N_1, \ldots, N_r$ תת חבורות נורמליות בעלות אנדקס סופי של חבורה G. נסמן $N = \bigcap_{i=1}^r N_i$. נניח ש $(G : N) = \prod_{i=1}^r (G : N_i)$. הוכח ש $G/N \cong \prod_{i=1}^r G/N_i$.

תרגיל 10 באלגברה ב1

1. יהי p מספר ראשוני. לכל i בין 1 ל n תהי A_i חבורה מעגלית מסדר p^{k_i}. הוכח שהסכום הישר $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ אינו נוצר על ידי פחות מ n אברים. רמז: הסתמך על כך שמרחב וקטורי מממד n אינו נוצר על ידי פחות מ n אברים.

2. הוכח עבור שתי חבורות חלופיות A ו B בעלות דרגה סופי ש $\mathrm{rank}(A \oplus B) = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$.

3. הוכח שכל חבורה מסדר 18 פתירה.

4. תהי G חבורה סופית. נניח שעבור כל מספר טבעי d יש ל G לכל היותר תת חבורה אחת מסדר d. הוכח את הטענות הבאות:

   (א) כל תת חבורה של G נורמלית.

   (ב) לכל p ראשוני יש ל G רק חבורת סילו־p אחת G_p.

   (ג) שאם $x, y \in G_p$ אזי $\langle y \rangle \le \langle x \rangle$ או $\langle x \rangle \le \langle y \rangle$.

   (ד) G_p מעגלית.

   (ה) G מעגלית.

תרגיל 11 באלגברה ב1

1. תהי $G = \prod_{i \in I} S_i$ מכפלה ישרה של מספר סופי של חבורות סופיות פשוטות לא אבליות. הוכח שלכל תת חבורה נורמלית N קיֶמת תת קבוצה I_0 של I כך ש S_i $N = \prod_{i \in I_0} S_i$. רמז: הצג כל $n \in N$ כמכפלה $n = \prod_{i \in I} n_i$ באשר $n_i \in S_i$. אם $n_i \neq 1$ בחר $s_i \in S_i$ כך ש $[n_i, s_i] \neq 1$. עתה התבונן במחליפן $[n, s_i]$.

2. תהי A חבורה חלופית חסרת פתול ונוצרת סופית. הוכח שאם A מקיפה תת חבורה Z בעלת אנדקס סופי כך ש $Z \cong \mathbb{Z}$, אזי גם $A \cong \mathbb{Z}$.

3. תהי A חבורה חלופית נוצרת סופית. הוכח שאם הסדר של כל אבר של A סופי, גם A סופית.

4. קבע את כל החבורות החלופיות מסדר 24.