אלגברה חִלופית

משה ירדן, אוניברסיטת תל אביב, תשס"ז

תכן הענְיָנים

הקדמה

הקורס ב"אלגברה חִלופית" שנִתן במחצית השניה של תשס"ז ממשיך את הקורס ב"אלגברה ב3" שנתן על ידי בפעם ראשונה במחצית השניה של תשס"ה ובפעם השניה במחצית השניה של תשס"ו באוניברסיטת תל אביב. הקורס ב"אלגברה ב3" הִציג את יסודות האלגברה החלופית והגיע לשיאו בהוכחת הפריקות החד ערכית של חוג הטורים הפורמליים $K[[X_1,\ldots,X_n]]$ במשתנים $X_1,\ldots,X_n$ מעל שדה K. בהסתמך על תוצאה זו, חותר הקורס הנוכחי להוכיח שכל חוג נטר מקומי רגיל (regular) A המקיף את שדה המנות שלו הנו בעל פריקות חד ערכית, בפרט A סגור בשלמות (משפט 4.6.4). החשיבות של תוצאה זו נעוצה בכך שהחוג המקומי של כל נְקֻדה פשוטה על יריעה אלגברית הנו רגיל ולכן הוא בעל פריקות חד ערכית. עֻבדה זו משמשת בסיס לתורת החתוכים של מחלקים על יריעות. כדי להוכיח את משפט הפריקות החד ערכית של חוג נטר רגולרי A עוברים קודם להשלמה $\hat{A}$ של A ומוכיחים שהיא איזומורפית ל $K[[X_1,\ldots,X_r]]$, באשר $r=\dim(A)$. אחר כך משתמשים בפריקות החד ערכית של $K[[X_1,\ldots,X_r]]$ ובתוצאה המאפשרת להסיק את הפריקות החד ערכית של A מתוך זו של $\hat{A}$ (משפטון 2.6.9). כדי להוכיח את התוצאות האלו מפתח הקורס את המושגים, "השלמות של מודולים וחוגים", "חוגי ארטין" ו"תורת הממד". למושג האחרון יש חשיבות נפרדת בגאומטריה אלגברית.

הפרק האחרון של הרשימות מוכיח את בֹחן יעקבי לרגולריות של חוג מקומי גאומטרי, כלומר מְקום של חוג מקומי הנוצר סופית מעל שדה. לצרך זה אנו מפתחים את תורת הדיפרציאלים של קֶלֶר.

משה ירדן

מבשרת ציון, אִיָר, תשס"ז

1. הערכות בדידות וחוגי דדקינד

שדה מספרים הנו הרחבה סופית K של $\mathbb{Q}$. נסמן את הסגור השלם של $\mathbb{Z}$ ב K ב O_K. בדרך כלל אין ב O_K פריקות חד ערכית. אולם כל אידאל של O_K נִתן להצגה באפן חד ערכי כמכפלה של אידאלים ראשוניים. משפט זה הנו נקֻדת המוצא של תורת המספרים האלגבריים. באפן כללי יותר יש לכל אידאל של "חוג דדקינד" הצגה חד ערכית כמכפלה של אידאלים ראשוניים, כפי שנלמד בפרק זה.

1.1 הַעֲרכות בדידות.

יהי K שדה. **הערכה בדידה** של K הנה העתקה v של $K^\times$ על $\mathbb{Z}$ המקיֶמת לכל $x, y \in K^\times$,

(1א) $v(xy) = v(x) + v(y)$

(1ב) $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$.

נוהגים להרחיב את v לכל K על ידי שמגדירים $v(0) = \infty$, באשר ∞ הנו סימן שנוסף ל $\mathbb{Z}$ והמקיֵם את הכללים הבאים: $k < \infty$ לכל $k \in \mathbb{Z}$ ו $k + \infty = \infty$ לכל $k \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. תחת הגדרות אלו ממשיך כלל (1) להתקיֵם גם עבור כל $x, y \in K$.

מכלל (1א) נובע ש $v(1) = v(-1) = 0$ וש $v(-x) = v(x)$ לכל $x \in \mathbb{Z}$. כמו כן נובע מ (1) התנאי השמושי הבא:

(2) אם $x, y \in K$ מקיְמים $v(x) \neq v(y)$, אזי $v(x+y) = \min(v(x), v(y))$.

ואכן, נניח למשל ש $v(x) < v(y)$. אזי בנוסף ל (1ב) מתקיֵם

$$v(x) = v(x+y-y) \geq \min(v(x+y), v(y)) \geq v(x+y).$$

לכן, $v(x+y) = v(x)$.

הקבוצה $O_v = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$ הנה חוג הערכה של K, $M_v = \{x \in K \mid v(x) > 0\}$ הנו האידאל המרבי שלו ו $O_v^\times = \{x \in K \mid v(x) = 0\}$ הנה חבורת ההפיכים של O_v. לשני אברים $x, y \in K$ יש אותו ערך אם ורק אם $\frac{x}{y} \in O_v^\times$.

דֻגמה 1.1.1: יהי A חוג בעל פריקות חד ערכית עם שדה מנות K ויהי p אבר אי פריק של A. כל $a \in A$ נתן להצגה בצורה $a = \frac{x}{y}p^m$ באשר $x, y \in A$ אינם מתחלקים ב p ו $m \in \mathbb{Z}$. בהצגה זו נקבע m באפן יחיד על ידי a. נגדיר $v_p(a) = m$. הפונקציה $v_p \colon K^\times \to \mathbb{Z}$ המֻגדרת באפן כזה הנה הערכה בדידה של K המכֻנה **ההערכה ה p־אדית** .

במקרה שבו $A = \mathbb{Z}$ ו $K = \mathbb{Q}$ אין זה קשה להראות שכל הערכה בדידה של $\mathbb{Q}$ מתלכדת עם v_p עבור איזה שהוא מספר ראשוני p. אם $q \neq p$ ו הם מספרים ראשוניים, אזי $v_p \neq v_q$.

נתבונן במקרה שבו $A = K_0[x]$, K_0 שדה, $K = K_0(x)$ ו x נעלה מעל K. לכל פולינום אי פריק ומתֻקן $p \in K_0[x]$ מתקיֵם $v_p(a) = 0$ לכל $a \in K_0$. אומרים ש v_p **טריביאלית** על K_0 . אם $p \neq q$ הם פולינומים ראשוניים מתֻקנים השונים זה מזה, אזי $v_p \neq v_q$ ו v_q. להפך, כל הערכה של K שהיא טריביאלית על K_0 שוָה לאחת ההערכות v_p או להערכה v_∞ המֻגדרת על מנה $\frac{g}{h}$ של פולינומים על ידי הנֻסחה $v_\infty(\frac{g}{h}) = \deg(h) - \deg(g)$.

∎

תחום שלמות A נקרא **חוג הערכה בדידה** אם קיֶמת הערכה בדידה v על $K = \mathrm{Quot}(A)$ כך ש $A = O_v$.
במקרה זה A הוא תחום ראשי, בפרט A הנו חוג נטר. ואכן, יהי π אבר של A כך ש $v(\pi) = 1$. נבונן באידאל $\mathfrak{a} \neq 0$ של A. אזי $v(\mathfrak{a})$ הנו אידאל שונה מאפס של $\mathbb{Z}$ (אחרת היו כל אברי $\mathfrak{a}$ השונים מאפס אחדות). לכן $v(\mathfrak{a}) = k\mathbb{Z}$ עבור איזה שהוא מספר טבעי k. נבחר $a_0 \in \mathfrak{a}$ כך ש $v(a_0) = k$. אזי, $v(a_0) = v(\pi^k)$. לכן, $\frac{\pi^k}{a_0}$ הנה אחדה של A ומכאן ש $\pi^k \in \mathfrak{a}$. כל אבר $a \in \mathfrak{a}$ מקיֵם $v(a) \geq k$ ולכן, $a = \frac{a}{\pi^k}\pi^k \in A\pi^k$. מכאן נובע ש $\mathfrak{a} = O_v\pi^k$ הוא אידאל ראשי.

המשפט הבא נותן אפיונים שונים לחוג הערכה בדידה:

משפטון 1.1.2: *יהי A תחום שלמות נטרי מקומי שבו האידאל המרבי $\mathfrak{m}$ הוא האידאל הראשוני היחיד השונה מאפס. יהיו K שדה המנות ו $\bar{K} = A/\mathfrak{m}$ שדה השאריות של A. הטענות הבאות שקולות זו לזו:*

(א) *A הנו חוג הערכה בדידה.*

(ב) *A סגור בשלמות.*

(ג) *$\mathfrak{m}$ הנו אידאל ראשי.*

(ד) $\dim_{\bar{K}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$.

(ה) *כל אידאל שונה מאפס של A הנו חזקה של $\mathfrak{m}$.*

(ו) *קיָם $\pi \in A$ כך שכל אידאל שונה מאפס של A הנו מהצורה $A\pi^n$ עבור איזה שהוא $n \geq 0$ שלם.*

הוכחה: נתחיל את ההוכחה בשתי הערות:

(א2) יהי $\mathfrak{a}$ אידאל נאות שונה מאפס של A. אזי קיָם m כך ש $\mathfrak{m}^m \subseteq \mathfrak{a}$. ואכן, לפי ההנחה, $\mathfrak{m}$ הנו האידאל הראשוני היחיד המקיף את $\mathfrak{a}$. לכן, $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{m}$. יהיו $x_1, \ldots, x_m$ יוצרים של $\mathfrak{m}$ (A הנו חוג נטר). קיָם אפוא מספר טבעי k כך ש $x_1^k, \ldots, x_m^k \in \mathfrak{a}$ ולכן $\mathfrak{m}^{km} \subseteq \mathfrak{a}$.

(ב2) $\mathfrak{m}^{n+1} \neq \mathfrak{m}^n$ לכל n טבעי. ואכן, אם $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$ עבור איזה שהוא n, אזי $\mathfrak{m}^r = \mathfrak{m}^n$ לכל $r \geq n$. לכן, לפי משפט קרול [אלגברה ב3, מסקנה ט.ה], $\mathfrak{m}^n = \bigcap_{r=n}^{\infty} \mathfrak{m}^r = 0$. בסימונים של (א2) נובע ש $x_i^n = 0$ ולכן $x_i = 0$ עבור $i = 1, \ldots, n$. מכאן נובע ש $\mathfrak{m} = 0$, סתירה.

הוכחת (א) $\Longleftarrow$ (ב): יהי $x \in K$ אבר המקיֵם משואה מהצורה $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ שבה $a_0, \ldots, a_n \in A$. נסמן ב v את ההערכה הבדידה המתאימה ל A. אלו היה $v(x) < 0$ היינו מקבלים מ (ב1)

שהערך של אגף שמאל של השויון הנו $nv(x)$ בעוד שהערך של אגף ימין הנו אינסוף, סתירה. לכן, $v(x) \geq 0$ ומכאן ש $x \in A$, כנדרש.

הוכחת (ב) $\Longleftarrow$ (ג): נבחר $x \in \mathfrak{m}$, $x \neq 0$. לפי (2א) קיָם n טבעי כך ש $Ax \subseteq \mathfrak{m}^n$ ו $Ax \not\subseteq \mathfrak{m}^{n-1}$. נבחר $y \in \mathfrak{m}^{n-1} \smallsetminus Ax$ ונסמן $\pi = \frac{x}{y}$. אזי $\pi^{-1} \notin A$ (אחרת היה $y \in Ax$). לכן, π^{-1} אינו שלם מעל A. הואיל ו $\mathfrak{m}$ הנו מודול־$A[x]$ נאמן נוצר סופית, $\pi^{-1}\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{m}$ [אלגברה ב3, משפטון ו.א]. מצד שני, $y\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^{n-1}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^n \subseteq Ax$ ולכן $\pi^{-1}\mathfrak{m} \subseteq A$. קבלנו אפוא ש $\pi^{-1}\mathfrak{m}$ הוא אידאל של A שאינו מוכל באידאל המרבי של A. לכן, $\pi^{-1}\mathfrak{m} = A$ ומכאן ש $\mathfrak{m} = \pi A$, כפי שהיה להוכיח.

הוכחת (ג) $\Longleftarrow$ (ד): תנאי (ג) נותן $\pi \in A$ כך ש $\mathfrak{m} = A\pi$. לכן, $\dim_{\bar{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq 1$. מצד שני, לפי (2ב), $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \neq 0$. לכן, $\dim_{\bar{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$.

הוכחת (ד) $\Longleftarrow$ (ה): יהי $\mathfrak{a}$ אידאל שונה מאפס של A. מההנחה ש $\dim_{\bar{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$ נובע לפי נקָיָמה [אלגברה ב3, משפטון ג.ה] שקיים $\pi \in A$ כך ש $\mathfrak{m} = A\pi$. לפי משפט קרול, קיָם n טבעי כך ש $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}^n$ ו $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{m}^{n+1}$. נבחר $y \in \mathfrak{a} \smallsetminus \mathfrak{m}^{n+1}$. אזי $y = u\pi^n$ עבור איזה u שהוא $u \in A \smallsetminus \mathfrak{m}$. בפרט, u הפיך ו $\mathfrak{m}^n = A\pi^n = Ay \subseteq \mathfrak{a}$. לכן, $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^n$, כמבֻקש.

הוכחת (ה) $\Longleftarrow$ (ו): נבחר לפי (2ב) אבר $\pi \in \mathfrak{m} \smallsetminus \mathfrak{m}^2$. לפי ההנחה קיָם n כך ש $A\pi = \mathfrak{m}^n$. אזי $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{m}$ ו $\mathfrak{m}^n \not\subseteq \mathfrak{m}^2$. לכן, $n = 1$ ו $\mathfrak{m} = A\pi$. הואיל וכל אידאל שונה מאפס הנו חזקה של $\mathfrak{m}$ נקבל שכל אידאל שונה מאפס הנו מהצורה $A\pi^n$ עבור איזה n שהוא.

הוכחת (ו) $\Longleftarrow$ (א): יהי $x \in A$, $x \neq 0$. ההנחה נותנת n טבעי כך ש $Ax = A\pi^n$. לכן קיָם $u \in A^\times$ כך ש $x = u\pi^n$. נגדיר אפוא $v(x) = n$. הפונקציה $v\colon A \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ שהֻגדרה בזה מקיֶמת את תנאי (1) לכל $x, y \in A \smallsetminus \{0\}$. נוכל להרחיב אותה להערכה של K על ידי שנגדיר $v(\frac{x}{y}) = v(x) - v(y)$ לכל $x, y \in A \smallsetminus \{0\}$. חוג ההערכה של v יהיה A. ∎

1.2 הצגה של אידאלים כמכפלה של אידאלים מקדימים.

נזכיר שאידאל $\mathfrak{q}$ של חוג A מכֻנה **מקדים** (primary) אם מתוך $xy \in \mathfrak{q}$ נובע ש $x \in \mathfrak{q}$ או $y \in \sqrt{\mathfrak{q}}$ (כלומר קיָם n טבעי כך ש $y^n \in \mathfrak{q}$). במקרה זה $\sqrt{\mathfrak{q}}$ הנו אידאל ראשוני. ואכן נניח ש $xy \in \sqrt{\mathfrak{q}}$ ו $x \notin \sqrt{\mathfrak{q}}$. אזי קיָם n טבעי כך ש $x^n y^n \in \mathfrak{q}$ ו $x^n \notin \sqrt{\mathfrak{q}}$. לכן, $y^n \in \sqrt{\mathfrak{q}}$ ומכאן ש $y \in \sqrt{\mathfrak{q}}$, כנדרש. הואיל ו $\sqrt{\mathfrak{q}}$ הנו החתוך של כל האידאלים הראשוניים המקיפים את $\mathfrak{q}$, מהוה $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ האידאל המזערי היחיד מבין האידאלים הראשוניים המקיפים את $\mathfrak{q}$. נאמר גם ש $\mathfrak{p}$ **שיָך** ל $\mathfrak{q}$.

הצגה $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{q}_i$ של אידאל $\mathfrak{a}$ כחתוך של אידאלים מקדימים מכֻנה **מצֻמצמת** אם אי אפשר להשמיט ממנה אף אחד מהנחתכים ואם האידאלים הראשוניים $\sqrt{\mathfrak{q}_1}, \ldots, \sqrt{\mathfrak{q}_m}$ שונים זה מזה.

על שני אידאלים $\mathfrak{a}$ ו $\mathfrak{b}$ בחוג A נאמר **שהם זרים זה לזה** אם אינם מוכלים באידאל מרבי מְשֻתף, לחִלופין $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=A$.

למה 1.2.1: *יהי $\mathfrak{a}$ ו $\mathfrak{b}$ אידאלים בחוג A. אם $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ו $\sqrt{\mathfrak{b}}$ זרים זה לזה גם $\mathfrak{a}$ ו $\mathfrak{b}$ זרים זה לזה.*

הוכחה: הנחת הלמה נותנת $a\in\sqrt{\mathfrak{a}}$ ו $b\in\sqrt{\mathfrak{b}}$ כך ש $a+b=1$. יהיו m,n מספרים טבעיים כך ש $a^m\in\mathfrak{a}$ ו $b^n\in\mathfrak{b}$. אזי

$$1=(a+b)^{m+n}=\sum_{i=0}^{m+n}\binom{m+n}{i}a^ib^{m+n-i}.$$

לכל $0\le i\le m+n$ או ש $i\ge m$ או ש $m+n-i\ge n$. במקרה הראשון $a^ib^{m+n-i}\in\mathfrak{a}$ ובמקרה השני $a^ib^{m+n-i}\in\mathfrak{b}$. לכן, $\mathfrak{q}_1+\mathfrak{q}_2=A$, כנדרש. ∎

למה 1.2.2 ([אלגברה ב3, משפטון א.יא(א)]): *יהיו $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n$ אידאלים בחוג A אשר כל שנים מהם זרים זה לזה. אזי $\prod_{i=1}^n\mathfrak{a}_i=\bigcap_{i=1}^n\mathfrak{a}_i$.*

למה 1.2.3: *יהי A תחום שלמות של נטר שבו כל אידאל ראשוני שונה מאפס מרבי. אזי כל אידאל שונה מאפס $\mathfrak{a}$ נִתן להצגה יחידה כמכפלה של אידאלים מקדימים זרים זה לזה.*

הוכחת קיום: אם $\mathfrak{a}=A$, אזי $\mathfrak{a}$ הנו מכפלה של קבוצה ריקה של אידאלים מקדימים. נניח אפוא ש $\mathfrak{a}\ne A$. תהי $\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^m\mathfrak{q}_i$ הצגה מקדימה מצֻמצמת של $\mathfrak{q}$ [אלגברה ב3, משפטון י.ז]. לכל i, הרדיקל $\mathfrak{p}_i=\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ הוא אידאל ראשוני שונה מאפס (כי $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{q}_i\subseteq\mathfrak{p}_i$) ולכן מְרַבִּי. יתר על כן, האידאלים $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_m$ שונים זה מזה. הואיל ולפי ההנחה $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_m$ מרביים, הם זרים זה לזה. לפי למה 1.2.1, האידאלים $\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_m$ זרים זה לזה. לפי למה 1.2.2, $\bigcap_{i=1}^m\mathfrak{q}_i=\prod_{i=1}^m\mathfrak{q}_i$. לכן, $\mathfrak{a}=\prod_{i=1}^m\mathfrak{q}_i$.

הוכחת יחידות: יהי $\mathfrak{p}$ אידאל מרבי של A השיך לאידאל מקדים $\mathfrak{q}$ המופיע בהצגה של $\mathfrak{a}$ כמכפלה של אידאלים מקדימים זרים זה לזה. אזי $\prod_{i=1}^m\mathfrak{q}_i=\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{q}\subseteq\mathfrak{p}$. לכן, לפי [אלגברה ב3, משפטון א.יג(ב)], $\mathfrak{p}$ מקיף אחד מגורמים באגף שמאל, למשל $\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{q}_1$. לכן, $\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{p}_1$. הואיל ושני האידאלים הללו מרביים, $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_1$.

אם $\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{q}_i$ עבור איזה שהוא $1\le i\le n$, אזי $\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{p}_i$ ולכן, $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_i$, כלומר $i=1$. לפי [אלגברה ב3, משפטון ה.ט], $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}=\prod_{i=1}^n\mathfrak{q}_iA_\mathfrak{p}=\mathfrak{q}_1A_\mathfrak{p}$. לכן, $A\cap\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}_1}=A\cap\mathfrak{q}_1A_{\mathfrak{p}_1}=\mathfrak{q}_1$. מכאן שגם האידאלים הקדומים $\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_n$ נקבעים באֹפן יחיד על ידי $\mathfrak{a}$. ∎

1.3 **חוגי דדקינד.**

חוג המקיֵם את התנאים השקולים של המשפט הבא נקרא **חוג דדקינד** .

משפט 1.3.1: *יהי A תחום שלמות נטרי שבו כל אידאל ראשוני שונה מאפס מרבי. אזי הטענות הבאות שקולות זו לזו.*

(א) *A סגור בשלמות.*

(ב) *לכל אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$ שונה מאפס של A החוג המקומי $A_\mathfrak{p}$ הנו חוג הערכה בדידה.*

(ג) *כל אידאל מקדים של A הנו חזקה של אידאל ראשוני.*

הוכחת (א) $\Longrightarrow$ (ב): יהי $\mathfrak{p}$ אידאל ראשוני שונה מאפס של A. אזי $A_\mathfrak{p}$ הנו חוג נטר [אלגברה בג, משפטון ח.ב] סגור בשלמות [אלגברה בג, משפטון ו.יב] וכל אידאל ראשוני שונה מאפס של $A_\mathfrak{p}$ הנו מרבי [אלגברה בג, משפטון ה.ט]. לפי משפטון $1.1.2$, $A_\mathfrak{p}$ הנו חוג הערכה בדידה.

הוכחת (ב) $\Longrightarrow$ (ג): יהי $\mathfrak{q}$ אידאל מקדים של A ויהי $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ האידאל הראשוני השַיך לו. אזי, $\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}$ הנו אידאל מקדים של $A_\mathfrak{p}$. יתר על כן, $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}}$ [אלגברה בג, משפטון ה.ט]. לכן, לפי משפטון $1.2.2$(ה), קיָם n טבעי כך ש $\mathfrak{q}A_\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})^n$. אם נחתך את שני האגפים ב A נקבל ש $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^n$ [אלגברה בג, משפטון ה.ט].

הוכחת (ג) $\Longrightarrow$ (א): כדי להוכיח ש A סגור בְשלמות מספיק להוכיח ש $A_\mathfrak{p}$ סגור בשלמות לכל אידאל ראשוני שונה מאפס $\mathfrak{p}$ של A [אלגברה בג, משפטון ו.יב]. לפי משפטון $1.1.2$, מספיק להוכיח שכל אידאל שונה מאפס של $A_\mathfrak{p}$ הנו חזקה של $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. ואכן, לפי [אלגברה בג, משפטון ה.ט], נתן להציג כל אידאל שונה מאפס של $A_\mathfrak{p}$ כ $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}$ באשר $\mathfrak{a}$ הנו אידאל שונה מאפס של A. לפי למה $1.2.3$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\cdots\mathfrak{q}_m$ באשר $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_m$ הנם אידאלים מקדימים של A השיָכים לאידאלים ראשוניים $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m$ שונים זה מזה. לפי ההנחה, קיָם לכל i אידאל ראשוני $\mathfrak{l}$ ומספר טבעי k_i כך ש $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{l}^{k_i}$. בפרט $\mathfrak{q}_i \subseteq \mathfrak{l}$ ולכן $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{l}$. מהמרביות של $\mathfrak{p}_i$ נובע ש $\mathfrak{l} = \mathfrak{p}_i$. לכן $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i^{k_i}$ ו $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{k_1}\mathfrak{p}_2^{k_2}\cdots\mathfrak{p}_n^{k_n}$. רק אחד מהאידאלים $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ יכול לשווֹת ל $\mathfrak{p}$. נאמר אפוא ש $\mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n \neq \mathfrak{p}$. אזי, $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1^{k_1}A_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}_2^{k_2}A_\mathfrak{p}\cdots\mathfrak{p}_n^{k_n}A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1^{k_1}A_\mathfrak{p}$. אם $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}$, אזי $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})^0$, אחרת $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})^{k_1}$. בשני המקרים $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}$ הנו חזקה של $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, כנדרש. ∎

הוכחת "(ג) $\Longrightarrow$ (א)" של משפט $1.3.1$ כוללת בתוכה גם את ההוכחה של התוצאה הבאה:

משפט $1.3.2$: *בחוג דדקינד, יש לכל אידאל שונה מאפס פרוק חד ערכי למכפלה של אידאלים ראשוניים.*

דֻגמה $1.3.3$: חוגים ראשיים. יהי A חוג ראשי. בפרט A הנו חוג נטר בעל פריקות חד ערכית. לכן, כל אידאל ראשוני שונה מאפס של A מרבי. בנוסף לכך, A סגור בשלמות (דִיון אחרי [אלגברה בג, משפטון ו.י]). לכן, A הנו חוג דדקינד. בפרט $\mathbb{Z}$ ו $K_0[x]$ (K_0 שדה) הם חוגי דדקינד. ∎

החוגים הראשיים מביאים בעקבותיהם דֻגמאות נוספות של חוגי דדקינד:

משפט $1.3.4$: *יהי A חוג דדקינד בעל שדה מנות K. יהי L הרחבה פרידה סופית של K ונסמן ב B את הסגור השלם של A ב L. אזי B הנו חוג דדקינד.*

הוכחה: לפי ההגדרה A הנו תחום נטר סגור בשלמות. לפי [אלגברה בג, משפטון ח.ח(א)], גם B הוא תחום נטר סגור בשלמות. הואיל וכל אידאל ראשוני שונה מאפס של A מרבי, גם כל אידאל ראשוני שונה מאפס של B מרבי [אלגברה בג, תוצאה ו.ח]. לכן, B הוא חוג דדקינד. ∎

דֻגמה 1.3.5: יהי K הרחבה סופית של $\mathbb{Q}$. נסמן ב O_K את הסגור השלם של $\mathbb{Z}$ ב K. לפי דֻגמה 1.3.3, $\mathbb{Z}$ הנו חוג דדקינד. לכן, לפי משפט 1.3.4, גם O_K הוא חוג דדקינד.

עתה יהיו K_0 שדה, x משתנה, $K = K_0(x)$ ו L הרחבה פרידה סופית של K. אזי הסגור השלם של $K_0[x]$ ב L הנו חוג דדקינד. ∎

תרגיל 1.3.6: יהי A חוג דדקינד בעל שדה מנות K. יהי L הרחבה אי פרידה בטהרה סופית של K ונסמן ב B את הסגור השלם של A ב L. הוכח ש B הוא חוג דדקינד. הסק שמשפט 1.3.4 נכון לכל הרחבה סופית של K. ∎

2. השלמות

כדי לחקר חוג A חוקרים לפעמים קודם כל את החוגים המקומיים של A באידאלים ראשוניים. לחוג מקומי יש רק אידאל מרבי אחד ולכן הוא פשוט יותר מחוג כללי. כדי לחקר חוג מקומי $(A, \mathfrak{m})$, נוח לפעמים לעבר להשלמה שלו $\hat{A}$ ביחס ל $\mathfrak{m}$. העֻבדה שבהשלמה כל סדרת קושי מתכנסת מאפשרת להוכיח תכונות של ההשלמה. כך למשל מוכיחים שחוג טורי החזקות הפורמליים $K[[X_1, \ldots, X_n]]$ הנו בעל פרוק חד ערכי [אלגברה ב3, משפט יג.ט]. התוצאה המרכזית של הפרק הנוכחי היא שאם ההשלמה של חוג נטר מקומי היא בעלת פריקות חד ערכית, גם החוג עצמו בעל פריקות חד ערכית (משפטון 2.6.9). כמובן, כדי להוכיח תכונות של $\hat{A}$, רצוי לדעת כיצד עוברות אליה התכונות הבסיסיות של A. אנו נוכיח שאם A הוא חוג נטר, גם $\hat{A}$ הנו חוג נטר (משפט 2.7.5).

2.1 גבולות הפוכים.

נגדיר בסעיף זה מהו גבול הפוך של מודולים ונראה שפונקטור הגבול ההפוך הנו מדֻיק, כלומר גבול הפוך של סדרות מדֻיקות של מודולים הנו הסדרה המדֻיקת של הגבולות ההפוכים.

למה 2.1.1 (למת הנחש): *לכל תרשים חלופי של מודולֵי־A*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\alpha} & L & \xrightarrow{\beta} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\kappa} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle\mu} & & \\ 0 & \longrightarrow & K' & \xrightarrow{\alpha'} & L' & \xrightarrow{\beta'} & M' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

שבו שתי הסדרות המאֻזנות מדֻיקות מתאימה באפן טבעי סדרה מדֻיקת

$$0 \to \mathrm{Ker}(\kappa) \xrightarrow{\alpha_0} \mathrm{Ker}(\lambda) \xrightarrow{\beta_0} \mathrm{Ker}(\mu) \xrightarrow{d} \mathrm{Coker}(\kappa) \xrightarrow{\overline{\alpha'}} \mathrm{Coker}(\lambda) \xrightarrow{\overline{\beta'}} \mathrm{Coker}(\mu) \to 0$$

בסדרה זו α_0 ו β_0 הם הצמצומים של α ו β בהתאמה ו $\overline{\alpha'}$ ו $\overline{\beta'}$ הם העתקות המנה המֻשרות על ידי α' ו β' בהתאמה. בְּיֶתר דיוק, $\overline{\alpha'}(k' + \kappa(K)) = \alpha'(k') + \lambda(L)$ ו $\overline{\beta'}(l' + \lambda(L)) = \beta'(l') + \mu(M)$. ההעתקה d הנה **הומומורפיזם השפה** *ומֻגדרת באפן הבא: בהנתן $m \in M$ בוחרים $l \in L$ כך ש $\beta(l) = m$, $k' \in K'$ כך ש $\alpha'(k') = \lambda(l)$ ומגדירים $d(m) = k' + \kappa(K)$.*

הוכחה: קודם כל יש להוכיח ש d מֻגדר היטב. לאחר זאת מפעילים "מרדף תרשימים" (diagram chase) כדי להוכיח את הדיוק של הסדרה הארֻכה. הפרטים מֻשארים לקורא. ∎

בהנתן סדרה $M_1, M_2, M_3, \ldots$ של מודולי־A והומומורפיזמים $\mu_{n+1}\colon M_{n+1} \to M_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, מגדירים את **הגבול ההפוך** $\varprojlim M_n$ כאסף כל הסדרות $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \prod_{n=1}^{\infty} M_n$

המקיִמות $\mu_{n+1}(x_{n+1}) = x_n$ לכל n טבעי. הגבול ההפוך הנו מודול־A. לאסף הנתונים $(M_n, \mu_{n+1})_{n=1,2,3,\ldots}$ נקרא **סדרה הפוכה של מודולי־**A .

למה 2.1.2 (למת דיוק א): *כל סדרת תרשימים חלופיים*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_{n+1} \arrow[r, "\alpha_{n+1}"] \arrow[d, "\kappa_{n+1}"'] & L_{n+1} \arrow[r, "\beta_{n+1}"] \arrow[d, "\lambda_{n+1}"'] & M_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\mu_{n+1}"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_n \arrow[r, "\alpha_n"] & L_n \arrow[r, "\beta_n"] & M_n \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{1}$$

של מודולי־A שבהם השורות המאֻזנות מדֻיָקות משרה סדרה קצרה

$$0 \longrightarrow \varprojlim K_n \xrightarrow{\alpha} \varprojlim L_n \xrightarrow{\beta} \varprojlim M_n \longrightarrow 0. \tag{2}$$

אם כל אחת מההעתקות κ_{n+1} על, אזי הסדרה הקצרה מדֻיֶקת.

הוכחה: ההעתקה α מֻגדרת באפן טבעי על ידי הכלל

$$\alpha((a_n)_{n=1,2,3,\ldots}) = (\alpha_n(a_n))_{n=1,2,3,\ldots} \tag{3}$$

ההעתקה β מֻגדרת באפן דומה. כדי להוכיח את הדיוק של הסדרה (2) נסמן $K = \prod_{n=1}^{\infty} K_n$, $L = \prod_{n=1}^{\infty} L_n$ ו $M = \prod_{n=1}^{\infty} M_n$. עתה נגדיר הומומורפיזם $\zeta_K \colon K \to K$ על ידי

$$\zeta_K((x_n)_{n=1,2,\ldots}) = (x_n - \kappa_{n+1}(x_{n+1}))_{n=1,2,\ldots}.$$

מההגדרת הגבול ההפוך נובע ש $\varprojlim K_n = \mathrm{Ker}(\zeta_K)$. באפן דומה מגדירים את ζ_L ואת ζ_M ומצביעים על כך ש $\varprojlim L_n = \mathrm{Ker}(\zeta_L)$ ו $\varprojlim M_n = \mathrm{Ker}(\zeta_M)$. ההגדרה (3) של α מרחיבה את α להומומורפיזם מ K ל L. באפן דומה מתרחב β להומומורפיזם של L לתוך M. אסף התרשימים החלופיים (1) משרה תרשים חלופי

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\zeta_K"'] & L \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\zeta_L"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\zeta_M"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\alpha"] & L \arrow[r, "\beta"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

שבו השורות המאֻזנות מדֻיָקות. למת הנחש נותנת סדרה מדֻיֶקת ארֻכה:

$$0 \to \mathrm{Ker}(\zeta_K) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ker}(\zeta_L) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Ker}(\zeta_M) \to \mathrm{Coker}(\zeta_K) \to \mathrm{Coker}(\zeta_L) \to \mathrm{Coker}(\zeta_M) \to 0.$$

כדי לסיֵם את הוכחת המשפט מספיק להוכיח ש $\mathrm{Coker}(\zeta_K) = 0$ תחת ההנחה שכל אחת מההעתקות κ_n על. ואכן, בהנתן $(a_1, a_2, a_3, \ldots) \in K$ נגדיר באנדוקציה $x_n \in K_n$ על ידי $x_1 = 0$ ובהנחה ש x_n הֻגדר כבר נבחר $x_{n+1} \in K_{n+1}$ כך ש $\kappa_{n+1}(x_{n+1}) = x_n - a_n$. אזי $\zeta_K((x_n)_{1,2,\ldots}) = (a_n)_{n=1,2,\ldots}$. לכן, ζ_K על ומכאן ש $\mathrm{Coker}(\zeta_K) = 0$, כנדרש. ∎

2.2 מודולים טופולוגיים.

בסעיף זה נגדיר מהו מודול טופולוגי, מהי ההשלמה שלו ונוכיח שהשלמה זו היא אכן מְשלמת.

יהי M מודול־A בעל טופולוגיה. נאמר ש M הנו **מודול טופולוגי** אם העתקת ההפרש $M \times M \to M$ הנתונת על ידי $(x,y) \to x-y$ והעתקת הכפל בסקלר $A \times M \to M$ הנְתונת על ידי $(a,x) \to ax$ רציפות. כמו כן נניח שיש לסביבות האפס ב M בסיס בן מניה. אם החתוך של כל אברי בסיס זה הנו האפס בלבד, אזי האפס הוא נקֻדה סגורה של M. ואכן, יהי x אבר של M השונה מאפס. אזי קיֶמת סביבה פתוחה U של 0 כך ש $x \notin U$. לכן, $x-U$ היא סביבה פתוחה של x שאינה מכילה את האפס. מכאן ש $M \smallsetminus \{0\}$ פתוחה ב M, כמבֻקש. מכאן נובע שהאלכסון $D = \{(x,x) \mid x \in M\}$, שהוא התמונה ההפוכה של 0 תחת ההעתקה הרציפה $(x,y) \mapsto x-y$, הנו תת קבוצה סגורה של $M \times M$. אם $x,y \in M$ ו $x \neq y$, אזי $(M \times M) \smallsetminus D$ הנה סביבה פתוחה של (x,y) ולכן קימות תת קבוצות פתוחות U,V של M כך ש $(x,y) \in U \times V \subseteq (M \times M) \smallsetminus D$. במלים אחרות, U ו V הן סביבות פתוחות זרות זו לזו של x ו y. לכן M הנו מרחב האוסדורף. להפך, אם M האוסדורף, אזי 0 היא נקֻדה סגורה של M ולכן החתוך של כל הסביבות הפתוחות של 0 שוה ל 0.

נאמר שסביבה U של אפס הנה **סימטרית** אם $-U = U$. אם U היא סביבה פתוחה כל שהיא של 0, אזי $U \cap -U$ הנה סביבה פתוחה סימטרית של 0 המוכלת ב U. חִתוך של קבוצות פתוחות סימטריות הנו שוב קבוצה פתוחה סימטרית.

לכל סביבה פתוחה U של 0, לכל n טבעי קיֶמת סביבה פתוחה סימטרית V של 0 כך ש $\sum_{i=1}^n V \subseteq U$. ואכן, הרציפות של החבור והזהות $\sum_{i=1}^n 0 = 0$ נותנת סביבות פתוחות $U_1,\dots,U_n$ של 0 כך ש $\sum_{i=1}^n U_i \subseteq U$. לפי הפסקה הקודמת נוכל להניח ש U_i סימטרית. הקבוצה $V = \bigcap_{i=1}^n U_i$ ממלאת אחר הטענה.

סִדרה $(x_1,x_2,x_3,\dots)$ של אברי M הנה **קושי** אם לכל סביבה פתוחה U של 0 קיָם $s(U)$ טבעי כך שאם $m,n \geq s(U)$, אזי $x_m - x_n \in U$. אם כל סדרת קושי ב M מתכנסת לאבר יחיד אומרים ש M **מְשלם** (complete) .

כל סדרה מתכנסת הנה סדרת קושי. ואכן, אם $x_n \to x$ ו U סביבת־0 ב M, נבחר סביבת־0 סימטרית V כך ש $V - V \subseteq U$. עבורה קיָם $s(V)$ כך שאם $n \geq s(V)$, אזי $x_n - x \in V$. לכן, $x_n - x_m = (x_n - x) + (x - x_m) \in V + V \subseteq U$, כנדרש.

על שתי סְדרות $(x_1,x_2,x_3,\dots)$ ו $(y_1,y_2,y_3,\dots)$ נאמר שהן **שקולות** אם $x_n - y_n \to 0$. יחס השקילות תואם לחבור ולכפל באברי A. לכן, אם נסמן את אֹסף מחלקות השקילות של סדרות קושי ב $\hat{M}$, נקבל ש $\hat{M}$ הנו מודול־A, באשר החבור והכפל באברי A מֻגדר בעזרת מיַצגים. לכל סביבה פתוחה U של 0 ב M נסמן ב $\hat{U}$ את אסף כל אברי $\hat{M}$ המיֻצגים על ידי סדרות שכמעט כל אבריהן שיָכים ל U. אם $U_1 \subseteq U_2$, אזי $\hat{U}_1 \subseteq \hat{U}_2$. מהזהות $\hat{U}_1 \cap \hat{U}_2 = \widehat{U_1 \cap U_2}$ נובע שאסף הקבוצות $\hat{U}$ מהוה בסיס לסביבות 0 של טופולוגיה של $\hat{M}$. אם אבר x שיָך לכל הקבוצות הפתוחות $\hat{U}$ ו $(x_1,x_2,x_3,\dots)$ היא סדרה של אברי M המיַצגת את x, אזי סדרה זו שואפת

לאפס ולכן $x=0$. מכאן ש $\hat{M}$ הנו האוסדורף (גם אם M אינו האוסדורף).

ההגדרה של הקבוצות $\hat{U}$ נותנת גם את הכלל השִׁמושי $\hat{U}_1+\hat{U}_2\subseteq\widehat{U_1+U_2}$.

העתקת האלכסון המעתיקה אבר $x\in M$ למחלקת השקילות של הסדרה $(x,x,x,\ldots)$ הנה הומומורפיזם טבעי רציף של M לתוך $\hat{M}$. הגרעין שלו הנו החתוך של כל סביבות האפס של M. אף על פי כן, נדבר על אבר של x כאבר של $\hat{M}$ במקום על תמונתו הקנונית ב $\hat{M}$. תחת הסכם זה, $\hat{U}\cap M=U$ לכל סביבת־0 U ב M. יתר על כן, M צפוף ב $\hat{M}$. ואכן, אם x מיֻצג על ידי סדרת קושי $(x_1,x_2,x_3,\ldots)$ ו U היא סביבת־0 ב M, אזי קיָם $s(U)$ טבעי כך ש $x_n-x_m\in U$ לכל $n,m\geq s(U)$. לכן, אם נקבע $n\geq s(U)$, נקבל ש $x_n-x\in\hat{U}$, כלומר $x_n\in x+\hat{U}$. יתר על כן, $x_n\to x$.

למה 2.2.1 (למת המְשלמות): *$\hat{M}$ הנו מודול מְשלם.*

הוכחה: תהי $(x_1,x_2,x_3,\ldots)$ סדרת קושי ב M. נסמן ב x את האבר של $\hat{M}$ המיַצג את הסדרה. לכל סביבה פתוחה U של 0 ב M קיָם $s(U)$ טבעי כך שאם $m,n\geq s(U)$, אזי $x_n-x_m\in U$. לכן $x_n-x\in\hat{U}$. מכאן נובע ש $x_n\to x$ ב $\hat{M}$.

עתה נתבונן בסדרת קושי $(x_1,x_2,x_3,\ldots)$ ב $\hat{M}$. נבחר סדרה יורדת $U_1\supseteq U_2\supseteq U_3\supseteq\cdots$ של קבוצות פתוחות של M המהוָה בסיס לסביבות־0 של M. לכל n נבחר באנדוקציה סביבת־0 סימטרית V_n כך ש $V_n+V_n\subseteq U_n$, $V_n+V_n+V_n\subseteq U_n$ ו $V_r\subseteq V_n$ אם $r\geq n$. כמו כן נבחר $y_n\in M$ כך ש $x_n-y_n\in\hat{V}_n$.

טענה: *$(y_1,y_2,.y_3,\ldots)$ היא סדרת קושי ב M.*

ואכן, תהי U סביבת־0 ב M. נבחר r טבעי כך ש $U_r\subseteq U$. אזי קיָם $s(r)\geq r$ כך שלכל $m,n\geq s(r)$ מתקיֵם $x_n-x_m\in\hat{V}_r$. לכן,

$$
\begin{aligned}
y_n-y_m &= (y_n-x_n)+(x_n-x_m)+(x_m-y_m)\\
&\in \hat{V}_n+\hat{V}_r+\hat{V}_m\\
&\subseteq \hat{V}_r+\hat{V}_r+\hat{V}_r\subseteq\hat{U}_r\subseteq\hat{U}
\end{aligned}
$$

כנדרש.

לפי החלק הראשון של ההוכחה, שואף y_n לאבר y של $\hat{M}$.

טענה: $x_n\to y$.

ואכן, תהי U סביבת אפס ב M. נבחר r טבעי כך ש $U_r\subseteq U$. אזי קיָם $t(r)\geq r$ כך שאם $n\geq t(r)$, אזי $y_n-y\in\hat{V}_r$. לכן

$$
x_n-y=(x_n-y_n)+(y_n-y)\in\hat{V}_r+\hat{V}_r\subseteq\hat{U}_r\subseteq\hat{U}
$$

כנדרש. $\blacksquare$

למודול $\hat{M}$ יש התכונה האוניברסלית הבאה: אם N הוא מודול־A מֻשלם, אזי נִתן להרחיב כל הומומורפיזם רציף $\alpha\colon M \to N$ להומומורפיזם רציף $\alpha'\colon \hat{M} \to N$ באפן יחיד. ואכן, יהי $x \in \hat{M}$. הואיל ויש לסביבות אפס של M בסיס בן מניה, נתן למצא סדרה $x_1, x_2, x_3, \ldots$ של אברי M השואפת ל x. בפרט, זוהי סדרת קושי. לכן, $\alpha(x_1), \alpha(x_2), \alpha(x_3), \ldots$ היא סדרת קושי ב N. הואיל ו N מֻשלם, מתכנסת הסדרה $\alpha(x_n)$ לאבר יחיד y של N'. נגדיר $\alpha'(x) = y$. זוהי הגדרה טובה המקיֶמת את כל הדרישות.

בפרט, נִתן להרחיב כל הומומורפיזם רציף $\alpha\colon M \to N$ באפן יחיד להומומורפיזם $\hat{\alpha}\colon \hat{M} \to \hat{N}$. אם $\beta\colon N \to P$ הוא הומומורפיזם רציף נוסף, אזי $\widehat{\beta \circ \alpha} = \hat{\beta} \circ \hat{\alpha}$.

2.3 טופולוגיה הנקבעת על ידי סדרה יורדת של תת מודולים.

יהי M מודול־A ו $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots$ סדרה יורדת של תת מודולים. נבחר באסף תת המודולים האלו כבסיס לסביבות ה 0 של טופולוגיה עבור M. אם N הוא תת מודול המקיף את M_n, נציג אותו כאחוד זר $N = \dot{\bigcup}_{x \in X}(x + M_n)$, באשר X היא תת קבוצה של N. כל אחת מהמחלקות הנִלוות $x + M_n$ פתוחה ולכן תת המודול N פתוח. עתה נציג את M עצמו כאחוד זר $M = \dot{\bigcup}_{y \in Y}(y + N)$, באשר Y היא תת קבוצה של M המכילה את האבר 0. שוב, כל אחת מהקבוצות הנלוות $y + N$ פתוחה ולכן $N = M \smallsetminus \dot{\bigcup}_{y \notin N}(y + N)$ סגורה.

נסמן ב $\hat{M}$ את ההשלמה של M תחת הטופולוגיה הזו.

העתקות המנה $M/M_{n+1} \to M/M_n$ מגדירות גבול הפוך $\varprojlim M/M_n$ של מודולֵי המנה M/M_n.

למה 2.3.1 (למת ההשואה): *קיָם איזומורפיזם טבעי* $\hat{M} \cong \varprojlim M/M_n$.

הוכחה: כל אבר של $\varprojlim M/M_n$ הוא סדרה $x = (x_1 + M_1, x_2 + M_2, x_3 + M_3, \ldots)$ של מחלקות נִלוות כך ש $x_{n+1} \equiv x_n \mod M_n$. בפרט, סדרת המיַצגים $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ היא סדרת קושי. נתאים את x למחלקת השקילות $\hat{x}$ ב $\hat{M}$ של סדרת המיַצגים. בפרט, $x_n \to \hat{x}$ ב $\hat{M}$. אם $(x'_1, x'_2, x'_3, \ldots)$ היא סדרת מיצגים אחרת, אזי $x'_n \equiv x_n \mod M_n$ לכל n טבעי. לכן סדרת המיצגים השניה שקולה לראשונה. זה אומר שההעתקה $\theta\colon \varprojlim M/M_n \to \hat{M}$ שהגדרנו מֻגדרת היטב.

אם $x' = (x'_1 + M_1, x'_2 + M_2, x'_3 + M_3, \ldots)$ היא אבר נוסף ש $\hat{M}$ כך ש $\theta(x') = \theta(x)$, אזי גם $x'_n \to \hat{x}$ ולכן, לכל m טבעי קיָם $s(m) \geq m$ כך שאם $n \geq s(m)$ אזי $x'_n \equiv x_n \mod M_m$. מהגדרת הגבול ההפוך נובע ש $x'_m \equiv x_m \mod M_m$ ולכן $x' = x$. במלים אחרות, ההעתקה θ חד חד ערכית.

יהי עתה $\hat{x} \in \hat{M}$. נבחר סדרה $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ של אברים של M השואפת ל $\hat{x}$. לסדרה זו נבחר תת סדרה $x_{n(1)}, x_{n(2)}, x_{n(3)}, \ldots$ המקיֶמת $x_{n(k+1)} \equiv x_{n(k)} \mod M_k$ לכל k טבעי. היא מגדירה אבר $x = (x_{n(1)} + M_1, x_{n(2)} + M_2, x_{n(3)} + M_3, \ldots)$ של $\varprojlim M/M_n$ המקיֵם $\theta(x) = \hat{x}$. מכאן ש θ על ולכן היא איזומורפיזם. $\blacksquare$

שתי סדרות יורדות $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots$ ו $M'_1 \supseteq M'_2 \supseteq M'_3 \supseteq \cdots$ של תת מודולים של M **שקולות** זו לזו אם לכל l קיָם m כך ש $M_m \subseteq M'_l$ ולכל m קיָם n כך ש $M'_n \subseteq M_m$. אם חִתוך כל התת מודולים באחת הסדרות שוה ל 0, זה המצב גם עבור הסדרה האחרת. בכל מקרה הטופולוגיות ששתי הסדרות מגדירות על M מתלכדות ולכן ההשלמה $\hat{M}$ היא אותה עבור שתי הסדרות. בפרט, נקבל ממשפטון ההשואה ש $\varprojlim M/M_n \cong \varprojlim M/M'_n$.

למה 2.3.2 (למת דיוק ב): *תהי* $0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$ *סדרה מדֻיקת של מודולֵי-*A*. תהיינה* $(L_n)_{n=1,2,3,\dots}$, $(M_n)_{n=1,2,3,\dots}$ *ו* $(N_n)_{n=1,2,3,\dots}$ *סדרות יורדות של תת מודולים.*

(א) *אם הסדרה* $(\beta(M_n))_{n=1,2,3,\dots}$ *שקולה לסדרה* $(N_n)_{1,2,3,\dots}$*, אזי* β *רציף ו* $\hat{\beta}\colon \hat{M} \to \hat{N}$ *על.*

(ב) *אם בנוסף לכך הסדרה* $(\alpha^{-1}(M_n))_{n=1,2,3,\dots}$ *שקולה לסדרה* $(L_n)_{1,2,3,\dots}$ *אזי הסדרה*

$$0 \longrightarrow \hat{L} \xrightarrow{\hat{\alpha}} \hat{M} \xrightarrow{\hat{\beta}} \hat{N} \longrightarrow 0 \tag{4}$$

מֻגדרת היטב ומדֻיקת.

הוכחה: לכל n טבעי יש לנו תרשים חלופי

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & L/\alpha^{-1}(M_{n+1}) & \longrightarrow & M/M_{n+1} & \longrightarrow & N/\beta(M_{n+1}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & L/\alpha^{-1}(M_n) & \longrightarrow & M/M_n & \longrightarrow & N/\beta(M_n) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

באשר ההעתקות המאֻזנות מֻשרות על ידי α ו β בהתאמה וההעתקות המאֻנכות הנן העְתקות המנה. למת דיוק א (למה 2.1.2) נותנת, על ידי מעבר לגבול, סדרה מדֻיקת קצרה

$$0 \longrightarrow \varprojlim L/\alpha^{-1}(M_n) \xrightarrow{\hat{\alpha}} \varprojlim M/M_n \xrightarrow{\hat{\beta}} \varprojlim N/\beta(M_n) \longrightarrow 0$$

בהנחה של (א) $\varprojlim N/\beta(M_n) = \hat{N}$ ולכן, לפי למת ההשואה (למה 2.3.1), $\hat{\beta}$ על. תחת ההנחה של (ב) נותנת סדרה זו לפי למת ההשואה את הסדרה (4) וזו מדֻיקת. ∎

הערה 2.3.3: בתנאים של למה 2.3.2 תת המודול $\hat{L}$ הנו הסגור של L (ליתר דיוק, של התמונה של L) ב $\hat{M}$.

ואכן, אם $x \in \hat{M}$ שיָך לסגור של L ב $\hat{M}$, אזי x הנו גבול של סדרת אברים השיָכים ל L. תת סדרה של סדרה זו הנה סדרת קושי ביחס לסדרה L_n ולכן $x \in \hat{L}$. ∎

למה 2.3.4: *יהי M מודול A ותהי $M \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots$ סדרה יורדת של תת מודולים. נניח ש $M_{k+m} = M_k$ לכל $m \geq 0$. אזי קיָם איזומורפיזם טבעי $\varprojlim M/M_n \cong M/M_k$.*

הוכחה: לסדרה $x = (x_1 + M_1, \ldots, x_k + M_k, x_k + M_k, \ldots)$ ב $\varprojlim M/M_n$ נתאים את האבר $x_k + M_k$ של M/M_k. באפן כזה מקבלים הומומורפיזם טבעי מ $\varprojlim M/M_n$ על M/M_k. אם $x_k \in M_k$, אזי מהקשר $x_r \equiv x_k \mod M_k$, נובע ש $x_r \in M_k = M_r$ לכל $r \geq k$. לכן $x = 0$ וההעתקה חד חד ערכית. לכן העתקתנו הנה איזומורפיזם. ∎

2.4 הטופולוגיה ה $\mathfrak{a}$־אדית.

יהי $\mathfrak{a}$ אידאל של החוג A. לכל מודול־A M מגדיר $\mathfrak{a}$ סדרה יורדת $(\mathfrak{a}^n M)_{n=1,2,3,\ldots}$ של תת מודולים ולכן מגדיר $\mathfrak{a}$ טופולוגיה על M הנקראת **הטופולוגיה ה $\mathfrak{a}$־אדית**. כמו בסעיף נסמן ב $\hat{M}$ את ההשלמה של M ביחס לטופולוגיה ה $\mathfrak{a}$־אדית. זהו מודול־A. לפי משפטון ההשואה נִתן לזהות את $\hat{M}$ עם הגבול ההפוך $\varprojlim M/\mathfrak{a}^n M$. כל הומומורפיזם $\alpha\colon M \to N$ של מודולי־A מקיֵם $\alpha(\mathfrak{a}^n M) = \mathfrak{a}^n \alpha(M)$ ולכן הוא רציף. לכן הוא נִתן להרמה באפן יחיד להומומורפיזם־A $\hat{\alpha}\colon \hat{M} \to \hat{N}$ (סוף סעיף 2.2). באפן מפרש אפשר להגדיר את $\hat{\alpha}$ על אבר $(a_1 + \mathfrak{a}M, a_2\mathfrak{a}^2 M, a_3\mathfrak{a}^3 M, \ldots)$ של הגבול ההפוך $\varprojlim M/\mathfrak{a}^n M$ בעזרת הנֻסחה

$$\hat{\alpha}(a_1 + \mathfrak{a}M, a_2 + \mathfrak{a}^2 M, a_3 + \mathfrak{a}^3 M, \ldots) = (\alpha(a_1) + \mathfrak{a}N, \alpha(a_2) + \mathfrak{a}^2 N, \alpha(a_3) + \mathfrak{a}^3 N, \ldots).$$

במקרה שבו $A = M$ נקבל ש $\hat{A} = \varprojlim A/\mathfrak{a}^n$ אינו רק מודול־A טופולוגי אלא הוא גם חוג טופולוגי. ואכן, אם סדרות $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ ו $(b_1, b_2, b_3, \ldots)$ של אברי A מקיְמות $a_{n+1} \equiv a_n \mod \mathfrak{a}^n$ ו $b_{n+1} \equiv b_n \mod \mathfrak{a}^n$, אזי $a_{n+1}b_{n+1} \equiv a_n b_n \mod \mathfrak{a}^n$. לכן, ההגדרה

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots)(b_1, b_2, b_3, \ldots) = (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \ldots) \tag{5}$$

מגדירה כפל ב $\hat{A}$ המקיֵם את כל הדרישות של חוג שבו בסיס לסביבות האפס מהוים האידאלים $\widehat{\mathfrak{a}^n}$. גרעין העתקת האלכסון $A \to \hat{A}$ הנו האידאל $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n$. גרעין זה שוה לאפס אם ורק אם A הנו האוסדורף בטופולוגיה ה $\mathfrak{a}$־אדית. לפי משפט קרול [אלגברה ב3, מסקנה ט.ה], זה קורה למשל אם A נטרי.

אם M הוא מודול־A כלשהוא, מגדירה הנֻסחה (5) כפל של אברי $\hat{A}$ באברי $\hat{M}$ והופכת את $\hat{M}$ למודול־$\hat{A}$. ההומומורפיזם $\hat{\alpha}\colon \hat{M} \to \hat{N}$ שהֻגדר לעיל הנו למעשה הומומורפיזם־$\hat{A}$.

דֻגמה 2.4.1*: המספרים ה p־אדיים.* נצא מחוג השלמים $\mathbb{Z}$ ומהאידאל $p\mathbb{Z}$ הנוצר על ידי מספר ראשוני p. ההשלמה של $\mathbb{Z}$ ביחס לאידאל זה נקראת **חוג המספרים ה p־אדיים** ומסֻמנת ב $\mathbb{Z}_p$. כל אבר ב $\mathbb{Z}_p$ נִתן להצגה באפן יחיד כטור אינסופי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$ שבו a_p הנו מספר שלם בין 0 ל $p-1$. החבור והכפל בין שני טורים כאלו אינו נעשה לפי מרכיבים אלא לפי כלל הפתוח לפי הבסיס p. ∎

דֻגמה 2.4.2: טורי חזקות פורמליים. יהי $A = A_0[X_1,\dots,X_n]$ חוג הפולינומים ב n משתנים מעל חוג A_0. ההשלמה $\hat{A}$ של A ביחס לאידאל $\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{n} A_0X_i$ הנה **חוג טורי החזקות הפורמליים** $A_0[[X_1,\dots,X_n]]$. כל אבר בחוג זה הנו **טור חזקות פורמלי** $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ שבו f_k הנו פולינום הומוגני ממעלה k במשתנים $X_1,\dots,X_n$ עם מקדמים ב A_0. החבור והכפל נתנים על ידי הנֻסחאות הרגילות:

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big)\Big(\sum_{l=0}^{\infty} g_l\Big) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k+l=m} f_kg_l \qquad \sum_{k=0}^{\infty} f_k + \sum_{k=0}^{\infty} g_k = \sum_{k=0}^{\infty}(f_k+g_k)$$

ההתאמה בין $A_0[[X_1,\dots,X_n]]$ לבין $\varprojlim A/\mathfrak{a}^n$ מֻגדרת באפן הבא: לטור החזקות $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ מתאימים את הסדרה $(g_1+\mathfrak{a}, g_2+\mathfrak{a}^2, g_3+\mathfrak{a}^3,\dots)$ שבה $g_k = \sum_{i=0}^{k-1} f_i$. להפך, לסדרה $(g_1+\mathfrak{a}, g_2+\mathfrak{a}^2, g_3+\mathfrak{a}^3\dots)$ ב $\varprojlim A/\mathfrak{a}^n$ שבה $g_k = \sum_{i=0}^{\infty} g_{ki}$, g_{ki} הוא פולינום הומוגני ממעלה i וכמעט כל הפולינומים g_{ki} שוים לאפס מתאימים את הטור $\sum_{k=0}^{\infty} g_{k+1,k}$. ∎

המשפט הבסיסי בהקשר של השלמות $\mathfrak{a}$־אדיות נוגע לחוגי נטר ולמודולים נוצרים סופית.

למה 2.4.3 (ארטין־ריס [אלגברה ב3, משפט ט.ג]): *יהי A חוג נטר, $\mathfrak{a}$ אידאל של A, M מודול־A נוצר סופית ו L תת מודול. אזי קַים מספר טבעי n כך ש $\mathfrak{a}^{k+n}M \cap L = \mathfrak{a}^k(\mathfrak{a}^nM \cap L)$ לכל $k \ge 0$.*

מלמה זו נובע שפונקטור ההשלמה ה $\mathfrak{a}$־אדית עבור מודולים נוצרים סופית מעל חוג נטר מדֻיק:

משפטון 2.4.4 (משפטון דיוק ג): *יהי $\mathfrak{a}$ אידאל בחוג A ותהי*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$$

סדרה מדֻיקת קצרה של מודולי־A. אזי $\hat{\beta}$ על. אם בנוסף לזה A הוא חוג נטר ו M נוצר סופית, אזי סדרת ההשלמות

$$0 \longrightarrow \hat{L} \xrightarrow{\hat{\alpha}} \hat{N} \xrightarrow{\hat{\beta}} \hat{N} \longrightarrow 0$$

מדֻיקת.

הוכחה: ראשית נשים לב לכך ש $\beta(\mathfrak{a}^nM) = \mathfrak{a}^nN$. לכן, לפי למת דיוק ב (למה 2.3.2), $\hat{\beta}$ על.

עתה נניח ש A נטרי ו M נוצר סופית. בנוסף נניח בלי הגבלת הכלליות ש α הוא העתקת השכון. למת ארטין־ריס נותנת n טבעי כך שלכל $k \ge 0$

$$\mathfrak{a}^{k+n}M \cap L = \mathfrak{a}^k(\mathfrak{a}^nM \cap L) \subseteq \mathfrak{a}^kL \subseteq \mathfrak{a}^kM \cap L \qquad (6)$$

ולכן סדרות האידאלים של L, $(\mathfrak{a}^0L, \mathfrak{a}^1L, \mathfrak{a}^2L,\dots)$ ו $(\mathfrak{a}^0M\cap L, \mathfrak{a}^1M\cap L, \mathfrak{a}^2M\cap L,\dots)$ שקולות זו לזו. לפי למת הדיוק ב (למה 2.3.2) הסדרה (6) מדֻיקת. ∎

ממשפטון דיוק ג (משפטון $2.4.4$) נובע שההשלמה ה $\mathfrak{a}$־אדית שומרת על סכומים ישרים של מודולי־A נוצרים סופית. המסקנה הזו נובעת גם ישירות מההגדרה (ובהסקה זו אין צרך להניח שהמודולים נוצרים סופית). מאידך, כל אידאל בחוג נטר הנו מודול נוצר סופית ולכן נִתן לַיַשם את משפטון דיוק ג על אידאלים כאלו. בפרט נוכיח שההשלמה ה $\mathfrak{a}$־אדית שומרת גם על חתוכים של אידאלים.

למה $2.4.5$ (למת החתוך): *יהי $\mathfrak{a}$ אידאל בחוג נטר A ויהיו $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ אידאלים נוספים. אזי*

(א) *אם $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{c}$, אזי קַיָם איזומורפיזם טבעי $\hat{\mathfrak{c}}/\hat{\mathfrak{b}} \cong \widehat{\mathfrak{c}/\mathfrak{b}}$. בפרט, קַיָם איזומורפיזם טבעי $\hat{A}/\hat{\mathfrak{b}} \cong \widehat{A/\mathfrak{b}}$*

(ב) $\widehat{\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}} = \hat{\mathfrak{b}} \cap \hat{\mathfrak{c}}$.

הוכחת א: נשלים את הסדרה המדֻיקת הקצרה $0 \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{c} \to \mathfrak{c}/\mathfrak{b} \to 0$ לסדרה מדֻיקת קצרה (לפי משפטון דיוק ג) $0 \to \hat{\mathfrak{b}} \to \hat{\mathfrak{c}} \to \widehat{\mathfrak{c}/\mathfrak{b}} \to 0$ כדי להסיק את הטענה.

הוכחת ב: נצא מהסדרה המדֻיקת הקצרה

$$0 \longrightarrow \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} \longrightarrow A \xrightarrow{\beta} A/\mathfrak{b} \oplus A/\mathfrak{c} \longrightarrow 0$$

שבה $\beta(a) = (a + \mathfrak{b}, a + \mathfrak{c})$. משפטון דיוק ג (משפטון $2.4.4$) ו (א) נותנים סדרה מדֻיקת קצרה

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}} \longrightarrow \hat{A} \xrightarrow{\hat{\beta}} \hat{A}/\hat{\mathfrak{b}} \oplus \hat{A}/\hat{\mathfrak{c}} \longrightarrow 0$$

שבה $\hat{\beta}(a) = (a + \hat{\mathfrak{b}}, a + \hat{\mathfrak{c}})$. לכן, $\widehat{\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}} = \mathrm{Ker}(\hat{\beta}) = \hat{\mathfrak{b}} \cap \hat{\mathfrak{c}}$. ∎

2.5 מכפלות טנזוריות.

ראינו שאפשר לראות את $\hat{A}$ כמודול־A תחת העתקת האלכסון $A \to \hat{A}$. לכן נוכל עבור כל מודול־A M לבנות את המכפלה הטנזורית $\hat{A} \otimes_A M$ ולהשוות אותה למודול־$\hat{A}$ $\hat{M}$. ההומומורפיזם הטבעי $M \to \hat{M}$ כמודולי־A וההומומוריזם הטבעי $A \to \hat{A}$ מגדירים בעזרת ההעתקה $\hat{a} \otimes m \to \hat{a}m$ הומומורפיזם טבעי $\hat{A} \otimes_A M \to \hat{M}$ של מודולי־$\hat{A}$:

משפטון $2.5.1$: *יהי M מודול־A נוצר סופית ו $\mathfrak{a}$ אידאל של A. אזי ההעתקה $\hat{A} \otimes_A M \to \hat{M}$ הנה על. אם בנוסף לזאת A נטרי, אזי ההעתקה הזו הנה איזומורפיזם.*

הוכחה: הואיל וההשלמה ה $\mathfrak{a}$־אדית מתחלפת עם סכומים ישרים, $\hat{A} \otimes_A A^n = \hat{A}^n = \widehat{A^n}$.

לפי ההנחה נוצר M על ידי n אברים. לכן, M הוא מנה של $F = A^n$ עם גרעין E. הדיוק של המכפלה הטנזורית מימין [אלגברה ב3, משפטון ד.ז], ומשפטון דיוק ג נותנים תרשים חלופי של מודולי־A

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \hat{A} \otimes_A E & \longrightarrow & \hat{A} \otimes_A F & \longrightarrow & \hat{A} \otimes_A M & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & \\
0 \longrightarrow & \hat{E} & \longrightarrow & \hat{F} & \xrightarrow{\delta} & \hat{M} & \longrightarrow 0
\end{array}$$

שבו השורה העליונה מְדֻיקת ו δ על. מתחילת ההוכחה נובע ש β חד חד ערכי ועל. לכן γ על.

עתה נניח ש A נטרי. אזי, E נוצר סופית ולכן, לפי החלק הראשון של ההוכחה (המֻפעל על E במקום על M) α על. לפי משפט דיוק ג, השורה התחתונה של התרשים החלופי מְדֻיקת. מרדף תרשימים מוכיח ש γ חד חד ערכית. לכן, γ איזומורפיזם. ∎

אם נצרף את משפטון דיוק ג ומשפטון 2.5.1, נקבל פונקטור מְדֻיק נוסף:

מסקנה 2.5.2: *יהי A מודול נטר. הפונקטור $M \to \hat{A} \otimes_A M$ מקטגורית מודולי־A נוצרים סופית לקטגורית מודולי־$\hat{A}$ מְדֻיק.*

נראה עתה כיצד להסיר את תנאי הנוצרות סופית ממסקנה 2.5.2.

למה 2.5.3: *יהיו M, N מודולי־A ויהי $t = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ אבר של המכפלה הטנזורית $M \otimes_A N$. אם $t = 0$, אזי קַיָמים תת מודולים נוצרים סופית M_0 ו N_0 של M ו N המכילים את $x_1, \dots, x_n$ ואת $y_1, \dots, y_n$ בהתאמה כך ש $t = 0$ בתור אבר של $M_0 \otimes_A N_0$.*

הוכחה: הגדרת המכפלה הטנזורית נותנת תת קבוצות $\{u_j, u'_j, v_j \mid j \in J_1\}$ של M, $\{u_j, v_j, v'_j \mid j \in J_2\}$ של N ו $\{a_j, u_j, v_j \mid j \in J_3\}$ של A כך ש J_1, J_2, J_3 הן קבוצות סופיות זרות ו

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (x_i, y_i) = &\sum_{j \in J_1} [(u_j + u'_j, v_j) - (u_j, v_j) - (u'_j, v_j)] \\ &+ \sum_{j \in J_2} (u_j, v_j + v'_j) - (u_j, v_j) - (u_j, v'_j)] \\ &+ \sum_{j \in J_3} [(a_j u_j, v_j) - (u_j, a_j v_j)]\end{aligned}$$

נגדיר

$$\begin{aligned}M_0 &= \sum_{i=1}^n Ax_i + \sum_{j \in J_1} (Au_j + Au'_j) + \sum_{j \in J_2} Au_j + \sum_{j \in J_3} Au_j \\ N_0 &= \sum_{i=1}^n Ay_i + \sum_{j \in J_1} Av_j + \sum_{j \in J_2} (Av_j + Av'_j) + \sum_{j \in J_3} Av_j\end{aligned}$$

אזי M_0 ו N_0 נוצרים סופית, מכילים את $x_1, \dots, x_n$ ואת $y_1, \dots, y_n$ בהתאמה ו $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0$ ב $M_0 \otimes N_0$. ∎

נזכיר שמודול־A M מכֻנה **שטוח** אם מכפלה טנזורית ב M שומרת על סדרות מְדֻיקות, לחלופין, אם $\alpha\colon N \to P$ היא העתקה חד חד ערכית של מודולי־A, אזי גם ההעתקה $(1 \otimes \alpha)\colon M \otimes_A N \to M \otimes_A P$ חד חד ערכית [אלגברה ב3, סעיף ד].

משפטון $2.5.4$: *אם A הוא מודול נטר ו $\mathfrak{a}$ אידאל שלו, אזי ההשלמה ה $\mathfrak{a}$־אדית $\hat{A}$ הוא מודול־A שטוח.*

הוכחה: יהי $\alpha\colon N \to P$ שכון של מודולי־A. כדי להוכיח שההעתקה $1\otimes\alpha\colon \hat{A}\otimes_A N \to \hat{A}\otimes_A P$ חד חד ערכית נתבונן באבר $t=\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i$ של $\hat{A}\otimes_A N$ המקיֵם $\sum_{i=1}^n x_i\otimes\alpha(y_i)=0$. עלינו להוכיח ש $t=0$. לצֹרך זה נתבונן קודם בתת המודול $N_0=\sum_{i=1}^n Ay_i$ של N_0 ונסמן ב N את $\nu\colon \hat{A}\otimes_A N_0 \to \hat{A}\otimes_A N$ ההומומוריזם הנקבע על ידי העתקת הזהות $\hat{A}\to\hat{A}$ וההכלה $N_0\to N$. נסמן ב t_0 את $\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i$ כאבר של $\hat{A}\otimes_A N_0$. נסמן ב α_0 את הצמצום של α ל N_0. לפי למה $2.5.3$ קיָם ל P תת מודול נוצר סופית P_0 המקיף את $\alpha_0(N_0)$, מכיל את $\alpha_0(y_1),\dots,\alpha_n(y_n)$ וכך ש $(1\otimes\alpha_0)(t_0)=0$ ב $\hat{A}\otimes_A P_0$. אני מקבלים אפוא תרשים חלופי של מודולי־A

$$\begin{array}{ccc} \hat{A}\otimes_A N & \xrightarrow{1\otimes\alpha} & \hat{A}\otimes_A P \\ \uparrow{\scriptstyle\nu} & & \uparrow{\scriptstyle\pi} \\ \hat{A}\otimes_A N_0 & \xrightarrow{1\otimes\alpha_0} & \hat{A}\otimes_A P_0 \end{array}$$

לפי מסקנה $2.5.2$, $1\otimes\alpha_0$ חד חד ערכי. לכן, $t_0=0$. מכאן ש $t=\nu(t_0)=0$, כנדרש. ∎

למה $2.5.5$: *יהי $\mathfrak{a}$ אידאל של חוג נטר A. יהיו $\mathfrak{b},\mathfrak{c}$ אידאלים של A. אזי ההשלמות ה $\mathfrak{a}$־אדיות מקיְמות:*

(א) $\hat{\mathfrak{b}}=\hat{A}\mathfrak{b}\cong\hat{A}\otimes_A\mathfrak{b}$.

(ב) $\widehat{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}=\hat{\mathfrak{b}}\hat{\mathfrak{c}}$ ו $\widehat{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}=\hat{\mathfrak{b}}+\hat{\mathfrak{c}}$.

(ג) *לכל $n\ge 0$ שלם קיָם איזומורפיזם טבעי* $\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}\cong\hat{\mathfrak{a}}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$ *בפרט* $\hat{A}/\hat{\mathfrak{a}}^n\cong A/\mathfrak{a}^n$.

(ד) $\hat{\mathfrak{a}}$ *מוכל בשרשון יעקובסון של* $\hat{A}$.

הוכחת א: האידאל $\mathfrak{b}$ נוצר סופית, כי A נטרי. לכן, לפי משפטון $2.5.1$, ההעתקה $\hat{A}\otimes_A\mathfrak{b}\to\hat{\mathfrak{b}}$ המֻגדרת על ידי $x\otimes b\mapsto xb$ שתמונתה היא $\hat{A}\mathfrak{b}$ הנה איזומורפיזם.

הוכחת ב: לפי (א), $\widehat{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}=\hat{A}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=\hat{A}\mathfrak{b}+\hat{A}\mathfrak{c}=\hat{\mathfrak{b}}+\hat{\mathfrak{c}}$. באֹפן דומה, $\widehat{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}=\hat{A}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})=(\hat{A}\mathfrak{b})(\hat{A}\mathfrak{c})=\hat{\mathfrak{b}}\hat{\mathfrak{c}}$.

הוכחת ג: ההשלמה ה $\mathfrak{a}$־אדית של הסדרה הקצרה המדֻיֶקת

$$0\to\mathfrak{a}^n\to A\to A/\mathfrak{a}^n\to 0$$

היא סדרה מדֻיֶקת. לפי (ב), $\widehat{\mathfrak{a}^n}=\hat{\mathfrak{a}}^n$. לפי למה $2.3.4$, $\widehat{A/\mathfrak{a}^n}=\varprojlim(A/\mathfrak{a}^k)/\mathfrak{a}^k(A/\mathfrak{a}^n)=A/\mathfrak{a}^n$ (כי $\mathfrak{a}^k(A/\mathfrak{a}^n)=0$ לכל $k\ge n$). לכן הסדרה $0\to\hat{\mathfrak{a}}^n\to\hat{A}\to A/\mathfrak{a}^n\to 0$ מדֻיֶקת. החץ השלישי בסדרה זו מעתיק סדרה $(a_1+\mathfrak{a},a_2+\mathfrak{a}^2,\dots)$ ב $\hat{A}=\varprojlim A/\mathfrak{a}^n$ ל $a_n+\mathfrak{a}^n$ ולכן הוא טבעי. זה נותן איזומורפיזם

טבעי $A/\mathfrak{a}^n \cong \hat{A}/\hat{\mathfrak{a}}^n$. אם נפעיל את האיזומורפיזם הזה גם עבור $n+1$ נקבל תרשים חלופי

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \hat{\mathfrak{a}}^n/\hat{\mathfrak{a}}^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \hat{A}/\hat{\mathfrak{a}}^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \hat{A}/\hat{\mathfrak{a}}^n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1} \arrow[r] & A/\mathfrak{a}^{n+1} \arrow[r] & A/\mathfrak{a}^n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

בתרשים זה שני החִצים המאֻנכים הימְניים הנם איזומורפיזמים. לכן גם החץ המאֻנך השמאלי הנו איזומורפיזם, כנדרש.

הוכחת ז: לפי למת המְשלמות 2.2.1, $\hat{A}$ מְשלם בטופולוגיה ה $\hat{\mathfrak{a}}$־אדית. לכן, לכל $x \in \hat{\mathfrak{a}}$ הטור

$$(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

מתכנס ב $\hat{A}$. מכאן ש $1-x$ הפיך ב $\hat{A}$. לפי [אלגברה ב3, משפטון א.ט], $\hat{\mathfrak{a}}$ מוכל בשרשון יעקבסון של $\hat{A}$ (שהוא החתוך של כל האידאלים המרביים של $\hat{A}$).

2.6 חוגים מקומיים.

להשלמות של חוגי נטר מקומיים יש תכונות מיֻחדות. תכונות אלו משליכות לעתים על תכונות של החוגים המקוריים. בפרט נוכיח כאן שאם ההשלמה של חוג נטר מקומי A הנה בעלת פריקות חד ערכית, גם ל A יש פריקות חד ערכית.

משפטון 2.6.1: *יהי A חוג נטר מקומי עם אידאל מרבי $\mathfrak{m}$. אזי ההשלמה ה $\mathfrak{m}$־אדית $\hat{A}$ של A הנה חוג מקומי עם האידאל המרבי $\hat{\mathfrak{m}}$.*

הוכחה: לפי למה 2.4.5, $A/\mathfrak{m} \cong \hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}$, לכן $\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}$ הנו שדה ולכן $\hat{\mathfrak{m}}$ הנו אידאל מרבי של $\hat{A}$. בנוסף, לפי למה 2.5.5(ד), מוכל $\hat{\mathfrak{m}}$ בכל אידאל מרבי של $\hat{A}$. לכן, $\hat{\mathfrak{m}}$ הנו האידאל המרבי היחיד של $\hat{A}$, היֵה אומר, $(\hat{A}, \hat{\mathfrak{m}})$ הנו חוג מקומי. ∎

המשפטון הבא הנו תוצאה של למת ארטין־ריס:

משפטון 2.6.2 ([אלגברה ב3, מסקנה ט.ד]): *יהי A חוג נטר, $\mathfrak{a}$ אידאל של A המוכל בשרשון יעקבסון של A ו M מודול־A נוצר סופית. אזי $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n M = 0$.*

נישם את משפטון 2.6.2 למקרה המקומי.

תוצאה 2.6.3: *יהי $(A, \mathfrak{m})$ חוג נטר מקומי ו M מודול־A נוצר סופית. אזי $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n M = 0$. בפרט, $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n = 0$.*

מתוצאה 2.6.3 עולה שאם $(A, \mathfrak{m})$ הוא חוג נטר מקומי, אזי טופולוגית־$\mathfrak{m}$ של A הנה האוסדורף ונוכל לזהות את A כתת חוג של $\hat{A}$ תחת העתקת האלכסון. לפי למה 2.5.5(א), $\hat{\mathfrak{a}} = \hat{A}\mathfrak{a}$ הנו אידאל של $\hat{A}$.

למה 2.6.4: *יהי $(A,\mathfrak{m})$ חוג נטר מקומי.*

(א) *ההעתקה $\mathfrak{a}\mapsto\hat{\mathfrak{a}}$ מאסף האידאלים של A לאסף האידאלים של $\hat{A}$ היא חד חד ערכית, שומרת סדר, שומרת סכומים, מכפלות, ושומרת על חתוכים.*

(ב) *אם $\hat{\mathfrak{a}}$ הוא אידאל ראשי, גם $\mathfrak{a}$ הוא אידאל ראשי.*

הוכחת א: יהיו $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ אידאלים של A כך ש $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{b}$ ו $\hat{\mathfrak{a}}=\hat{\mathfrak{b}}$, אזי $\widehat{\mathfrak{b}/\mathfrak{a}}=\hat{\mathfrak{b}}/\hat{\mathfrak{a}}=0$ (לפי למת החִתוך 2.4.5). בנוסף, ההעתקה הטבעית, $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}\to\widehat{\mathfrak{b}/\mathfrak{a}}$ הנה חד חד ערכית כי המודול $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ נוצר סופית. לכן $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}=0$, מה שגורר $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$.

עתה נניח רק ש $\hat{\mathfrak{a}}=\hat{\mathfrak{b}}$. אזי, לפי למת החתוך 2.4.5, $\widehat{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}}=\hat{\mathfrak{a}}\cap\hat{\mathfrak{b}}=\hat{\mathfrak{b}}$. לכן, לפי הפסקה הקודמת, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}=\mathfrak{b}$ ומכאן ש $\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}$. באפן סימטרי, $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{b}$. לכן, $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$.

השמירה על הכלות של ההעתקה $\mathfrak{a}\mapsto\hat{\mathfrak{a}}$ נובעת למשל מהנֻסחה $\hat{\mathfrak{a}}=\hat{A}\mathfrak{a}$ והשמירה על סכומים ומכפלות נובעת מלמה 2.5.5.

הוכחת ב: יהי $\mathfrak{a}$ אידאל שונה מאפס של A. אזי $\hat{\mathfrak{a}}\neq 0$ (לפי (א)). נניח ש $\hat{\mathfrak{a}}=\hat{A}x$ עבור $x\in\hat{A}$. הואיל ו A נטרי, קיָמים $x_1,\ldots,x_n\in A$ כך ש $\mathfrak{a}=\sum_{j=1}^n Ax_j$. לכן, $\hat{A}x=\hat{\mathfrak{a}}=\hat{A}\mathfrak{a}=\sum_{j=1}^n\hat{A}x_j$ (למה 2.5.5). נוכל לבחר אפוא $a_j,b_j\in\hat{A}$, $j=1,\ldots,n$, כך ש $x_j=b_jx$ ו $x=\sum_{j=1}^n a_jx_j=\sum_{j=1}^n a_jb_jx$. מכאן נובע ש $x(1-\sum_{j=1}^n a_jb_j)=0$. אם $b_j\in\mathfrak{m}$ לכל j, אזי $1-\sum_{j=1}^n a_jb_j\notin\mathfrak{m}$ ולכן $1-\sum_{j=1}^n a_jb_j$ הפיך (לפי משפטון 2.6.1). מכאן נובע ש $x=0$ ולכן $\hat{\mathfrak{a}}=0$, בסתירה להנחתנו. מסתירה זו נובע שקיָם j כך ש $b_j\notin\mathfrak{m}$ ולכן b_j הפיך ב $\hat{A}$. לכן, $\widehat{Ax_j}=\hat{A}x_j=\hat{A}b_j^{-1}x_j=\hat{A}x=\hat{\mathfrak{a}}$. לפ (א), $\mathfrak{a}=Ax_j$, כנדרש. ∎

בעיה 2.6.5: *יהי $(A,\mathfrak{m})$ חוג מקומי ו $\mathfrak{a}$ אידאל של A. אזי $\hat{\mathfrak{a}}$ הוא הסגור של $\mathfrak{a}$ ב $\hat{A}$ (הערה 2.3.3). האם כל אידאל סגור של $\hat{A}$ הנו הסגור של אידאל של A? האם כל אידאל של $\hat{A}$ סגור?*

תרגיל 2.6.6: *הוכח שלכל α ממשי ולכל z מרֻכב המקיֵם $|z|<1$ מתקיֵם*

$$(1+z)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n \tag{7}$$

באשר

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

הסֵק שהשויון (7) הנו זהות בחוג טורי החזקות הפורמליים $A[[z]]$ עבור כל חוג A המַקיף את $\mathbb{Q}$.

דֻגמה 2.6.7 (אלעד פארן): *ההשלמה ה $\mathfrak{m}$אדית של תחום שלמות מקומי נטרי $(A,\mathfrak{m})$ אינה בהכרח תחום שלמות.*

ואכן, נצא משדה K בעל אפיון 0 ונתבונן בפולינום האי פריק $p(X,Y)=Y^2-X^2(X+1)$ של $K[X,Y]$. יהי $K[x,y]=K[X,Y]/p(X,Y)K[X,Y]$ חוג המנה. זהו תחום שלמות. נסמן ב A את החוג המקומי של $K[x,y]$

באידאל המרבי $K[x,y]x+K[x,y]y$*. זהו חוג נטר. נסמן ב* $\mathfrak{m}$ *את האידאל המרבי היחיד שלו* $\mathfrak{m}=Ax+Ay$.
יהי $\hat{A}$ *ההשלמה של* A *ביחס ל* $\mathfrak{m}$*. אזי* $(x+1)^{1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}x^n$ *הוא שרש רבועי של* $x+1$ *ב* $\hat{A}$*. אף אחד מהאברים* $y-x(x+1)^{1/2}$ *ו* $y+x(x+1)^{1/2}$ *אינו אפס ב* $\hat{A}$*. ואכן, נניח למשל ש* $y=x(x+1)^{1/2}$*. אזי* $y\equiv x \mod \hat{\mathfrak{m}}^2$ *ולכן,* $y\equiv x \mod \mathfrak{m}^2$*. הואיל ו* $Y^2-X^2(X+1)\in\langle X,Y\rangle^2$ *נקבל מכאן את החפיפה* $Y\equiv X \mod\langle X,Y\rangle^2$ *ב* $K[X,Y]$ *שאינה אפשרית. לעומת זאת, מכפלת האברים הנ"ל שוה לאפס:* $(y+x(x+1)^{1/2})(y-x(x+1)^{1/2})=y^2-x^2(x+1)=0$*. לכן,* $\hat{A}$ *אינו תחום שלמות.* ∎

למה 2.6.8 (בֹחן לפריקות חד ערכית): *יהי* A *תחום שלמות נטרי. תנאי הכרחי ומספיק לכך שיש ב* A *פריקות חד ערכית הוא שהחתוך של כל שני אידאלים ראשיים הנו אידאל ראשי.*

הוכחה: נניח קודם ש A בעל פריקות חד ערכית. נתבונן באברים $a,b\in A$ ותהי c הכפולה המשֻתפת המרבית שלהם. אזי, $Aa\cap Ab=Ac$.

בכוון ההפוך נעיר שמהנחת הנטריות של A נובע שכל אבר של A הוא מכפלה של מספר סופי של אברים אי פריקים. אחרת היה קיָם אבר a שאינו מכפלה של מספר סופי של אברים אי פריקים. בפרט a עצמו פריק, $a=bc$, אף אחד מהאברים b ו c אינו הפיך ולפחות אחד מהם אינו מכפלה של מספר סופי של אברים אי פריקים. נסמן אבר זה ב a_1. אזי $a_1|a$ ו $a\nmid a_1$. לכן $Aa\subset Aa_1$. האבר a_1 מקיֵם את אותם תנאים כמו a ולכן קיָם לו אבר $a_2\in A$ כך ש $Aa_1\subset Aa_2$. באנדוקציה נקבל אפוא שקיֶמת סדרה אינסופית $a_1,a_2,a_3,\dots$ של אברים של A כך ש $Aa\subset Aa_1\subset Aa_2\subset Aa_3\subset\cdots$, בסתירה להנחה ש A נטרי.

כדי להוכיח שהפריקות חד ערכית נניח שהחתוך של כל שני אידאלים ראשיים הוא אידאל ראשי. עלינו להוכיח שכל אבר אי פריק p הנו ראשוני. במלים אחרות, אם $p|ab$, אזי $p|a$ או $p|b$. נניח בשלילה ש $p\nmid a$ ו $p\nmid b$. הנחתנו נותנת אבר $c\in A$ כך ש $Ap\cap Aa=Ac$. בפרט $Apa\subseteq Ap\cap Aa=Ac$ ולכן קיָם $d\in A$ כך ש $cd=pa$. (נעיר ש c הנה הכפולה המשֻתפת הקטנה ביותר של p ו a ואלו d הנו המחלק המשֻתף המרבי שלהם.) כמו כן קיָמים $x,y\in A$ כך ש $c=px$ ו $c=ay$. הצבה בשויון הקודם נותנת $ayd=pa$ ולאחר צמצום $yd=p$ (כאן אנו משתמשים בכך ש A תחום שלמות). הואיל ו p אי פריק, אחד מהאברים y או d הפיך. אם y הפיך, אזי $a=cy^{-1}=pxy^{-1}$, בסתירה להנחה ש $p\nmid a$. אם d הפיך, אזי $c=ay=apd^{-1}$. לכן, $ab\in Ap\cap Aa=Ac=Aapd^{-1}$. מכאן נובע ש $p|b$, בסתירה להנחה. ∎

ניַשם את הבֹחן לפריקות חד ערכית לתחום שלמות נטרי מקומי.

משפטון 2.6.9: *יהי* $(A,\mathfrak{m})$ *חוג נטר מקומי. נניח שההשלמה ה* $\mathfrak{m}$*־אדית שלו* $(\hat{A},\hat{\mathfrak{m}})$ *הנה תחום שלמות בעל פריקות חד ערכית. אזי, גם* A *הוא בעל פריקות חד ערכית.*

הוכחה: החוג A, בתור תת חוג של $\hat{A}$, הנו תחום שלמות. כדי להוכיח ש A בעל פריקות חד ערכית מספיק, לפי למה 2.6.8 שלכל $a,b\in A$ החתוך $Aa\cap Ab$ הנו אידאל ראשי של A. ואכן, לפי חלק א של למה 2.6.4 ולפי למה

2.6.8 , $\widehat{Aa \cap Ab} = \hat{A}a \cap \hat{A}b$ הוא אידאל ראשי של $\hat{A}$. לכן, לפי חלק ב של למה 2.6.4, $Aa \cap Ab$ הוא אידאל ראשי של A. ∎

2.7 **החוג המקומי המצרף לאידאל.**

מטרתנו העקרית בסעיף זה היא להוכיח שההשלמה ה $\mathfrak{a}$־אדית של חוג נטר A הנה חוג נטר. לצרך זה נצרף ל A חוג מדֹרג $G_{\mathfrak{a}}(A)$ אשר יהוה מעין שלב בינַיִם בדרך להשלמה ה $\mathfrak{a}$־אדית $\hat{A}$. החוג $G_{\mathfrak{a}}(A)$ ישמש אותנו בפרק הבא גם לצרכים אחרים.

נזכיר שחוג B הנו **מדֹרג** אם $B = \bigoplus_{n=0}^{\infty} B_n$ באשר כל B_n הנו תת חבורה של החבורה החבורית של B ו $B_m B_n \subseteq B_{m+n}$ לכל m, n. בפרט $B_0 B_0 \subseteq B_0$ ולכן, אם $1 \in B_0$, אזי B_0 הנו תת חוג של B. מודול M מעל B יקֻנה **מדֹרג** אם $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$, באשר כל M_n הנו מודול־B ו $B_m M_n \subseteq M_{m+n}$ לכל m, n.

מודול־A מדֹרג $L = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_n$ יִקרא **תת מודול מדֹרג של** M אם L הוא תת מודול של M ואם $L_n = L \cap M_n$ לכל n. במקרה זה גם מודול המנה $M/L = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n/L_n$ הנו מודול־A מדֹרג. בפרט, אם $x \in A_k$ עבור איזה שהוא $k \geq 0$, אזי $xM_{n-k} \subseteq M_n$ לכל $n \geq k$. לכן $xM = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_n$, באשר $L_n = xM_{n-k}$ עבור $n \geq k$ ו $L_n = 0$ הוא תת מודול מדרג של M ומודול המנה M/xM יהיה אף הוא מודול מדרג.

יהי אפוא A חוג ו $\mathfrak{a}$ אידאל של A. נסמן

$$G(A) = G_{\mathfrak{a}}(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$$

זהו חוג מדֹרג אשר הכפל בו מֻגדר (היטב) על ידי הנֻסחה הבאה:

$$(x_m + \mathfrak{a}^{m+1})(x_n + \mathfrak{a}^{n+1}) = x_m x_n + \mathfrak{a}^{m+n+1} \tag{7}$$

באשר $x_m \in \mathfrak{a}^m$ ו $x_n \in \mathfrak{a}^n$.

יהי M מודול־A. **מסֻנֶנֶת־$\mathfrak{a}$** של M היא סדרה יורדת $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots$ של תת מודולים כך ש $\mathfrak{a}^m M_n \subseteq M_{m+n}$ לכל m, n. נסמן

$$G(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n/M_{n+1}.$$

כל אחד מהמחֻברים הישרים M_n/M_{n+1} של $G(M)$ הנו חבורה חבורית. נגדיר כפל של אברי $G(A)$ באברי $G(M)$ בעזרת נֻסחה הדומה לנֻסחה (7):

$$(a + \mathfrak{a}^{m+1})(x + M_{n+1}) = ax + M_{m+n+1}$$

בכך הופך $G(M)$ למודול־$G(A)$ מדרג שיקרא **המודול המצֹרף למסננה** $(M_n)_{n=0,1,2,\ldots}$.

נאמר שהמסננה $M \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots$ **יַציבה** אם $\mathfrak{a}M_n = M_{n+1}$ לכל n גדול דיו.

למה 2.7.1: *יהיו A חוג נטר ו $\mathfrak{a}$ אידאל של A. אזי:*

(א) *$G_{\mathfrak{a}}(A)$ נטרי.*

(ב) *קיָם איזומורפיזם $G_{\mathfrak{a}}(A) \cong G_{\hat{\mathfrak{a}}}(\hat{A})$ של מודולים מדרגים. בפרט, $G_{\hat{\mathfrak{a}}}(\hat{A})$ נטרי.*

(ג) *אם M הוא מודול־A נוצר סופית ו $(M_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ הנו מסננת־$\mathfrak{a}$ יַציבה של M, אזי $G(M)$ הנו מודול־$G_{\mathfrak{a}}(A)$ נוצר סופית מדרג.*

הוכחת א: יהיו $x_1, \ldots, x_r$ יוצרים של $\mathfrak{a}$. נגדיר הומומורפיזם $\alpha\colon A[X_1, \ldots, X_r] \to G_{\mathfrak{a}}(A)$ על ידי שנתאים לאבר $a \in A$ את $a + \mathfrak{a}$ ול X_i את $x_i + \mathfrak{a}^2$. החוג $G_{\mathfrak{a}}(A)$ נוצר כחבורה על ידי האברים

$$\sum a_{\mathbf{i}} x_1^{i_1} \cdots x_r^{i_r} + \mathfrak{a}^{n+1} \tag{8}$$

באשר $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_r)$ עובר על כל ה r־יות שסכומן n ולכל $\mathbf{i}$ כזה $a_{\mathbf{i}} \in A$. מהגדרת הכפל ב $G_{\mathfrak{a}}(A)$ נובע ש (8) שוה ל

$$\sum (a_{\mathbf{i}} + \mathfrak{a})(x_1 + \mathfrak{a}^2)^{i_1} \cdots (x_r + \mathfrak{a}^2)^{i_r} \tag{9}$$

ו (9) שוה ל $\alpha(\sum a_{\mathbf{i}} X_1^{i_1} \cdots X_r^{i_r})$. מכאן ש α על. הואיל ו A נטרי, נובע לפי משפט הבסיס של הלברט ש $A[X_1, \ldots, X_n]$ נטרי. לכן, $G_{\mathfrak{a}}(A)$ נטרי.

הוכחת ב: לפי למה 2.5.5, $\hat{\mathfrak{a}}^n/\mathfrak{a}^{n+1} \cong \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$ לכל n טבעי. לכן, $G_{\mathfrak{a}}(A) \cong G_{\hat{\mathfrak{a}}}(\hat{A})$.

הוכחת ג: לפי ההנחה קיָם m טבעי כך ש $M_{m+r} = \mathfrak{a}^r M_m$ ולכן $\mathfrak{a}^r(M_m/M_{m+1}) = M_{m+r}/M_{m+r+1}$ לכל $r \geq 0$. הואיל ו M נוצר סופית ו A נטרי, כל אחד מהמודולים M_k/M_{k+1}, $k = 0, \ldots, m$ נוצר סופית כמודול־A. אחוד קבוצות יוצרים סופיות של המודולים האלו יִצר את המודול $G(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n/M_{n+1}$ כמודול־$G_{\mathfrak{a}}(A)$. ∎

הלמה הבאה מראה כיצד אפשר ללמד מתכונות של המודול $G(M)$ על תכונות של $\hat{M}$.

למה 2.7.2: *יהיו $M \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$ ו $N \supseteq N_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$ סדרות יורדות של מודולי־A ויהי $\varphi\colon M \to N$ הומומורפיזם המקיָם $\varphi(M_n) \subseteq N_n$ לכל n. יהיו $G(\varphi)\colon G(M) \to G(N)$ ו $\hat{\varphi}\colon \hat{M} \to \hat{N}$ ההומומורפיזמים של המודולים המצֹרפים והגבולות ההפוכים המתאימים. אזי:*

(א) *אם $G(\varphi)$ חד חד ערכי, גם $\hat{\varphi}$ חד חד ערכי.*

(ב) אם $G(\varphi)$ על, גם $\hat{\varphi}$ על.

הוכחה: נסמן $M_0 = M$ ו $N_0 = N$ ולכל $n \geq 0$ נתבונן בתרשים הבא של סדרות מְדֻיָּקוֹת קצרות:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_n/M_{n+1} & \longrightarrow & M/M_{n+1} & \longrightarrow & M/M_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle G_n(\varphi)} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_n} & & \\ 0 & \longrightarrow & N_n/N_{n+1} & \longrightarrow & N/N_{n+1} & \longrightarrow & N/N_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

שבו ההעתקות $G_n(\varphi)$ ו φ_n מֻשרות על ידי φ. למת הנחש (למה 2.1.1) נותנת סדרה מְדֻיקת אֲרֻכה:

$$0 \to \mathrm{Ker}(G_n(\varphi)) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi_{n+1}) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi_n)$$

$$\longrightarrow \mathrm{Coker}(G_n(\varphi)) \to \mathrm{Coker}(\varphi_{n+1}) \to \mathrm{Coker}(\varphi_n) \to 0$$

נניח עתה ש $G(\varphi)$ חד חד ערכי. אזי $\mathrm{Ker}(G_n(\varphi)) = 0$ לכל n טבעי ולכן כל הסדרות $0 \to \mathrm{Ker}(\varphi_{n+1}) \to \mathrm{Ker}(\varphi_n)$ מְדֻיקות. הואיל ו $\mathrm{Ker}(\varphi_0) = 0$, נוכל להסיק באנדוקציה ש $\mathrm{Ker}(\varphi_n) = 0$ לכל n טבעי. מכאן נובע ש $\hat{\varphi}\colon \varprojlim M/M_n \to \varprojlim N/N_n$ חד חד ערכי, כנדרש ב (א).

עתה נניח ש $G(\varphi)$ על. אזי $\mathrm{Coker}(G_n(\varphi)) = 0$ לכל n טבעי ולכן כל הסדרות

$$\mathrm{Ker}(\varphi_{n+1}) \to \mathrm{Ker}(\varphi_n) \to 0 \to \mathrm{Coker}(\varphi_{n+1}) \to \mathrm{Coker}(\varphi_n) \to 0 \qquad (10)$$

מְדֻיקות. שוב, הואיל ו $\mathrm{Coker}(\varphi_0) = 0$, נקבל מכאן באנדוקציה ש $\mathrm{Coker}(\varphi_n) = 0$ לכל n. זה נותן לנו תרשים מְדֻיק של סדרות מְדֻיקות

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\varphi_{n+1}) & \longrightarrow & M/M_{n+1} & \xrightarrow{\varphi_{n+1}} & N/N_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\varphi_n) & \longrightarrow & M/M_n & \xrightarrow{\varphi_n} & N/N_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

החלק השמאלי של הסדרה המְדֻיקת (10) אומר שההעתקות $\mathrm{Ker}(\varphi_{n+1}) \to \mathrm{Ker}(\varphi_n)$ על. לכן, לפי למת דיוק א 2.1.2, הסדרה $0 \longrightarrow \varprojlim \mathrm{Ker}(\varphi_n) \longrightarrow \varprojlim M/M_n \xrightarrow{\hat{\varphi}} \varprojlim N/N_n \longrightarrow 0$ מְדֻיקת. בפרט, $\hat{\varphi}\colon \hat{M} \to \hat{N}$ על, כנדרש ב (ב). ∎

למה 2.7.3: *יהיו A חוג, $\mathfrak{a}$ אידאל, M מודול־A ו $(M_n)_{n=0.1,2,\ldots}$ מסננת־$\mathfrak{a}$. נניח ש A מֻשלם בטופולוגית־$\mathfrak{a}$, טופולוגית־$\mathfrak{a}$ של M היא האוסדורף (כלומר $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n M = 0$) ו $G(M)$ הנו מודול־$G(A)$ נוצר סופית. אזי M נוצר סופית כמודול־A.*

הוכחה א: נזכיר ש $G(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n/M_{n+1}$ ו $G(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$. יהיו $z_1, \ldots, z_s$ יוצרים של $G(M)$ כמודול־$G(A)$. תהי $\{x_1 + M_{n(1)+1}, \ldots, x_r + M_{n(r)+1}\}$ קבוצת המרכיבים ההומוגניים

של $z_1,\dots,z_s$, באשר $x_i \in M_{n(i)}$, $i=1,\dots,r$. נסמן ב $F^{(i)}$ את המודול A עם מסננת־$\mathfrak{a}$ היַציבה $(F_k^{(i)})_{k=0,1,2,\dots}$ שבה $F_k^{(i)}=A$ עבור $k\le n(i)$ ו $F_k^{(i)}=\mathfrak{a}^{k-n(i)}$ עבור $k\ge n(i)$. נבנה את הסכום הישר $F=\bigoplus_{i=1}^r F^{(i)}$. אזי F הנו סכום ישר של r עתקים של A ולכן הוא מודול־A חפשי. נגדיר הומומורפיזם־A $\varphi\colon F\to M$ על ידי שנעתיק את האבר 1 של F_i על x_i. באפן כללי, יהיה $\varphi(a_1,\dots,a_r)=\sum_{i=1}^r a_ix_i$, עבור $a_1,\dots,a_r\in A$. מסננות־$\mathfrak a$ של ה $F^{(i)}$ מסתכמות למסננת־$\mathfrak a$ $(F_k)_{k=1,2,3,\dots}$ של F שבה $F_k=\bigoplus_{i=1}^r F_i^{(i)}$. בפרט, אם $(a_1,\dots,a_r)\in F_k$, $1\le i\le r$ ו $k\le n(i)$, אזי $a_ix_i\in M_{n(i)}\cong M_k$ ואם $k\le n(i)$, אזי $a_ix_i\in\mathfrak a^{k-n(i)}M_{n(i)}\subseteq M_k$. לכן $\varphi(a_1,\dots,a_r)=\sum_{i=1}^r a_ix_i\in M_k$. במלים אחרות, φ שומר על הסִנון. לכן φ משרה הומומורפיזמים $G(\varphi)\colon G(F)\to G(M)$ ו $\hat\varphi\colon\hat F\to\hat M$. לכל $1\le i\le r$ נסמן $e_i=(0,\dots,1,\dots,0)$ את האבר של F שבו עומד בכל מקום 0 פרט למקום ה i־י שבו עומד 1. האבר 1 של $F^{(i)}$ שיָך ל $F_k^{n(i)}$ ולכן $e_i\in F_{n(i)}$. לפי ההגדרה $G_k(\varphi)(e_i+F_{n(i)+1})=x_i+M_{n(i)+1}$. לכן, $x_1+M_{n(1)+1},\dots,x_r+M_{n(r)+1}\in \mathrm{Im}(G(\varphi))$ ולכן $z_1,\dots,z_r\in\mathrm{Im}(G(\varphi))$. מכאן ש $G(\varphi)$ על. לפי למה 2.7.2, $\hat\varphi$ על.

נתבונן עתה בתרשים החִלופי

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & M \arrow[d, "\beta"] \\
\hat F \arrow[r, "\hat\varphi"] & \hat M
\end{tikzcd}$$

שבו α ו β הן העתקות האלכסון. המודול $F^{(i)}$ אינו אלא A עם המסננה $(\mathfrak a^{k+n(i)})_{k=1,2,3\dots}$ השקולה למסננה $(\mathfrak a^k)_{k=1,2,3\dots}$. לכן הן מגדירות את אותה הטופולוגיה. הואיל ולפי ההנחה A מֻשלם־$\mathfrak a$ גם $F^{(i)}$ מֻשלם ולכן העתקת האלכסון $F^{(i)}\to\hat F^{(i)}$ הנה איזומורפיזם. מכאן נובע שההעתקה $\alpha\colon F\to\hat F$ הנה איזומורפיזם. מההנחת ההאוסדורף על M נובע ש $\beta\colon M\to\hat M$ חד חד ערכית.

נסיֵם את הוכחת המשפט על ידי שנוכיח ש $x_1,\dots,x_r$ יוצרים את M כמודול־A. ואכן, יהי $y\in M$ ויהי $\hat y=\beta(y)$. לפי הפסקה הקודמת קיָמים $\hat f\in\hat F$ ו $f\in F$ כך ש $\hat\varphi(\hat f)=\hat y$ ו $\alpha(f)=\hat f$. נִרשם את f בצורה $f=(a_1,\dots,a_r)$ עם $a_1,\dots,a_r\in A$. אזי $\varphi(f)=\sum_{i=1}^r a_ix_i$ ו $\beta(\varphi(f))=\hat\varphi(\alpha(f))=\hat y=\beta(y)$. הואיל ו β חד חד ערכי, $y=\varphi(f)=\sum_{i=1}^r a_ix_i$, כנדרש.

הוכחה ב: כמו בהוכחה א נבחר לכל $1\le i\le r$ אבר $x_i\in M_{n(i)}$ כך ש $x_1+M_{n(1)+1},\dots,x_r+M_{n(r)+1}$ יוצרים את $G(M)$ מעל $G(A)$. עתה נתבונן באבר $y\in M$ ונמצא בהשראה על n אברים $a_{ni}\in A$ כך ש $a_{ni}-a_{n-1,i}\in\mathfrak a^{\max(0,n-1-n(i))}$ ו

$$y\equiv\sum_{i=1}^r a_{ni}x_i \mod M_n \tag{11}$$

עבור $n=0$ נבחר $a_{0i}=0$ לכל i. נניח עתה ש (11) מתקיֵם. אזי $y-\sum_{i=1}^r a_{ni}x_i+M_{n+1}\in M_n/M_{n+1}$.
לפי ההנחה קיָמים $b_i\in\mathfrak{a}^{m(i)}$ כך שהשויון הבא נכון ב $G(M)=\bigoplus_{n=0}^\infty M_n/M_{n+1}$:

$$y-\sum_{i=1}^r a_{ni}x_i+M_{n+1}=\sum_{i=1}^r(b_i+\mathfrak{a}^{m(i)+1})(x_i+M_{n(i)+1})=\sum_{i=1}^r b_ix_i+M_{m(i)+n(i)+1}$$

אם נשוה בין האברים ההומוגניים בשני האגפים, נוכל לזרק את ה i שעבורם $m(i)+n(i)\neq n$ ולהחליף את המחֻברים המתאימים בכאלו שבהם $b_i=0$ כך שבסופו של דבר נוכל להניח ש $m(i)+n(i)=n$ או $n<n(i)$ לכל i במלים אחרות, $b_i\in\mathfrak{a}^{\min(0,n-n(i))}$ לכל i. נסמן $a_{n+1,i}=a_{ni}+b_i$ ונקבל ש

$$y\equiv\sum_{i=1}^r a_{n+1,i}x_i \mod M_{n+1}$$

וההשראה הֻשלמה.

הואיל ו A מֻשלם תחת הטופולוגיה ה $\mathfrak{a}$־אדית, הסדרה $a_{1i},a_{2i},a_{3i},\ldots$ מתכנסת לאבר a_i של A, $i=1,\ldots,r$. הואיל ו $\bigcap_{n=0}^\infty M_n=0$, נובע מ (11) ש $y=\sum_{i=1}^r a_ix_i$, כפי שהיה להוכיח. ∎

למה 2.7.4: *יהיו A חוג, $\mathfrak{a}$ אידאל של A, M מודול־A ו $(M_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ מסננת־$\mathfrak{a}$ של M. נניח ש A מֻשלם ו M הנו האוסדורף בטופולוגית־$\mathfrak{a}$. עוד נניח ש $G(M)$ נטרי כמודול־$G(A)$. אזי M נטרי כמודול־A.*

הוכחה: עלינו להראות שכל תת מודול N של M נוצר סופית. ואכן נבנה מסננת־$\mathfrak{a}$ עבור N על ידי שנגדיר $N_n=M_n\cap N$. אזי $\bigcap_{n=0}^\infty N_n\subseteq\bigcap_{n=0}^\infty M_n=0$ ולכן N הנו האוסדורף. מהקשר $M_{n+1}\cap N_n=N_{n+1}$ נובע שההעתקה $N_n/N_{n+1}\to M_n/M_{n+1}$ חד חד ערכית. לכן ההעתקה המֻשרית $G(N)\to G(M)$ חד חד ערכית. הואיל ו $G(M)$ נטרי, תת המודול $G(N)$ נוצר סופית מעל $G(A)$. אם נפעיל את למה 2.7.3 על N במקום על M נקבל ש N נוצר סופית כמודול־A. ∎

בזאת מגיעים אנו לתוצאה העִקרית של הסעיף.

משפט 2.7.5: *יהי $\mathfrak{a}$ אידאל של חוג נטר A. אזי ההשלמה ה $\mathfrak{a}$־אדית $\hat{A}$ של A היא חוג נטר.*

הוכחה: לפי למה 2.7.1, $G_{\hat{\mathfrak{a}}}(\hat{A})$ הנו חוג נטר. עתה נפעיל את למה 2.7.4 על $\hat{A}$ במקום על A ועל $\hat{A}$ במקום M כדי לקבל ש $\hat{A}$ נטרי כמודול־$\hat{A}$. זה אומר ש $\hat{A}$ הנו חוג נטר. ∎

תוצאה 2.7.6: *אם A הוא חוג נטר, אזי חוג טורי החזקות הפורמליים $A[[X_1,\ldots,X_n]]$ הנו חוג נטר. בפרט, $K[[X_1,\ldots,X_n]]$ הוא חוג נטר לכל שדה K.*

הוכחה: לפי דֻגמה 2.4.2, $A[[X_1,\ldots,X_n]]$ איזומורפי להשלמה של $A[X_1,\ldots,X_n]$ ביחס לאידאל $\sum_{i=1}^n AX_i$. לפי משפט הבסיס של הלברט, $A[X_1,\ldots,X_n]$ נטרי. לכן, לפי משפט 2.7.5, גם $A[[X_1,\ldots,X_n]]$ נטרי.

כמובן שהוכחה זו לנטריות של $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ הרבה יותר מֻרכבת מזו שנתנו למשפט יב.ג של [אלגברה ב3].

3. חוגי ארטין

חוגי ארטין מֻגדרים באפן דומה לחוגי נטר על ידי סְדרות יורדות של אידאלים. כל שדה הוא חוג ארטין וכל חוג ארטין הוא חוג נטר. למודול נוצר סופית מעל חוג ארטין יש פונקצית אֹרך המודדת את גדלו כמו שהממד מודד את גדלו של מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה.

3.1 **מודולי ארטין.**

יהי A חוג ו M מודול־A אומרים ש M הוא **מודול ארטין** אם הוא מקיֵם את התנאים השקולים של הלמה הבאה.

למה 3.1.1: *התנאים הבאים על מודול־A M שקולים זה לזה:*

(א) *כל סדרה יורדת $M \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq$ של תת מודולים* ***עמידה*** *(כלומר, קים m כך ש $M_n = M_m$ לכל $n \geq m$).*

(ב) *לכל קבוצה לא ריקה של תת מודולים של M יש אבר מזערי.*

אומרים שחוג A הוא **חוג ארטין** אם הוא מודול ארטין כמודול מעל עצמו. במלים אחרות, כל סדרה יורדת של אידאלים של A עמידה, לחלופין לכל קבוצה לא ריקה של אידאלים של A יש אבר מזערי. לדֻגמה, כל שדה הוא חוג ארטין, וכל מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה הוא ארטיני. כמו כן, כל חוג סופי הוא ארטיני. לעומת זאת, $\mathbb{Z}$ אינו חוג ארטין. כמו כן, חוגי פולינומים מעל שדה אינם חוגי ארטין.

למה 3.1.2: *תהי $0 \longrightarrow K \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0$ סדרה מדֻיקת קצרה של מודולי־A. אזי L הוא מודול ארטין אם ורק אם K ו M הם מודולי ארטין.*

הוכחה: נניח ש K ו M ארטינים. תהי $L \supseteq L_1 \supseteq L_2 \supseteq \cdots$ סדרה יורדת של מודולי־A. אזי קיָם m טבעי כך ש $K \cap L_n = K \cap L_m$ ו $K + L_n = K + L_m$ לכל $n \geq m$. מכאן נובע ש $L_n = L_m$ לכל $n \geq m$. הכוון ההפוך עוד יותר פשוט. ∎

תוצאה 3.1.3:

(א) *אם $M_1, \ldots, M_n$ הם מודולי־A ארטיניים אזי גם $\bigoplus_{i=1}^n M_n$ ארטיני.*

(ב) *אם A ארטיני ו M הוא מודול־A נוצר סופית, אזי M ארטיני.*

(ג) *אם A הוא חוג ארטין ו $\mathfrak{a}$ אידאל של A, אזי גם $A/\mathfrak{a}$ הוא חוג ארטין.*

הוכחת (ב): M הוא מנה של סכום ישר של מספר סופי של עֻתקים של A. עתה יש להשתמש ב (א) ובלמה 3.1.1.
∎

3.2 **ארך של מודול.**

שרשרת של תת מודולים של מודול M הנה סדרה סופית יורדת ממש של תת מודולים המתחילה ב M ומסתיֶמת ב 0:

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = 0 \tag{1}$$

האֹרך של השרשרת הוא מספר ההכלות בשרשרת, כלומר n. אומרים ש (1) היא **סדרת הֶרכב** אם אי אפשר להאריך אותה, כלומר לכל $0 \leq k \leq n-1$ אין שום תת מודול בין M_{k+1} לבין M_k. לחלופין, M_k/M_{k+1} הוא מודול־A **פשוט** , כלומר אין לו תת מודולים פרט לו עצמו ולאפס. לפי משפט יורדן־הֶלדר (Jordan-Hölder), לכל שתי סִדרות הרכב של M יש אותו אֹרך ולאחר סִדור מחדש, מודולי המנה של הסדרה האחת איזומורפיים למודולי המנה של הסדרה האחרת. אנו לא נזדקק כאן לתכונה השניָה ואלו את הראשונה נוכיח באפן ישיר.

נסמן ב $l(M)$ את הארך המזערי של סִדרות הרכב של M.

משפטון 3.2.1: *יהי M מודול־A בעל סדרת הרכב מאֹרך n. אזי כל סדרת הרכב של M הנה מארך n. יתר על כן, כל שרשרת ב M נִתנת להרחבה לסדרת הרכב.*

הוכחה: נחלק את ההוכחה לשלשה חלקים.

חלק א: *אם L הוא תת מודול נאות של M, אזי $l(L) < l(M)$.* ואכן, תהי (1) סדרת הרכב מזערית של M. נסמן $L_i = L \cap M_i$, $i = 0, \ldots, n$. אם $i \geq 1$, אזי $(L_{i-1} + M_i)/M_i$ הוא תת מודול של המודול הפשוט M_{i-1}/M_i ו $L_{i-1}/L_i \cong (L_{i-1} + M_i)/M_i$. לכן $L_{i-1}/L_i = 0$ כלומר $L_{i-1} = L_i$ או $L_{i-1} + M_i = M_{i-1}$ ו L_{i-1}/L_i הוא מודול פשוט לא טריביאלי. לאחר זריקת החזרות מהשרשרת

$$L = L_0 \supseteq L_1 \supseteq \cdots \supseteq L_n = 0 \tag{2}$$

נקבל שהיא סדרת הרכב וארכה אינו עולה על n. מכאן ש $l(L) \leq l(M)$.

נניח בשלילה ש $l(L) = l(M)$. אזי כל ההכלות ב (2) הנן נאותות ו $L_{i-1}+M_i = M_{i-1}$ לכל $1 \leq i \leq n$. בפרט $M_{n-1} = L_{n-1} + M_n = L_{n-1}$, $M_{n-2} = L_{n-2} + M_{n-1} = L_{n-2} + L_{n-1} = L_{n-2}$, $M_{n-3} = L_{n-3}$ וכן הלאה. לאחר n צעדים כאלו נקבל ש $L = L_0 = M_0 = M$, בסתירה להנחה ש $L \subset M$. לכן, $l(L) < l(M)$ כנִטען.

חלק ב: *הארך של כל שרשרת ב M אינו עולה על $l(M)$.* תהי $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_m = 0$ שרשרת תת מודולים ב M. אזי, לפי (א), $l(M) > l(M_1) > \cdots > l(M_m)$. לכן, $m \leq l(M)$.

חלק ג: *הארך של כל סדרת הרכב ב M שוה ל $l(M)$.* כל סדרת הרכב של M היא שרשרת ב M. לפי חלק (ב), ארכה אינו עולה על $l(M)$. הואיל ו $l(M)$ הֻגדר כארך המזערי של סדרות הרכב, נקבל שהארך של כל סדרות ההרכב של M שוה ל $l(M)$.

נתבונן עתה בשרשרת כלשהיא של M. לפי חלק (ב), הארך שלה אינו עולה של $l(M)$. אם הארך שוה ל $l(M)$, השרשרת היא סדרת הרכב (אחרת נתן להאריך את השרשרת). אם הארך קטן מ $l(M)$, היא אינה סדרת הרכב ולכן נתן להאריך אותה עד שתהיה סדרת הרכב. ∎

אומרים שמודול M מקיֵם את **תנאי השרשרת העולה** אם כל סדרה עולה ממש של תת מודולים של M סופית. אומרים ש M מקיֵם את **תנאי השרשרת היורדת** אם כל סדרה יורדת ממש של תת מודולים של M סופית.

משפטון 3.2.2: *למודול M יש סדרת הרכב אם ורק אם הוא מקיֵם את שני תנאי השרשרת.*

הוכחה: נניח של M יש סדרת הרכב. אזי, לפי משפטון 3.2.1 הארך של כל שרשרת ב M חסום. לכן, M מקיֵם את שני תנאי השרשרת.

להפך, נניח ש M מקיֵם את שני תנאי השרשרת. אם $M \neq 0$, יש בקבוצת המודולים הנאותים של M אבר מרבי M_1 (אחרת היתה ב M שרשרת עולה אינסופית). אם $M_1 \neq 0$, אזי יש ל M_1 תת מודול מרבי M_2. תהליך זה חיב להסתיֵם אחרי מספר סופי של צעדים (אחרת היתה ל M שרשרת יורדת אינסופית של תת מודולים) בסדרת הרכב של M. ∎

מודול המקיֵם את שני תנאי השרשרת נקרא **מודול בעל אֹרך סופי.** לפי המשפטונים 3.2.1 ו 3.2.2 יש ל M סִדרות הרכב ולכֻלם אותו הארך $l(M)$.

תהי λ העתקה ממחלקת מודולי־A הנוצרים סופית לתוך $\mathbb{Z}$. אומרים ש λ **חבורית** אם לכל סדרה מדֻיקת קצרה $0 \to L \to M \to N \to 0$ של מודולי־A נוצרים סופית מתקיֵם $\lambda(M) = \lambda(L) + \lambda(N)$. בפרט $\lambda(0) = 0$.

משפטון 3.2.3:

(א) *הארך $l(M)$ הנו העתקון חבורי על מחלקת מודולי־A בעלי ארך סופי.*

(ב) *אם $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_{n-1} \supseteq M_n$ היא סדרה יורדת של מודולי־A, וכל אחד מהמודולים M_{i-1}/M_i בעל ארך סופי, אזי גם M בעל ארך סופי ו $l(M) = \sum_{i=1}^{n} l(M_{i-1}/M_i)$.*

הוכחת א: תהי $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ סדרה מדֻיקת קצרה של מודולי־A בעלי ארך סופי. נבחר סדרת הרכב ב N. תמונתה ההפוכה ב M תהיה סדרה יורדת ממש של תת מודולים של M המתחילה ב M ומסתימת ב L ובעלת מנות פשוטות. נרכיב סדרה זו עם סדרת הרכב של L כדי לקבל סדרת הרכב של M שארכה $l(L) + l(N)$. לכן, $l(M) = l(L) + l(N)$.

הוכחת ב: נצא מהסדרה המדֻיקת $0 \to M_{n-1}/M_n \to M/M_n \to M/M_{n-1} \to 0$. הנחת אנדוקציה נותנת שהארך של M/M_{n-1} סופי ו $l(M/M_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} l(M_{i-1}/M_i)$. לפי (א), גם M/M_n הוא מודול בעל ארך סופי ו $l(M/M_n) = l(M_{n-1}/M_n) + l(M/M_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} l(M_{i-1}/M_i)$. ∎

דֻגמה 3.2.4: יהי V מרחב וקטורי ממּמד n מעל שדה K ויהי $v_1,\dots,v_n$ בסיס של V. נסמן $V_k = \sum_{i=k+1}^{n} Kv_i$. אזי $V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_n = 0$ היא סדרת הרכב של V. מכאן ש $l(V) = \dim(V)$.

להפך, אם V הוא מודול־K ארטיני, אזי הוא נוצר סופית ולכן גם בעל ממד סופי. ∎

למה 3.2.5: *יהי A חוג ויהיו $\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_n$ אידאלים מרביים של A. לכל $1 \le k \le n$ נסמן $\mathfrak{n}_k = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_k$. נניח ש $\mathfrak{n}_n = 0$. אזי A הנו חוג ארטין אם ורק אם A הוא חוג נטר.*

הוכחה: כל אחת מהמנות $\mathfrak{n}_k/\mathfrak{n}_{k+1}$ הוא בעת ובעונה אחת מודול־A ומרחב וקטורי מעל השדה $A/\mathfrak{m}_{k+1}$. הכפל בסקלרים מֻגדר היטב על ידי הנֻסחה $(a+\mathfrak{m})(x+\mathfrak{n}_{k+1}) = ax + \mathfrak{n}_{k+1}$ (כי $\mathfrak{m}_{k+1}\mathfrak{n}_k = \mathfrak{n}_{k+1}$). תת קבוצה של $\mathfrak{n}_k/\mathfrak{n}_{k+1}$ הנה תת מודול אם ורק אם היא תת מרחב.

נניח עתה ש A הנו חוג ארטין. אזי כל אחת מהמנות $A/\mathfrak{n}_k$ היא מודול ארטין (למה 3.1.2). עיון בסדרה המדֻיקת הקצרה

$$0 \to \mathfrak{n}_k/\mathfrak{n}_{k+1} \to A/\mathfrak{n}_{k+1} \to A/\mathfrak{n}_k \to 0 \qquad (3)$$

מראה שגם $\mathfrak{n}_k/\mathfrak{n}_{k+1}$ הוא מודול ארטין. לפי דֻגמה 3.2.4, $\mathfrak{n}_k/\mathfrak{n}_{k+1}$ הוא מרחב בעל ממד סופי. לכן, הוא מקיֵם את תנאי השרשרת העולה לתת מרחבים ולכן לתת מודולים. עתה, $A/\mathfrak{n}_1$ הוא שדה ולכן מקיֵם את תנאי השרשרת העולה לתת מודולים (באפן טריביאלי). אנדוקציה על k תוך כדי שמוש בסדרה (3) מראה ש $A/\mathfrak{n}_k$ מקיֵם את תנאי השרשרת העולה לתת מודולים. בפרט, $A = A/\mathfrak{n}_n$ (כי $\mathfrak{n}_n = 0$) מקיֵם תנאי זה. לכן, A נטרי.

החלפת התפקידים של שרשראות עולות של תת מודולים עם שרשראות יורדות בפסקה הקודמת מראה שאם A נטרי, אזי A ארטיני. ∎

3.3 **המבנה של חוגי ארטין.**

נאמר **שממד** (או **ממד קרול**) של חוג A הנו n, אם n הוא הארך המרבי של סדרה יורדת של אידאלים ראשוניים $\mathfrak{p}_0 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_n$ של אידאלים ראשוניים של A. נסמן $n = \dim(A)$. נוכיח פה שכל חוג ארטין A הנו חוג נטר, ליתר דיוק, חוג נטר ממּמד 0. יתר על כן, A איזומורפי למכפלה ישרה של מספר סופי של חוגי ארטין מקומיים.

משפטון 3.3.1: *כל אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$ של חוג ארטין A הנו מרבי.*

הוכחה: נתבונן בתחום השלמות $B = A/\mathfrak{p}$ ונבחר $x \in B$, $x \neq 0$. הסדרה $Bx \supseteq Bx^2 \supseteq Bx^3 \supseteq$ עמידה. קיָם אפוא n טבעי כך ש $Bx^n = Bx^{n+1}$. לכן קיָם $y \in B$ כך ש $x^n = x^{n+1}y$. נצמצם את x^n משני האגפים כדי לקבל $xy = 1$. במלים אחרות, x הפיך. לכן, B שדה, ומכאן ש $\mathfrak{p}$ הוא אידאל מרבי של A, כנטען. ∎

מסקנה 3.3.2: *השרשון הנילי של חוג ארטין מתלכד עם שרשון יעקבסון שלו.*

נזכיר שאם אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$ בחוג A מקיף חתוך סופי של אידאלים של A אזי הוא מקיף לפחות אחד מהנחתכים [אלגברה ב3, משפטון א.יג].

משפטון 3.3.3: *לחוג ארטין A יש רק מספר סופי של אידאלים מרביים (ולכן רק מספר סופי של אידאלים ראשוניים).*

הוכחה: כמו בכל חוג, קבוצת האידאלים המרביים של A אינה ריקה. לכן יש לקבוצת כל החתוכים הסופיים של אידאלים מרביים אבר מזערי $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i$. יהי $\mathfrak{m}$ אידאל מרבי כלשהוא. אזי, $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i = \mathfrak{m} \cap \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i$. לכן קיָם i כך ש $\mathfrak{m}_i \supseteq \mathfrak{m}$. הואיל ו $\mathfrak{m}_i$ מרבי, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_i$. ■

משפטון 3.3.4: *השרשון הנילי $\mathfrak{n}$ של חוג ארטין הנו אפיסי (nilpotent), כלומר קיָם n טבעי כך ש $\mathfrak{n}^n = 0$.*

הוכחה: תנאי השרשרת היורדת נותן k טבעי כך ש $\mathfrak{n}^m = \mathfrak{n}^k$ לכל $m \geq k$. נסמן $\mathfrak{a} = \mathfrak{n}^k$ ונניח בשלילה ש $\mathfrak{a} \neq 0$. אזי $\mathfrak{a}\mathfrak{a} = \mathfrak{n}^{2k} = \mathfrak{a} \neq 0$. לכן, הקבוצה $\mathcal{B}$ של כל האידאלים $\mathfrak{b}$ המקיְמים $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \neq 0$ אינה ריקה. יהי $\mathfrak{c}$ אידאל מזערי ב $\mathcal{B}$. בפרט $\mathfrak{a}\mathfrak{c} \neq 0$. לכן קיָם $c \in \mathfrak{c}$ כך ש $\mathfrak{a}c \neq 0$. הואיל ו $\mathfrak{a}(\mathfrak{a}c) = \mathfrak{a}^2c = \mathfrak{a}c \neq 0$ ו $\mathfrak{a}c \subseteq \mathfrak{c}$, נובע מהמזעריות של $\mathfrak{c}$ ש $\mathfrak{a}c = \mathfrak{c}$. לכן קיָם $a \in \mathfrak{a}$ כך ש $ac = c$. הואיל ו $a \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{n}$ קיָם n טבעי כך ש $a^n = 0$. לכן, $c = ac = a^2c = \cdots = a^nc = 0$, בסתירה לכך ש $\mathfrak{a}c \neq 0$. ■

למה 3.3.5: *יהיו $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ האידאלים המרביים של חוג ארטין A. אזי קיָם n טבעי כך ש $\prod_{i=1}^{r} \mathfrak{m}_i^n = 0$.*

הוכחה: יהי $\mathfrak{n} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{m}_i$ שָרשון יעקבסון של A. לפי מסקנה 3.3.2, $\mathfrak{n}$ הוא השרשון הנילי ולפי משפטון 3.3.4 קיָם n טבעי כך ש $\mathfrak{n}^n = 0$. לכן, $\prod_{i=1}^{r} \mathfrak{m}_i^n \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{m}_i\right)^n = \mathfrak{n}^n = 0$, כנטען. ■

משפט 3.3.6 (משפט Akizuki): *חוג A הנו ארטיני אם ורק אם A נטרי ו* $\dim(A) = 0$.

הוכחה: נניח ש A הנו חוג ארטין. לפי משפטון 3.3.1, $\dim(A) = 0$.

יהיו $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ האידאלים המרביים של A לפי למה 3.3.5, קיָם n טבעי כך ש $\prod_{i=1}^{r} \mathfrak{m}_i^n = 0$. לפי למה 3.2.5, A נטרי.

להפך, נניח ש A נטרי ו $\dim(A) = 0$. אזי יש ב A רק מספר סופי של אידאלים ראשוניים מזעריים [אלגברה ב3, משפטון י.ה]. יהיו $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ האידאלים הללו. מההנחה ש $\dim(A) = 0$, נובע שכל אחד מאלו הוא אידאל מרבי. אם $\mathfrak{m}$ הוא אידאל ראשוני, אזי הוא מקיף $\mathfrak{m}_i$ עבור איזה שהוא $1 \leq i \leq r$ ולכן, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_i$. מכאן ש $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ הם כל האידאלים הראשוניים של A. לכן, $\mathfrak{n} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{m}_i$ הוא השרשון הנילי של A. יהיו $x_1, \ldots, x_s$ יוצרים של $\mathfrak{n}$ (כאן אנו משתמשים בהנחה ש A נטרי). לכל i קים n_i טבעי כך ש $x_i^{n_i} = 0$. אם נסמן $n = n_1 + \cdots + n_s$ נקבל ש $\mathfrak{n}^n = 0$. לכן, $\prod_{i=1}^{r} \mathfrak{m}_i^n = 0$. שוב, לפי למה 3.2.5, A ארטיני. ■

תוצאה 3.3.7: *יהי A מודול ארטין ו M מודול־A נוצר סופית. אזי יש ל M ארך סופי. בפרט, אם M הוא מודול־A חפשי מדרגה r, אזי $l(M) = r \cdot l(A)$.*

הוכחה: הואיל ו A הנו מודול ארטין, M מקיֵם את תנאי השרשרת היורדת (תוצאה 3.1.3(ב)). לפי משפט Akizuki, A הוא חוג נטר. לכן M מקיֵם גם את תנאי השרשרת העולה. לכן, M בעל ארך סופי. בפרט, אם M חפשי מדרגה r, אזי M הוא סכום ישר של r עֻתקים של A. מהחבוריות של פונקציה הארך נובע ש $l(M) = r \cdot l(A)$. ∎

אם $(A, \mathfrak{m})$ הנו חוג ארטין מקומי, אזי $\mathfrak{m}$ הוא האידאל הראשוני היחיד של A (לפי משפטון 3.3.1) ולכן $\mathfrak{m}$ הוא גם האידאל הנילי של A. לכן, כל אבר של $\mathfrak{m}$ הנו אפיסי. מכאן נובע שכל אבר של A הוא הפיך או אפיסי. יתר על כן, לפי משפטון 3.3.4, גם $\mathfrak{m}$ עצמו אפסי. דֻגמה לחוג כזה הנו $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ עבור p ראשוני.

משפטון 3.3.8: *עבור חוג נטר מקומי $(A, \mathfrak{m})$ מתקיֵם בדיוק אחד משני התנאים הבאים:*

(א) *$\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}$ לכל n טבעי.*

(ב) *קיָם n טבעי כך ש $\mathfrak{m}^n = 0$. במקרה זה A ארטיני.*

הוכחה: נניח שתנאי (א) אינו מתקיֵם. אזי קיָם n טבעי כך ש $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$. הואיל ו A נטרי, $\mathfrak{m}^n$ נוצר סופית. לפי הלמה של נקיָמה [אלגברה ב3, משפטון ג.ג], $\mathfrak{m}^n = 0$. לפי למה 3.2.5, A ארטיני. ∎

משפט 3.3.9 (משפט המבנה של חוגי ארטין): *כל חוג ארטין נתן להצגה באפן יחיד (עד כדי איזומורפיזם) כמכפלה ישרה של מספר סופי של חוגי ארטין מקומיים.*

הוכחת הקיום: יהיו $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ האידאלים המרביים השונים של A. למה 3.3.5 נותנת n טבעי כך ש $\prod_{i=1}^r \mathfrak{m}_i^n = 0$. הואיל ו $\mathfrak{m}_i$ מרביים ושונים זה לזה, גם $\mathfrak{m}_i^n$ זרים זה לזה. לכן, לפי [אלגברה ב3, משפטון א.יא(ב)], $A \cong \prod_{i=1}^r A/\mathfrak{m}_i^n$. עבור כל i החוג $A/\mathfrak{m}_i^n$ הוא חוג ארטין מקומי (עם אידאל מרבי $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_i^n$).

הוכחת היחידות: נניח ש $A \cong \prod_{j=1}^s A_j$, באשר A_j הוא חוג ארטין מקומי. בלי הגבלת הכלליות נניח ש $A = \prod_{j=1}^s A_j$ ולכל j יהי $\pi_j \colon A \to A_j$ ההטלה המתאימה ו $\mathfrak{a}_j = \mathrm{Ker}(\pi_j)$. לפי [אלגברה ב3, משפטון א.יא], $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$ זרים זה לזה ו $\prod_{j=1}^s \mathfrak{a}_j = \bigcap_{j=1}^s \mathfrak{a}_j = 0$. לכל j יהי $\mathfrak{q}_j$ האידאל המרבי היחיד של A_j. אזי $\mathfrak{m}'_j = \pi_j^{-1}(\mathfrak{q}_j)$ הוא אידאל מרבי של A. יתר על כן, $\mathfrak{m}'_1, \ldots, \mathfrak{m}'_s$ שונים זה מזה.

טענה: *אם $\mathfrak{m}$ הוא אידאל מרבי של A, אזי הוא שוה לאחד ה $\mathfrak{m}'_j$דים.* אחרת, לכל j מתקיֵם $\mathfrak{m}' \not\subseteq \mathfrak{m}'_j$ ולכן $\pi_j(\mathfrak{m}')$ הוא אידאל של A_j שאינו מוכל באידאל המרבי היחיד $\mathfrak{q}_j$ של A_j. לכן, $\pi_j(\mathfrak{m}') = A_j$ ומכאן ש $A = \mathfrak{m}' + \mathfrak{a}_j$. קיָמים אפוא $x_j \in \mathfrak{m}'_j$ ו $a_j \in \mathfrak{a}_j$ כך ש $x_j + a_j = 1$. אם נכפיל את s השויונות האלו נקבל אבר $x \in \mathfrak{m}'$ כך ש $x + a_1 \cdots a_s = 1$. לפי הפסקה הקודמת, $a_1 \cdots a_s = 0$ ולכן $x = 1$, בסתירה לכך ש $\mathfrak{m}$ הוא אידאל נאות.

משתי הפסקאות האחרונות עולה ש $r = s$ ושלאחר מִספור מחדש של הגורמים $A_1, \ldots, A_r$ מתקיֵם $\mathfrak{m}_j = \mathfrak{m}'_j$ ו $\mathfrak{m}_j$, $\pi_j^{-1}(\mathfrak{q}_j) = \mathfrak{m}_j$, $j = 1, \ldots, r$. הואיל ו A ארטיני, גם A_j ארטיני ומקומי. לפי משפטון 3.3.8, קיָם n כך שלכל j מתקיֵם $\mathfrak{q}_j^n = 0$. לכן, $\mathfrak{a}_j = \pi_j^{-1}(0) = \pi_j^{-1}(\mathfrak{q}_j)^n = \mathfrak{m}_j^n$.

אם m הוא מספר טבעי נוסף כך ש $\mathfrak{m}_j^{m+1} = \mathfrak{m}_j^m$ לכל j, אזי נוכל להניח ש $n \leq m$ ולקבל ש $\mathfrak{m}_j^n = \mathfrak{m}_j^m$. האידאלים $\mathfrak{a}_j$ נקבעים אפוא באפן חד ערכי על ידי A ולכן גם הפרוק של A למכפלה של חוגים מקומיים נקבע באפן חד ערכי. ∎

הממד של חוג A הֻגדר בפרק כארך המרבי של שרשרת $\mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$ של אידאלים ראשוניים של A. אם A הוא אלגברה נוצרת סופית מעל שדה סגור אלגברית A ו V היא יריעת האפסים של A, אזי הממד של V שוה לממד של A (מסקנה ממשפט 4.1.5). במקרה הכללי מהוה הממד את כלי לְמדידת הסִבוכיות של A.

4.1 המֵמד של חוגי פולינומים

מטרתנו בסעיף זה היא להוכיח שאם R הוא תחום שלמות הנוצר סופית כחוג מעל שדה K, אזי $\dim(R) = \text{trans.deg}(\text{Quot}(R)/K)$. הכלים הנחוצים להוכחה הם "משפט העליה" "ומשפט התִקון של נטר".

למה 4.1.1 ([אלגברה ב3, תוצאה ו.ט]): *יהיו $B \subseteq A$ חוגים כך ש B שלם מעל A. יהיו $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}'$ אידאלים ראשוניים של B. נניח ש $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{q}' \cap A$. אזי $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.*

משפטון 4.1.2 (משפט העֲליה [אלגברה ב3, משפט ו.יא]): *יהיו $B \subseteq A$ חוגים כך ש B שלם מעל A. יהיו $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$ אידאלים ראשוניים של A ויהי $\mathfrak{q}_1$ אידאל ראשוני של B כך ש $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$. אזי קיָם אידאל ראשוני $\mathfrak{q}_2$ של B המקיף את $\mathfrak{q}_1$ כך ש $\mathfrak{q}_2 \cap A = \mathfrak{p}_2$.*

למה 4.1.3: *יהי S חוג השלם מעל חוג R. אזי $\dim(R) = \dim(S)$.*

הוכחה: תהי $\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_n$ שרשרת של אידאלים ראשוניים של S. לכל i, $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i \cap R$ הוא אידאל ראשוני של R ולפי למה 4.1.1 $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$. לכן, $\dim(S) \le \dim(R)$.

להפך, לפי משפט העלִיָה, כל שרשרת סופית של אידאלים ראשוניים של R נִתנת להרמה לשרשרת סופית של אידאלים ראשוניים של S בעלת אותו הארֹך. לכן, $\dim(R) \le \dim(S)$. אם נצרף אי שויון זה לאי השויון בפסקה הקודמת נקבל את מסקנת המשפט, $\dim(R) = \dim(S)$. ∎

למה 4.1.4 (משפט התִקון של נטר): *יהי $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ תחום שלמות הנוצר סופית (כחוג) מעל שדה K וִיהי $r = \text{trans.deg}(\text{Quot}(R)/K)$. אזי קיָמים $t_1, \ldots, t_r$ ב R שאינם תלויים אלגברית מעל K כך ש $K[x_1, \ldots, x_n]$ שלם מעל $K[t_1, \ldots, t_r]$.*

הוכחה: אם $x_1, \ldots, x_n$ אינם תלויים אלגברית מעל K, אזי $r = n$ ונבחר $t_i = x_i$, $i = 1, \ldots, n$. אחרת קיֶמת קבוצה לא ריקה I של n־יות $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_r)$ של מספרים שלמים אי שליליים ולכל $\mathbf{i} \in I$ קיָם $a_{\mathbf{i}} \in K^\times$ כך ש

$$\sum_{\mathbf{i} \in I} a_{\mathbf{i}} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} = 0 . \qquad (1)$$

יהיו $k_2,\ldots,k_n$ מספרים טבעיים ונציב $y_2=x_2-x_1^{k_2},\ldots,y_n=x_n-x_1^{k_n}$ ב (1) כדי לקבל

$$\sum_{\mathbf{i}\in I} a_{\mathbf{i}} x_1^{i_1}(y_2+x_1^{k_2})^{i_2}\cdots(y_n+x_1^{k_n})^{i_n}=0 \tag{2}$$

נפתח את הגורם ה j במְחבר $\mathbf{i}$ של (2) ונקבל פולינום $f_{\mathbf{i},j}\in K[X_1,\ldots,X_n]$ כך ש

$$(y_j+x_1^{k_j})^{i_j}=f_{\mathbf{i},j}(x_1,y_j)+x_1^{k_j i_j} \tag{3}$$

ו $\deg_{X_1}(f_{\mathbf{i},j})<k_j i_j$. הכפלה של כל הבטויים (3) תתן פולינום $f_{\mathbf{i}}\in K[X_1,\ldots,X_n]$ כך ש

$$a_{\mathbf{i}} x_1^{i_1}(y_2+x_1^{k_2})^{i_2}\cdots(y_n+x_1^{k_n})^{i_n}=f_{\mathbf{i}}(x_1,y_2\ldots,y_n)+a_{\mathbf{i}}x_1^{i_1+k_2i_2+\cdots+k_ni_n} \tag{4}$$

ו $\deg_{X_1} f_{\mathbf{i}}<k_1+k_2i_2+\cdots+k_ni_n$. אם נסכם את כל הבטויים (4) נקבל מ (2) פולינום $f\in K[X_1,\ldots,X_n]$ כך ש

$$f(x_1,y_2\ldots,y_n)+\sum_{\mathbf{i}\in I} a_{\mathbf{i}}x_1^{i_1+k_2i_2+\cdots+k_ni_n}=0 \tag{5}$$

ו $\deg_{X_1} f<\max_{\mathbf{i}\in I}(i_1+k_2i_2+\cdots+k_ni_n)$. לכן, אם נבחר את $k_2,\ldots,k_n$ כך ש

$$i_1+k_2i_2+\cdots+k_ni_n\neq i'_1+k_2i'_2+\cdots+k_ni'_n$$

עבור כל שני אברים שונים זה מזה $\mathbf{i},\mathbf{i}'$ ב I, נקבל שאין צמצומים במְחבר השני באגף ימין של (5) ולכן, אחרי חֲלֻקה בקבוע, מהוה (5) משואה מתֻקנת עבור x_1 מעל $K[y_2\ldots,y_n]$.

הבחירה של $k_2,\ldots,k_n$ תעשה כך ש $h(k_2,\ldots,k_n)\neq 0$ באשר

$$h(Y_2,\ldots,Y_n)=\prod_{\mathbf{i}\neq\mathbf{i}'}\left[(i_1+Y_2i_2+\cdots+Y_ni_n)-(i'_1+Y_2i'_2+\cdots+Y_ni'_n)\right]$$

הנו פולינום שונה מאפס במקדמים שלמים.

מההגדרות ומ (5) נובע ש $K[x_1,x_2,\ldots,x_n]=K[x_1,y_2,\ldots,y_n]$ שלם מעל $K[y_2,\ldots,y_n]$. בפרט, מעלת הנעלות של $K(y_2,\ldots,y_n)$ מעל K היא כמו זו של $K(x_1,\ldots,x_n)$. אנדוקציה על n נותנת אפוא $t_1,\ldots,t_r\in K[y_2,\ldots,y_n]$ כך ש $K[y_2,\ldots,y_n]$ שלם מעל $K[t_1,\ldots,t_r]$. לכן, גם $K[x_1,\ldots,x_n]$ שלם מעל $K[t_1,\ldots,t_r]$. ∎

משפט 4.1.5: *יהי $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ תחום שלמות נוצר סופית כחוג מעל שדה K, יהי $F = K(x_1, \ldots, x_n)$ שדה המנות של R. אזי $\dim(R) = \text{trans.deg}(F/K)$. בפרט, אם $x_1, \ldots, x_n$ אינם תלויים אלגברית מעל R, אזי $\dim(R) = n$.*

הוכחה: נוכיח את המשפט באנדוקציה על $r = \text{trans.deg}(F/K)$. ראשית נמצא לפי משפט 4.1.4 אברים $t_1, \ldots, t_r \in R$ שאינם תלויים אלגברית מעל K כך ש R שלם מעל $K[t_1, \ldots, t_r]$. לפי למה 4.1.3, $\dim(R) = \dim(K[t_1, \ldots, t_r])$. לכן, בלי הגבלת הכלליות, $x_1, \ldots, x_n$ אינם תלויים אלגברית מעל K.

לכל i בין 1 ל n נסמן $\mathfrak{q}_i = Rx_1 + \cdots Rx_i$. אזי $R/\mathfrak{q}_i \cong K[x_{i+1}, \ldots, x_n]$ הנו תחום שלמות ולכן $\mathfrak{q}_i$ הוא אידאל ראשוני של R. קבלנו אפוא שרשרת אידאלים ראשוניים $0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_n$ מארך n. לכן, $n \le \dim(R)$. נותר לנו אפוא להוכיח שהארך של כל שרשרת עולה של אידאלים ראשוניים של R אינו עולה על n.

תהי אפוא $0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m$ שרשרת עולה של אידאלים ראשוניים של R מארך m. נבחר $f \in \mathfrak{p}_1$, $f \neq 0$. אחד הגורמים האי פריקים של f שיָך ל $\mathfrak{p}_1$. לכן, בלי הגבלת הכלליות נוכל להניח ש f אי פריק. הואיל ו R הנו חוג בעל פרוק חד ערכי Rf הנו אידאל ראשוני של R. לכן, R/Rf הנו תחום שלמות. נוסיף תג לאברים ואידאלים של R כדי לציֵן את השארית שלהם בּיַחס ל Rf. אזי $R' = K[x_1', \ldots, x_n']$ ו $f(x_1', \ldots, x_n') = 0$. בפרט $x_1', \ldots, x_n'$ תלויים אלגברית מעל K ולכן, $\text{trans.deg}(K(x_1', \ldots, x_n')/K)) \le n-1$. מהנחת האנדוקציה עולה ש $\dim(R') \le n-1$. מאידך, $\mathfrak{p}_1' \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m'$ היא שרשרת עולה של אידאלים ראשוניים של R' מארך $m-1$. לכן, $m-1 \le n-1$, כלומר $m \le n$, כפי שהיה להוכיח. ∎

עתה נרצה להחריף את משפט 4.1.5 ולהוכיח שהארך של כל שרשרת מרבית של אידאלים ראשוניים של תחום שלמות R הנוצר סופית מעל שדה K הנו $\dim(R)$.

למה 4.1.6: *יהי $\alpha\colon R \to R'$ אפימורפיזם של חוגים. אזי $\dim(R) \ge \dim(R')$. אם R ו R' נוצרים סופית מעל K ו $\alpha(a) = a$ לכל $a \in K$ (במקרה זה נאמר ש α הנו* ***אפימורפיזם־K****), ו $\dim(R) = \dim(R')$, אזי α הנו איזומורפיזם.*

הוכחה: תהי $\mathfrak{p}_0' \subset \mathfrak{p}_1' \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m'$ שרשרת עולה של אידאלים ראשוניים של R'. לכל i נסמן $\mathfrak{p}_i = \alpha^{-1}(\mathfrak{p}_i')$. אזי $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m$ היא שרשרת עולה של אידאלים ראשוניים של R. לכן, $\dim(R) \ge \dim(R')$.

נניח עתה ש R ו R' נוצרים סופית מעל K, ש α הנו אפימורפיזם־K וש $r = \dim(R) = \dim(R')$. לפי למה 4.1.5, מעלת הנעלות של r של $\text{Quot}(R)$ מעל K שוה לזו של $\text{Quot}(R')$. נבחר אברים $t_1', \ldots, t_r' \in R'$ שאינם תלויים אלגברית מעל K. לכל i נבחר $t_i \in R$ כך ש $\alpha(t_i) = t_i'$. אזי גם $t_1, \ldots, t_r$ אינם תלויים אלגברית מעל K. אחרת, היה קיָם פולינום $0 \neq f \in K[X_1, \ldots, X_r]$ כך ש $f(t_1, \ldots, t_r) = 0$. הפעלה של α היְתה נותנת $f(t_1', \ldots, t_r') = 0$, בסתירה לבחירת $t_1', \ldots, t_r'$. לכן, $\text{Quot}(R)$ אלגברי מעל $K(t_1, \ldots, t_r)$.

אלו α לא היה איזומורפיזם, היה קיָם $x \in R$, $x \neq 0$, כך ש $\alpha(x) = 0$. לפי הפסקה הקודמת קיָמים $g_0, \ldots, g_n \in K[X_1, \ldots, X_r]$ כך ש

$$g_n(\mathbf{t})x^n + \cdots + g_1(\mathbf{t})x + g_0(\mathbf{t}) = 0 \tag{6}$$

ו $g_0 \neq 0$. לכן, גם $g_0(\mathbf{t}') \neq 0$. מאידך, הפעלת α על (6) נותנת $g_0(\mathbf{t}') = 0$. סתירה זו מוכיחה ש α הנו איזומורפיזם. ∎

למה 4.1.7: *יהי* $f \in R = K[X_1, \ldots, X_n]$ *פולינום אי פריק. אזי*

$$\dim(R/Rf) = \mathrm{trans.deg}(\mathrm{Quot}(R/Rf)) = n - 1 \,.$$

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות נניח ש X_n מופיע ב f. נבחר אברים $x_1, \ldots, x_{n-1}$ שאינם תלויים אלגברית מעל K, נסמן $E = K(x_1, \ldots, x_n)$ ונבחר $x_n \in \tilde{E}$ כך ש $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = 0$. החוג $A = K[x_1, \ldots, x_n]$ הנו תחום שלמות, $\mathrm{Quot}(A) = K(x_1, \ldots, x_n)$ ו $\mathrm{trans.deg}(\mathrm{Quot}(A)) = n - 1$. ההעתקה $a \mapsto a$ לכל $a \in K$ ו $X_i \mapsto x_i$ לכל i מגדירה אפימורפיזם $\varphi\colon R \to A$ המקיֵם

$$\varphi(f(X_1, \ldots, X_n)) = f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \,.$$

להפך, אם $g \in R$ ו $\varphi(g) = 0$, אזי $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = 0$. לכן, $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, X_n)$ מחלק את $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, X_n)$ בחוג $K(x_1, \ldots, x_{n-1})[X_n]$. הואיל ו $x_1, \ldots, x_{n-1}$ אינם תלויים אלגברית, החוג $K[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ הנו בעל פריקות חד ערכית. לכן, לפי הלמה של גאוס, $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, X_n)$ מחלק את $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, X_n)$ ב $K[x_1, \ldots, x_{n-1}, X_n]$. מכאן ש $f|g$ ב R. כל זה מוכיח ש $\mathrm{Ker}(\varphi) = Rf$. לכן, $\mathrm{trans.deg}(\mathrm{Quot}(R/Rf)) = \mathrm{trans.deg}(\mathrm{Quot}(A)) = n - 1$. לפי משפט 4.1.5, $\dim(R/Rf) = n - 1$, כפי שהיה להוכיח. ∎

משפטון 4.1.8 (משפט הירידה [אלגברה ב3, משפט ו.יד]): *היה A תחום שלמות סגור בשלמות ויהי B חוג המקיף את A ושלם מעליו. יהיו $\mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}_1$ אידאלים ראשוניים של A ויהי $\mathfrak{q}_2$ אידאל ראשוני של B המונח מעל $\mathfrak{p}_2$. אזי קיָם ל B אידאל ראשוני $\mathfrak{q}_1$ המונח מעל $\mathfrak{p}_1$ ומוכל ב $\mathfrak{q}_2$.*

משפט 4.1.9: *יהי R תחום שלמות בעל ממד קרול r הנוצר סופית מעל שדה K. אזי הארך של כל שרשרת עולה ממש מרבית של אידאלים ראשוניים הוא r.*

הוכחה: תהי $0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_m$ שרשרת עולה ממש מרבית של אידאלים ראשוניים של R. לפי משפט 4.1.5, $r = \mathrm{trans.deg}(\mathrm{Quot}(R))$. למה 4.1.4 נותנת אברים $t_1, \ldots, t_r$ של R שאינם תלויים אלגברית מעל K כך

ש R שלם מעל $K[\mathbf{t}]$, באשר $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_r)$. נסמן, $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i \cap K[\mathbf{t}]$, $i = 1, \dots, m$. אזי $\mathfrak{p}_1$ הנו אידאל ראשוני שונה מאפס מזערי של $K[\mathbf{t}]$. אחרת היה קיָם ל $K[\mathbf{t}]$ אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$ שונה מאפס שהיה מוכל ממש ב $\mathfrak{p}_1$. הואיל ו $K[\mathbf{t}]$ סגור בשלמות, נובע ממשפט הירידה 4.1.8, שמעל $\mathfrak{p}$ מונח אידאל ראשוני $\mathfrak{q}$ של R המוכל ב $\mathfrak{q}_1$. לפי תוצאה 4.1.1, $\mathfrak{q}$ שונה הן מ 0 והן מ $\mathfrak{q}_1$, בסתירה למזעריות של $\mathfrak{q}_1$.

נבחר פולינום $f \in \mathfrak{p}_1$. על ידי פרוק לגורמים אי פריקים נוכל להניח ש f אי פריק. לכן, $K[\mathbf{t}]f$ הנו אידאל ראשוני שונה מאפס. מהמזעריות של $\mathfrak{p}_1$ נובע ש $\mathfrak{p}_1 = K[\mathbf{t}]f$. לפי למה 4.1.7, $\dim(K[\mathbf{t}]/K[\mathbf{t}]f) = r - 1$. הואיל ו $R/\mathfrak{q}_1$ שלם מעל $K[\mathbf{t}]/fK[\mathbf{t}]$, גם $\dim(R/\mathfrak{q}_1) = r - 1$. כמו כן שרשרת האידאלים הראשוניים $0 \subset \mathfrak{q}_2/\mathfrak{q}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{q}_m/\mathfrak{q}_1$ היא מרבית. אנדוקציה על r נותנת ש $m - 1 = r - 1$. לכן, $m = r$, כנטען.

∎

בעיה 4.1.10: *הוכח שממד קרול של חוג טורי חזקות פורמליים $K[[X_1, \dots, X_n]]$ מעל שדה K הוא n.*

4.2 **פונקציות הלברט.**

נתבונן בחוג מדֹרג $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$. לפי ההגדרה $A_m A_n \subseteq A_{m+n}$. בפרט $A_0 A_0 = A_0$ ולכן A_0 הוא תת חוג של A. יתר על כן, $A_+ = \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$ הנו אידאל של A ו $A_0 \cong A/A_+$. האברים של A_n מכֻנים **הומוגניים ממעלה** n. כל אבר של A נִתן להצגה כסכום של מספר סופי של אברים הומוגניים באפן יחיד.

באפן דומה, אם $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ הוא מודול־A מדֹרג, אזי $A_m M_n \subseteq M_{m+n}$ לכל m, n ובפרט $A_0 M_n \subseteq M_n$ ולכן M_n הנו מודול־A_0 לכל n טבעי.

יהי λ העתקן חבורי מקטגורית מודולי־A הנוצרים סופית ל $\mathbb{Z}$. לכל מודול מדֹרג $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ שבו כל אחד מהמרביבים ההומוגיים M_n נוצר סופית מעל A_0, נתאים את טור פואנקרה (Poincareé series) $P(M, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(M_n) t^n$ ביַחס ל λ ונוכיח שטור זה הנו למעשה פונקציה רציונלית ב $\mathbb{Q}(t)$ (משפט הרציונליות 4.2.4). הסדר של הקטב של הפונקציה הזו ב $t = 1$ מסֻמן ב $d(M)$. נוכיח שאם A הוא אלגברת־A_0 הנוצרת על ידי מספר סופי של אברים של A_1, אזי עבור n־ים גדולים דיָם $\lambda(M_n)$ הוא פולינום עם מקדמים ב $\mathbb{Q}$ ממעלה $d(M) - 1$ ב n.

למה 4.2.1: *התנאים הבאים על חוג מדֹרג $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ שקולים זה לזה.*

(א) *A הנו חוג נטר.*

(ב) *A_0 הנו חוג נטר ו A נוצר סופית כאלגברת A_0. ביֶתר דיוק, קיָמים $x_1, \dots, x_r$ הומוגניים ב A_+ כך ש $A = A_0[x_1, \dots, x_r]$.*

הוכחת (א) גורר (ב): כפי שציַנו לעיל, A_0 הוא חוג מנה של A ולכן הוא חוג נטר.

כדי להוכיח ש A נוצרת סופית כאלגברת־A_0 נעיר קודם כל ש A_+ הנו אידאל של A ובתור שכזה נוצר סופית. נבחר ל A_+ קבוצת יוצרים סופית. כל מרכיב הומוגני של אבר של A_+ שיָך אף הוא ל A_+. לכן נוכל לבחר אברים

הומוגניים $x_1,\dots,x_r$ ב A_+ כך ש $A_+=\sum_{i=1}^r Ax_i$. נסמן ב $d_1,\dots,d_r$ את המעלות של $x_1,\dots,x_r$, בהתאמה.

יהי $B=A_0[x_1,\dots,x_r]$ תת החוג של A הנוצר על ידי $x_1,\dots,x_r$. נוכיח באנדוקציה של n ש $A_n\subseteq B$. קודם כל נשים לב לכך ש $A_0\subseteq B$. עתה נניח ש $n\geq 1$ וש $A_k\subseteq B$ לכל $k<n$. נתבונן באבר $y\in A_n$. אזי $y\in A_+$ ולכן קיָמים $a_1,\dots,a_r\in A$ כך ש $y=\sum_{i=1}^r a_ix_i$. את כל אחד מה a_i־ים נרשֹם כסכום של אבריו ההומוגניים, נציב בשויון האחרון ונשוה את החלקים ממעלה n בשני האגפים כדי להניח ש $a_i\in A_{n-d_i}$, $i=1,\dots,r$. בשויון האחרון השתמשנו בִּמְסכמה ש $A_m=0$ לכל $m<0$. הואיל ו $d_i>0$, מתקיֵם $n-d_i<n$. לכן, לפי הנחת האנדוקציה, $a_1,\dots,a_r\in A_0[x_1,\dots,x_r]$. לכן, $y\in A_0[x_1,\dots,x_r]$.

הוכחת (ב) גורר (א): ממשפט הבסיס של הלברט נובע שכל חוג פולינומים מעל A_0 הוא חוג נטר. בפרט, A בתור חוג מנה של חוג פולינומים כזה הוא חוג נטר. ∎

למה 4.2.2: *יהי $A=\bigoplus_{n=0}^\infty A_n$ חוג נטר מדֹרג וְ $M=\bigoplus_{n=0}^\infty M_n$ מודול־A מדרג נוצר סופית. אזי כל אחד מהמרכיבים ההומוגניים M_n של M הוא מודול־A_0 נוצר סופית.*

הוכחה: לפי למה 4.2.1 קיָמים $x_1,\dots,x_r\in A_+$ הומוגניים כך ש $A=A_0[x_1,\dots,x_r]$. לפי ההגדרה $A_mM_n\subseteq M_{m+n}$ לכל m,n. בפרט, $A_0M_n\subseteq M_n$ ולכן M_n הוא מודול־A_0. יהיו $y_1,\dots,y_s$ יוצרים של M מעל A. בלי הגבלת הכלליות נוכל להניח ש y_i הומוגני ממעלה e_i. כל אבר $y\in M_n$ נתן להצגה אפוא בצורה $y=\sum_{i=1}^s a_jy_j$ באשר $a_j\in A$. על ידי פרוק a_j לסכום של אברים הומוגניים ב A והשואת החלקים ממעלה n בשני האגפים נוכל להניח ש $a_j\in A_{n-e_j}$. לפי ההנחה, $a_j=f_j(x_1,\dots,x_r)$ הוא פולינום ב $x_1,\dots,x_r$ עם מקדמים ב A_0. כל אחד מה x_i הומוגני ממעלה חיובית. לכן, $\deg(f_j)\leq n$ ולכן $f_j(x_1,\dots,x_r)$ הוא צרוף לינארי של כל המונומים ב $x_1,\dots,x_r$ ממעלה קטנה או שוה ל n עם מקדמים ב A_0. הואיל ומספר המונומים הללו סופי, M_n הוא מודול־A_0 נוצר סופית. ∎

יהי λ העתקן חבורי ממחלקת מודולי־A_0 הנוצרים סופית לתוך $\mathbb{Z}$.

למה 4.2.3: *תהי*

$$0\to M_0\to M_1\to\cdots\to M_n\to 0$$

סִדרה מְדֻיקת של מודולי־A_0. אזי $\sum_{i=0}^n(-1)^i\lambda(M_i)=0$.

הוכחה: נסמן $M_{-1}=0$ ו $M_{n+1}=0$. כמו כן נסמן ב L_i את הגרעין של ההעתקה $M_i\to M_{i+1}$ וב N_i את

התמונה שלה. לפי ההנחה, $N_i = L_{i+1}$ עבור $i = 0, \ldots, n$. הואיל ו λ חִבּורית,

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\lambda(M_i) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(\lambda(L_i)+\lambda(N_i))$$
$$= \lambda(L_0) + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(\lambda(N_i)-\lambda(L_{i+1})) + (-1)^n\lambda(N_n) = 0$$

כנדרש. ∎

משפטון 4.2.4 (משפטון הרציונליות, Hilbert, Serre): *יהי* $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_0$ *חוג נטר מדֹרג ו* $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ *מודול־*A *מדֹרג נוצר סופית. נניח ש* $A = A_0[x_1, \ldots, x_r]$ *באשר* x_i *הוא אבר הומוגני ממעלה* d_i*,* $i = 1, \ldots, r$*. אזי* $P(M,t)$ *הוא פונקציה רציונלית מהצורה* $\frac{f(t)}{\prod_{i=1}^{r}(1-t^{d_i})}$ *עם* $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

הוכחה: נוכיח את המשפט באנדוקציה על r ונתחיל במקרה שבו $r = 0$. במקרה זה, $A_n = 0$ לכל $n \geq 1$, $A = A_0$ ו M הוא מודול־A_0 נוצר סופית. לכן, $M_n = 0$ לכל n גדול דיו. מכאן ש $P(M,t)$ הוא פולינום עם מקדמים שלמים, כנדרש במקרה זה.

נניח עתה ש $r \geq 1$ ושהמשפטון הוכח עבור $r-1$. כפל ב x_r הנו הומומורפיזם־A של M_n לתוך M_{n+d_r} ומשרה אפוא סדרה מדֻיקת של מודולי־A:

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow M_n \xrightarrow{x_r} M_{n+d_r} \longrightarrow L_{n+d_r} \longrightarrow 0 \tag{2}$$

נסמן $K = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K_n$, $L_0 = \cdots = L_{d_r-1} = 0$ ו $L = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_n$. אזי K הנו תת מודול של M ואלו L הנו מודול מנה של M. מכאן ששניהם נוצרים סופית מעל A. יתר על כן, שני המודולים האלו מתאפסים על ידי x_r. לכן הם מהוים מודול מעל $A_0[x_1, \ldots, x_{d_r-1}]$. לפי למה 4.2.2, K_n, L_n ו M_n הם מודולי־A_0 נוצרים סופית ולכן $\lambda(K_n)$, $\lambda(L_n)$ ו $\lambda(M_n)$ מֻגדרים. לפי למה 4.2.3,

$$\lambda(K_n) - \lambda(M_n) + \lambda(M_{n+d_r}) - \lambda(L_{n+d_r}) = 0$$

נכפיל את השויון ב t^{n+d_r} ונסכם על n כדי לקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda(K_n)t^{n+d_r} - \sum_{n=0}^{\infty}\lambda(M_n)t^{n+d_r} + \sum_{n=0}^{\infty}\lambda(M_{n+d_r})t^{n+d_r} - \sum_{n=0}^{\infty}\lambda(L_{n+d_r})t^{n+d_r} = 0$$

הטור הראשון באגף שמאל שוה ל $t^{d_r}P(K,t)$, השני שוה ל $t^{d_r}P(M,t)$, השלישי ל $P(M,t) - \sum_{n=0}^{d_r-1}\lambda(M_n)t^n$, והרביעי ל $P(L,t) - \sum_{n=0}^{d_r-1}\lambda(L_n)t^n$. לכן,

$$(1-t^{d_r})P(M,t) = P(L,t) - t^{d_r}P(K,t) + g(t) \tag{3}$$

באשר $g(t)$ הוא פולינום (ממעלה קטנה מ d_r). אם נפעיל את הנחת האנדוקציה על $P(K,t)$ ו $P(L,t)$ נקבל את הנֻסחה המבֻקשת עבור $P(M,t)$. ∎

נסמן את הסדר של הקטב של $P(M,t)$ ב $t=1$ ב $d(M)$. מספר זה משמש מדד לגדל של M ביחס ל λ. ממשפטון הרציונליות נובע ש $d(M)$ אינו עולה על מספר היוצרים ההומוגניים של A כאלגברת־A_0. במקרה המיֻחד שבו $d_i=1$ לכל i נוכל לתת מֵידע על $\lambda(M_n)$ כפונקציה של n. לצרך זה נזכר שהמקדם הבינומי $\binom{n}{m}$ עבור $m \geq 0$ ו n שלמים מֻגדר על ידי

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

כמו כן נסכים ש $\binom{n}{0}=1$, $\binom{n}{-1}=0$ עבור $n \geq 0$ ו $\binom{-1}{-1}=1$.

למה 4.2.5 (למת המקדמים הבינומיים):

(א) $\binom{n}{m}+\binom{n}{m+1}=\binom{n+1}{m+1}$.

(ב) $\sum_{i=0}^{k}\binom{n-1+i}{n-1}=\binom{n+k}{n}$.

(ג) $(1-t)^{-n}=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{n-1+i}{n-1}t^i$.

הוכחה: הנֻסחה (א) נובעת מההגדרה. הנֻסחה (ב) נובעת באנדוקציה על k מ (א). הנֻסחה (ג) עבור $n=1$ היא הפתוח הידוע של $(1-t)^{-1}$ לטור הנדסי. עבור $n \geq 2$ נובעת נֻסחה (ג) מ (ב) באנדוקציה על n. ∎

נסכים שהמעלה של פולינום האפס היא -1.

תוצאה 4.2.6: *בנוסף על ההנחות של משפטון הרציונליות נניח עוד ש $d_i=1$ עבור $i=1,\ldots,r$. אזי קַיָם פולינום $g \in \mathbb{Q}[X]$ ממעלה $d(M)-1$ (שהיא לכל היותר $r-1$) כך ש $\lambda(M_n)=g(n)$ עבור כל n טבעי גדול דיו. יתר על כן, אם $\lambda(M_n) \geq 0$ לכל n גדול דיו, אזי המקדם העליון של g חיובי.*

הוכחה: נסמן $d=d(M)$. לפי למת הרציונליות $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda(M_n)t^n=\frac{f(t)}{(1-t)^r}$. נצמצם חזקות של $1-t$ משני האגפים של השויון האחרון כדי להניח $r=d$ ו ש $f(1)\neq 0$. נניח עתה ש $f(t)=\sum_{k=0}^{m}a_kt^k$ באשר $a_k \in \mathbb{Z}$. אזי, לפי למת המקדמים הבינומיאליים

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda(M_n)t^n=\sum_{i=0}^{m}a_it^i\sum_{j=0}^{\infty}\binom{d+j-1}{d-1}t^j$$

לכן, לכל $n \geq m$

$$\lambda(M_n)=\sum_{k=0}^{m}a_k\binom{d+n-k-1}{d-1} \tag{4}$$

כל אחד מהמקדמים הבינומיים באגף ימין של (4) הוא פולינום ב n ממעלה שאינה עולה של $d-1$ והמקדם של n^{d-1} הנו $\sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{(d-1)!} = \frac{f(1)}{(d-1)!} \neq 0$. מכאן שקַיָּם פולינום $g \in \mathbb{Q}[X]$ ממעלה $d-1$ כך ש $g(n) = \lambda(M_n)$ לכל n גדול דיו.

אם $\lambda(M_n) \geq 0$ לכל n גדול דיו, אזי מהשויון $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(M_n)t^n = \frac{f(t)}{(1-t)^d}$ הנכון לכל $0 < t < 1$ נובע ש $f(1) > 0$ ולכן $\lambda(M_n) > 0$ לכל n גדול דיו והמקדם העליון של g (השוה ל $\frac{f(1)}{(d-1)!}$) חיובי. ∎

הפולינום $\lambda(M_n)$ (כפונקציה של n) נקרא **פולינום הלברט.**

למה 4.2.7: *יהי $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ מודול נטר מדֻרג ויהיו $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ ו $M' = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M'_n$ מודולי־A מדֻרגים נוצרים סופית. נניח שקַיָּמים $x_1, \ldots, x_r \in A_1$ כך ש $A = A_0[x_1, \ldots, x_r]$ וקַיָּם אפימורפיזם $\alpha\colon M \to M'$ של מודולים מדֻרגים. עוד נניח שהפונקציה החבורית λ מקבלת רק ערכים אי שליליים. אזי $d(M) \geq d(M')$.*

הוכחה: תוצאה 4.2.6 נותנת פולינומים $g, g' \in \mathbb{Q}[X]$ עם מקדמים עליונים חיוביים כך ש $g(n) = \lambda(M_n)$ ו $g'(n) = \lambda(M'_n)$ עבור כל n גדול דיו. יתר על כן, $\deg(g) = d(M) - 1$ ו $\deg(g') = d(M') - 1$. לפי ההנחה, $\alpha(M_n) = M'_n$ ולכן $\lambda(M_n) = \lambda(M'_n) + \lambda(\mathrm{Ker}(\alpha|_{M_n})) \geq \lambda(M'_n)$. מכאן ש $g(n) \geq g'(n)$ לכל n גדול דיו. הואיל והמקדמים העליונים של g ו g' חיוביים, נובע מכאן ש $\deg(g) \geq \deg(g')$. לכן, $d(M) \geq d(M')$. ∎

משפטון 4.2.8: *בתנאים של משפטון הרציונליות יהי $x \in A_k$ אבר שאינו מחלק אפס של M (כלומר, אם $xm = 0$ עבור $m \in M$, אזי $m = 0$). אזי $d(M/xM) = d(M) - 1$.*

הוכחה: נחליף את x_r בהוכחת משפט הרציונליות ב x. לפי ההנחה, הגרעין של כפל של אברי M ב x הוא מודול האפס. במקום (2) אנו מקבלים את הסדרה המדֻיקת הקצרה

$$0 \longrightarrow M_n \xrightarrow{x} M_{n+k} \longrightarrow L_{n+k} \longrightarrow 0$$

באשר $L = M/xM$. אם נפעיל את λ על סדרה זו, נכפיל ב t^{n+k} ונסכֵם, נקבל את השויון הבא במקום (3):

$$(1 - t^k)P(M,t) = P(L,t) + g(t)$$

באשר $g(t)$ הוא פולינום עם מקדמים שלמים. מכאן נובע שהסדר של הקטב של $P(M,t)$ ב $t = 1$ גבוה ב 1 מהסדר של $P(L,t)$ ב $t = 1$. במלים אחרות, $d(L) = d(M) - 1$. ∎

למה 4.2.9: *מספר המונומים ממעלה n ב r משתנים הוא $\binom{r-1+n}{r-1}$.*

הוכחה: כל מונום ממעלה n במשתנים $X_1, \ldots, X_r$ הוא מכפלה של מונום $X_1^{i_1} \cdots X_{r-1}^{i_{r-1}}$ ממעלה k במשתנים $X_1, \ldots, X_{r-1}$ בחזקה $X_n^{n-i_1-\cdots-i_{r-1}}$ ו $0 \leq k \leq n$. אם נניח את הנֻסחה עבור $r-1$ כידועה, נקבל

שמספר המונומים ממעלה k ב $r-1$ משתנים הוא $\binom{r-2+k}{r-2}$. לכן מספר המונומים ממעלה n ב r משתנים הוא $\sum_{k=0}^{n}\binom{r-2+k}{r-2}$. לפי למת המקדמים הבינומיאליים 4.2.5 , שווה הסכום האחרון ל $\binom{r-1+n}{r-1}$, והאנדוקציה הֻשלמה. ∎

דֻגמה 4.2.10: יהי A_0 חוג ארטין ויהי $A = A_0[X_1, \ldots, X_r]$ חוג הפולינומים במשתנים $X_1, \ldots, X_r$ מעל A_0. כזכור A הוא חוג מדֹרג והמרכיב ה n שלו, A_n, מֻרכב מכל הפולינומים ממעלה n. זהו מודול חׇפשי מעל A_0 שבסיסו קבוצת המונומים ממעלה n. לפי למה 4.2.9 מספר הפולינומים האלו הוא $\binom{r-1+n}{r-1}$. זוהי גם הדרגה של A_n. לפי תוצאה 3.3.7, $l(A_n) = l(A_0)\binom{r-1+n}{r-1}$. לכן, לפי למת המקדמים הבינומיאליים 4.2.5, $P(A,t) = \sum_{n=0}^{\infty} l(A_n)t^n = \frac{l(A_0)}{(1-t)^r}$. מכאן ש $d(A) = r$. בפרט, אם A_0 הוא שדה, אזי $l(A_0) = 1$ ולכן $P(A,t) = \frac{1}{(1-t)^r}$. ∎

4.3 פולינומי הלברט של חוג מקומי.

לחוג נטר מקומי $(A, \mathfrak{m})$ נתאים פולינום χ_A ב $\mathbb{Q}[X]$ שיקַים $\chi_A(n) = l(A/\mathfrak{m}^n)$ עבור כל n גדול דיו. מצד שני נתבונן בטור פואנקרה $P(G(A),t) = \sum_{k=0}^{\infty} l(\mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1})t^k$. בסעיף הקודם הוכחנו ש $P(G(A),t) \in \mathbb{Q}(t)$. כאן נוכיח שהקֹטב של $P(G(A),t)$ ב $t=1$ שוה למעלה של χ_A.

למה 4.3.1:

(א) *לכל* $r \geq 0$ *שלם קיָם פולינום* $f_r \in \mathbb{Q}[X]$ *ממעלה* $r+1$ *כך ש* $f_r(n) = \sum_{k=0}^{n} k^r$ *לכל* $n \geq 0$.

(ב) *תהיינה* $l_0, l_1, l_2, \ldots$ *ו* $m_0, m_1, m_2, \ldots$ *שתי סדרות של מספרים רציונליים ויהיו* r *ו* n_0 *מספרים טבעיים. נניח שקיָם פולינום* $f \in \mathbb{Q}[X]$ *ממעלה* $r-1$ *כך ש* $m_n = f(n)$ *לכל* $n \geq n_0$ *ו* $l_{n+1} - l_n = m_n$ *לכל* $n \geq 0$.
אזי קיָם פולינום $g \in \mathbb{Q}[X]$ *ממעלה* r *כך ש* $l_n = g(n)$ *לכל* $n \geq n_0 - 1$.

הוכחת א: עבור $r=0$ מתקיֵם $\sum_{k=0}^{n} k^0 = n+1$. נוכל לקחת $f_0(X) = X+1$. עבור $r=1$ מתקיֵם $\sum_{k=0}^{n} k^1 = \frac{n(n+1)}{2}$, הטענה נכונה אפוא עבור $f_1(X) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$. נניח עתה שקיָמים $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{Q}[X]$ שעבורם נכונה הטַענה. פתוח בינום של ניוטון נותן $(k+1)^{r+1} - k^{r+1} = \sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i}k^i$.

לכן,

$$
\begin{aligned}
(n+1)^{r+1}-1 &= \sum_{k=0}^{n}[(k+1)^{r+1}-k^{r+1}] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i}k^i \\
&= \sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i}\sum_{k=0}^{n}k^i \\
&= \sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i}f_i(n)
\end{aligned}
$$

האבר המתאים ל $i=r$ באגף ימין הנו $rf_r(n)$. לכן,

$$rf_r(n)=n^{r+1}+\sum_{i=1}^{r}\binom{r+1}{i}n^i-\sum_{i=0}^{r-1}\binom{r+1}{i}f_i(n)$$

לכן

$$f_r(X)=\frac{1}{r}X^{r+1}+\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\binom{r+1}{i}X^i-\frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1}\binom{r+1}{i}f_i(X)$$

מקיֵם את הטענה עבור r.

הוכחת ב: נסמן $c=\sum_{k=0}^{n_0-1}[m_k-f(k)]$. לפי ההנחה, $f(X)=\sum_{i=0}^{r-1}a_iX^i$ עם $a_i\in\mathbb{Q}$ ו $a_{r-1}\neq 0$. לכל $n\geq n_0$ מתקיֵם, לפי (א),

$$
\begin{aligned}
l_{n+1}-l_0 &= \sum_{k=0}^{n}m_k=\sum_{k=0}^{n}f(k)+c \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{r-1}a_ik^i+c=\sum_{i=0}^{r-1}a_i\sum_{k=0}^{n}k^i+c=\sum_{i=0}^{r-1}a_if_i(n)+c
\end{aligned}
$$

הפולינום $g(X)=\sum_{i=0}^{r-1}a_if_i(X-1)+c+l_0$ הנו ממעלה r, בעל מקדמים רציונליים ומקיֵם $l_n=g(n)$ לכל $n\geq n_0-1$. ∎

משפטון 4.3.2: *יהיו $(A,\mathfrak{m})$ חוג נטר מקומי, $\mathfrak{q}$ אידאל מקדים של A עם $\mathfrak{m}=\sqrt{\mathfrak{q}}$, M מודול־A נוצר סופית ו $(M_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ מסננת־ $\mathfrak{q}$ יַציבה. אזי:*

(א) *לכל $n\geq 0$ המנה M/M_n הוא מודול בעל ארך סופי.*

(ב) *לכל n גדול דיו, $l(M/M_n)$ הוא פולינום $g(n)$ עם מקדמים רציונליים ממעלה שאינה עולה על המספר המזערי s של יוצרים של $\mathfrak{q}$.*

(ג) *המעלה והמקדם העליון של g תלויים רק ב M ו $\mathfrak{q}$ אולם לא במסננה הנתונה.*

הוכחת א: נתבונן בחוג המדֻרג $G_{\mathfrak{q}}(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}$. מההנחה ש A נטרי, נובע שהחוג המקומי $G_{\mathfrak{q}}(A)_0 = A/\mathfrak{q}$ נטרי. בנוסף לזאת, לפי ההנחה, $\mathfrak{m}$ הנו החתוך של כל האידאלים הראשוניים של A המקיפים את $\mathfrak{q}$. לכן, אין ל A שום אידאל ראשוני המוכל ממש ב $\mathfrak{m}$ והמַקיף את $\mathfrak{q}$. מכאן ש $\dim(A/\mathfrak{q}) = 0$. לפי משפט אקיצוקי 3.3.6, $A/\mathfrak{q}$ ארטיני. לפי למה 2.7.1, $G_{\mathfrak{q}}(A)$ הנו חוג נטר ו $G(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n/M_{n+1}$ הוא מודול־$G_{\mathfrak{q}}(A)$ נוצר סופית מדֻרג. לפי ההנחה, $\mathfrak{q}^k M_n \subseteq M_{k+n}$ לכל k ו n, בפרט $AM_n \subseteq M_n$. במלים אחרות, M_n הנו תת מודול־A של M ולכן נוצר סופית. לכן, M_n/M_{n+1} הוא מודול־$A/\mathfrak{q}$ נוצר סופית. הואיל ו $A/\mathfrak{q}$ ארטיני, יש ל M_n/M_{n+1} ארך סופי (תוצאה 3.3.7) ו ולפי משפטון 3.2.3,

$$l(M/M_n) = \sum_{i=1}^{n} l(M_{i-1}/M_i) \tag{5}$$

הוכחת ב: יהיו $x_1, \ldots, x_r$ יוצרים של האידאל $\mathfrak{q}$. אזי $x_1 + \mathfrak{q}^2, \ldots, x_r + \mathfrak{q}^2$ יוצרים את $G_{\mathfrak{q}}(A)$ כאלגברת־$A/\mathfrak{q}$ והמעלה של כל אחד מהיוצרים האלו היא 1. נשתמש בתוצאה 4.2.6 עבור המודול $G(M)$ (במקום M) כדי לקבל ש $f(n) = l(M_n/M_{n+1})$ הוא פולינום ממעלה שאינה עולה על $r-1$ (עבור n־ים גדולים). לפי (5), $f(n) = l(M/M_{n+1}) - l(M/M_n)$. לכן, לפי למה 4.3.1, $g(n) = l(M/M_n)$ הוא פולינום ב n עם מקדמים רציונליים ממעלה שאינה עולה על r עבור כל n גדול דיו.

הוכחת ג: תהי $(M'_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ מסננת־$\mathfrak{q}$ נוספת יציבה של M. יהי $g' \in \mathbb{Q}[X]$ פולינום שעבורו $g'(n) = l(M/M'_n)$ לכל n גדול דיו. היַציבות נותנת מספר טבעי n_0 כך ש $M_{n+1} = \mathfrak{q}M_n$ ו $M'_{n+1} = \mathfrak{q}M'_n$ לכל $n \geq n_0$. לכן, $M_{n_0+n} = \mathfrak{q}^n M_{n_0} \subseteq \mathfrak{q}^n M = \mathfrak{q}^n M'_0 \subseteq M'_n$. באפן דומה, $M'_{n_0+n} \subseteq M'_n$. מהחבוריות של פונקצית הארך נובע אפוא ש $g(n_0+n) = l(M/M_{n_0+n}) \geq l(M/M'_n) = g'(n)$ לכל n גדול דיו. באפן דומה, $g'(n_0+n) \geq g(n)$ לכל n גדול דיו. לכן $\frac{g(n)}{g'(n)} \leq \frac{g'(n_0+n)}{g'(n)}$. אם נסמן $g(X) = a_m X^m + \cdots + a_0$, באשר $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{Q}$ ו $a_m \neq 0$, נקבל ש

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{g(n)}{g'(n)} \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n_0+n}{n}\right)^m = 1 .$$

באפן דומה, $\limsup_{n\to\infty} \frac{g'(n)}{g(n)} \leq 1$. לכן, $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{g'(n)} = 1$. מכאן נובע שלפולינומים g ו g' אותה המעלה ואותם מקדמים עליונים. ∎

הפולינום המתאים למסננה $(\mathfrak{q}^n M)_{n=0,1,2,\ldots}$ מסֻמן ב $\chi_{\mathfrak{q}}^M$. הוא מקיֵם

$$\chi_{\mathfrak{q}}^M(n) = l(M/\mathfrak{q}^n M)$$

לכל n גדול דיו. במקרה שבו $M = A$ נרשׁם $\chi_{\mathfrak{q}}^A$ במקום $\chi_{\mathfrak{q}}$ ונקרא ל $\chi_{\mathfrak{q}}$ **הפולינום האָפיני** של האידאל המקדים־$\mathfrak{m}$ $\mathfrak{q}$. פולינום זה מקיֵם אפוא $\chi_{\mathfrak{q}}(n) = l(A/\mathfrak{q}^n)$. משפטון 4.3.2 נותן במקרה זה:

תוצאה 4.3.3: *עבור כל n גדול דיו, הארך $l(A/\mathfrak{q}^n)$ הוא פולינום $\chi_{\mathfrak{q}}(n)$ ממעלה קטנה או שוה ל r, באשר r הוא המספר הקטן ביותר של יוצרים של $\mathfrak{q}$.*

בחירה אחרת של האידאל המקדים־$\mathfrak{m}$ $\mathfrak{q}$ אינה משנה את המעלה של הפולינום האָפיני:

משפטון 4.3.4: *יהי $(A, \mathfrak{m})$ מודול נטר ו $\mathfrak{q}$ אידאל מקדים־$\mathfrak{m}$ של A. אזי* $\deg(\chi_{\mathfrak{q}}) = \deg(\chi_{\mathfrak{m}})$.

הוכחה: האידאל $\mathfrak{m}$ נוצר סופית וחזקה של כל יוצר שלו שיָכת ל $\mathfrak{q}$. לכן קיָם k כך ש $\mathfrak{m}^k \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}$ ומכאן ש $\mathfrak{m}^{kn} \subseteq \mathfrak{q}^n \subseteq \mathfrak{m}^n$ לכל n טבעי. לכן, $l(A/\mathfrak{m}^n) \leq l(A/\mathfrak{q}^n) \leq l(A/\mathfrak{m}^{kn})$ לכל n טבעי. לכן, $\chi_{\mathfrak{m}}(n) \leq \chi_{\mathfrak{q}}(n) \leq \chi_{\mathfrak{m}}(kn)$ לכל n טבעי גדול דיו. הואיל ו $\chi_{\mathfrak{m}}$ ו $\chi_{\mathfrak{q}}$ הם פולינומים עם מקדמים ב $\mathbb{Q}$, נובע מכאן ש $\deg(\chi_{\mathfrak{m}}) = \deg(\chi_{\mathfrak{q}})$, כנדרש. ∎

הערה 4.3.5: *זהוי $d(A)$.* יהי $(A, \mathfrak{m})$ חוג נטר מקומי. נסמן ב $d(A)$ את המעלה המשֻתפת של כל הפולינומים $\chi_{\mathfrak{q}}$ עבור אידאלים מקדימים־$\mathfrak{m}$. בפרט, $d(A) = \deg(\chi_{\mathfrak{m}})$.

יהי $\mathfrak{q}$ אידאל מקדים־$\mathfrak{m}$ של A. נתבונן בחוג המדֻרג $G_{\mathfrak{q}}(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}$ ובטור פואנקרה המתאים

$$.P(G_{\mathfrak{q}}(A), t) = \sum_{n=0}^{\infty} l(\mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}) t^n$$

לפי ההגדרה, $d(G_{\mathfrak{q}}(A))$ הנו הסדר של הקטב של $P(G_{\mathfrak{q}}(A), t)$ ב $t = 1$. החוג $G_{\mathfrak{q}}(A)$ נוצר כמודול־$A/\mathfrak{q}$ על ידי אברים ממעלה 1 (מחלקות מודולו $\mathfrak{q}^2$ של יוצרים של $\mathfrak{q}$). לכן, לפי תוצאה 4.2.6, $l(\mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1})$ הוא פולינום במקדמים רציונליים ממעלה $d(G_{\mathfrak{q}}(A)) - 1$, עבור כל n גדול דיו. ממשפטון 4.3.1 מקבלים ש $l(A/\mathfrak{q}^n)$ הוא פולינום ב n ממעלה $d(G_{\mathfrak{q}}(A))$ לכל n גדול דיו. במלים אחרות, $d(A) = d(G_{\mathfrak{q}}(A))$ הוא הסדר של הקטב של $P(G_{\mathfrak{q}}(A), t)$ ב $t = 1$. ∎

4.4 **תורת הממד של חוגי נטר מקומיים.**

יהי $(A, \mathfrak{m})$ חוג נטר מקומי. נסמן ב $\delta(A)$ את מספר היוצרים המזערי של אידאל מקדים־$\mathfrak{m}$ של A. אנו שואפים להוכיח ש $\delta(A) = d(A) = \dim(A)$ ונעשה זאת על ידי שנוכיח את אי השויונות $\delta(A) \geq d(A) \geq \dim(A) \geq \delta(A)$. נתחיל בחֻליה הראשונה בשרשרת זו.

למה 4.4.1: $\delta(A) \geq d(A)$.

הוכחה: יהי $\mathfrak{q}$ אידאל־$\mathfrak{m}$ מקדים של A. לפי הערה 4.3.5, $d(A)$ שוה למעלה של הפולינום $\chi_{\mathfrak{q}}$. מעלה זו שוה, עבור כל n גדול דיו, למעלה של הפולינום $\deg(l(A/\mathfrak{q}^n))$ והיא אינה עולה על המספר המזערי של יוצרים של $\mathfrak{q}$ (משפטון 4.3.2). הואיל ו $d(A)$ אינו תלוי ב $\mathfrak{q}$ (משפטון 4.3.4), נובע ש $d(A) \leq \delta(A)$. ∎

התוצאה הבאה מקבילה למשפטון 4.2.8:

למה 4.4.2: *יהיו $(A,\mathfrak{m})$ חוג מקומי ו $\mathfrak{q}$ אידאל מקדים־ $\mathfrak{m}$ של A. יהי M מודול־ A נוצר סופית, יהי x אבר של A שאינו מחלק אפס של M ונסמן $M' = M/xM$. אזי* $\deg(\chi_{\mathfrak{q}}^{M'}) \leq \deg(\chi_{\mathfrak{q}}^{M}) - 1$.

הוכחה: לכל n נסמן $N_n = N \cap \mathfrak{q}^n M$ ונתבונן בתרשים החלופי הבא של מודולי־A שבו השורות הן סדרות קצרות מדֻיָקות:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0 \\ & & | & & | & & | & & \\ 0 & \longrightarrow & N_n & \longrightarrow & \mathfrak{q}^n M & \longrightarrow & \mathfrak{q}^n M' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

אם נחלק את השורה הראשונה בשניה נקבל סדרה מדֻיקת קצרה

$$0 \to N/N_n \to M/\mathfrak{q}^n M \to M'/\mathfrak{q}^n M' \to 0$$

החבוריות של פונקציה האֹרך נותנת: $l(M'/\mathfrak{q}^n M') = l(M/\mathfrak{q}^n M) - l(N/N_n)$. עבור n גדול דיו, $\chi_{\mathfrak{q}}^{M'}(n) = l(M'/\mathfrak{q}M')$ ו $\chi_{\mathfrak{q}}^{M}(n) = l(M/\mathfrak{q}^n M)$. כדי לחשב את $l(N/N_n)$ נפעיל את משפט ארטין־ריס [אלגברה ב3, משפט טג] כדי לקבל k_0 כך ש $\mathfrak{q}^{k+k_0} M \cap N = \mathfrak{q}^k(\mathfrak{q}^{k_0} M \cap N)$ ולכן $N_{k+k_0} = \mathfrak{q}^k N_{k_0}$ לכל $k \geq 0$. מכאן ש $\mathfrak{q}N_{k+k_0} = \mathfrak{q}^{k+1} N_{k_0} = N_{k+1+k_0}$ לכל $k \geq 0$ ולכן המסננה $(N_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ של N ביַחס ל $\mathfrak{q}$ יַציבה. למה 4.3.2 נותנת פולינום $g \in \mathbb{Q}[X]$ כך ש $g(n) = l(N/N_n)$ עבור כל n גדול דיו. אנו מקבלים אפוא ש $\chi_{\mathfrak{q}}^{M'}(n) = \chi_{\mathfrak{q}}^{M}(n) - g(n)$ לכל n גדול דיו. לכן, $\chi_{\mathfrak{q}}^{M'}(X) = \chi_{\mathfrak{q}}^{M}(X) - g(X)$. הואיל ו x אינו מחלק אפס של M, הכפל ב x הנו איזומורפיזם של M על $N = xM$. לכן המעלה והמקדם העליון של g שוים בהתאמה למעלה ולמקדם העליון של $\chi_{\mathfrak{q}}^{M}$ (לפי משפטון 4.3.2). לכן, $\deg(\chi_{\mathfrak{q}}^{M'}) \leq \deg(\chi_{\mathfrak{q}}^{M}) - 1$, כפי שהיה להוכיח. ∎

נַישם את למה למקרה שבו $M = A$.

תוצאה 4.4.3: *יהי A חוג נטר מקומי ו x אבר של A שאינו מחלק אפס. אזי* $d(A/Ax) \leq d(A) - 1$.

למה 4.4.4: $d(A) \geq \dim(A)$.

הוכחה: נוכיח את הלמה באנדוקציה על $d(A)$ ונתחיל במקרה שבו $d(A) = 0$. לפי ההגדרה, $d(A)$ הנו המעלה של $\chi_{\mathfrak{m}}$ ו $\chi_{\mathfrak{m}}(n) = l(A/\mathfrak{m}^n)$ לכל n גדול דיו. מכאן ש $l(A/\mathfrak{m}^n)$ קבוע עבור n גדול דיו. קיָם אפוא n טבעי כך ש $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$. לפי הלמה של נקַימה, $\mathfrak{m}^n = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}^{n+k} = 0$. לכן, לפי משפטון 3.3.8, A הנו חוג ארטין מקומי. לפי משפט אקיצוקי 3.3.6, $\dim(A) = 0$, כפי שהיה צריך להוכיח.

עתה נניח ש $d(A) \geq 1$ ושהלמה הוכחה עבור כל חוג A' עם $d(A') < d(A)$. בשלב זה אין אנו יודעים עדיִן ש $\dim(A)$ סופי. נתבונן אפוא בשרשרת $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_r$ מארך r של אידאלים ראשוניים של A. נבחר $x \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_0$. אזי $A' = A/\mathfrak{p}_0$ הוא תחום שלמות מקומי נטרי ו $x' = x + \mathfrak{p}_0$ הוא אבר שונה מאפס של A', בפרט x' אינו מחלק אפס של A'. לפי תוצאה 4.4.3, $d(A'/A'x') \leq d(A') - 1$. העתקת המנה $A \to A'$ מעתיקה את האידאל המרבי $\mathfrak{m}$ של A על האידאל המרבי $\mathfrak{m}'$ של A' ולכן משרה אפימורפיזם $A/\mathfrak{m}^n \to A'/(\mathfrak{m}')^n$. לכן $l(A/\mathfrak{m}^n) \geq l(A'/(\mathfrak{m}')^n)$. מכאן שעבור כל n גדול דיו, $\chi_{\mathfrak{m}}(n) \geq \chi_{\mathfrak{m}'}(n)$. לכן, $d(A) = \deg(\chi_{\mathfrak{m}}) \geq \deg(\chi_{\mathfrak{m}'}) = d(A')$. לכן, $d(A'/A'x') \leq d(A') - 1 \leq d(A) - 1$ ולפי הנחת האנדוקציה, $\dim(A'/A'x') \leq d(A'/A'x') \leq d(A) - 1$. דבר זה אומר שהארך של שרשרת אידאלים ראשוניים ב $A'/A'x'$ אינו עולה על $d(A) - 1$. בפרט, אם נתבונן בתמונה $\bar{\mathfrak{p}}_1 \subset \cdots \subset \bar{\mathfrak{p}}_r$ של השרשרת $\mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_r$ תחת ההעתקה $A \to A'/A'x'$ נקבל שארכה $r - 1$ אינו עולה על $d(A) - 1$. לכן, $r \leq d(A)$. מכאן ש $\dim(A) \leq d(A)$, והאנדוקציה הֻשלמה. ∎

תוצאה 4.4.5: *הממד של חוג נטר מקומי הנו סופי.*

יהי A חוג כלשהו ו $\mathfrak{p}$ אידאל ראשוני של A. **הגֹבה** $\text{height}(\mathfrak{p})$ של אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$ הנו הארך המרבי של שרשרת אידאלים ראשוניים $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}$ של A. הואיל וקיֶמת התאמה חד חד ערכית שומרת סדר בין האידאלים הראשוניים של A המוכלים ב $\mathfrak{p}$ ובין האידאלים הראשוניים של $A_{\mathfrak{p}}$ נקבל ש $\text{height}(\mathfrak{p}) = \dim(A)$.

את התוצאה 4.4.5 נוכל אפוא לנסח מחדש במונחים של גֹבה:

תוצאה 4.4.6: *בחוג נטר יש לכל אידאל ראשוני גֹבה סופי. בפרט, אסף האידאלים הראשוניים בחוג מקיֵם את תנאי השרשרת היורדת.*

הערה 4.4.7: באֹפן דומה נוכל להגדיר את **העֹמק** (depth) של אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$ בחוג A כארך המרבי של שרשרת עולה של אידאלים ראשוניים המתחילה ב $\mathfrak{p}$, כלומר $\text{depth}(\mathfrak{p}) = \dim(A/\mathfrak{p})$. אולם בנגוד לגֹבה של אידאל ראשוני בחוג נטר, העֹמק שלו יכול להיות אינסופי. ∎

תרגיל 4.4.8: *הוכח שבחוג נטר מקומי יש לכל אידאל ראשוני עֹמק סופי.*

למה 4.4.9: *יהי* $(A, \mathfrak{m})$ *חוג נטר מקומי ממּמד* d. *אזי קיָם אידאל מקדים־*$\mathfrak{m}$ *של* A *הנוצר על ידי* d *אברים. לכן,* $\dim(A) \geq \delta(A)$.

הוכחה: נגדיר באנדוקציה d אברים $x_1, \ldots, x_d$ של A כך ש $k \leq \text{height}(\mathfrak{p})$ לכל $k \leq d$ ולכל אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$ המכיל את $x_1, \ldots, x_k$. נניח עתה ש $1 \leq k \leq d$ ושמצאנו כבר $x_1, \ldots, x_{k-1}$ ב A כך שהגבה של כל אידאל ראשוני המכיל את $x_1, \ldots, x_{k-1}$ הוא לפחות $k-1$. מבין כל האידאלים הראשוניים של A השיָכים ל $\sum_{i=1}^{k-1} Ax_i$ (כלומר, מזעריים מבין הראשוניים המקיפים את $\sum_{i=1}^{k-1} A_i$), יהיו $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ אלו שגָבהם שוה ל $k - 1$ (לפי

[אלגברה ב3, משפטון י.ה], s סופי, אולם יתכן ש $s = 0$). הואיל ו $k - 1 < \dim(A) = \mathrm{height}(\mathfrak{m})$, מתקיֵם $\mathfrak{p}_j \neq \mathfrak{m}$ ולכן $\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{p}_j$ לכל j. לפי [אלגברה ב3, משפטון א.יג], $\mathfrak{m} \not\subseteq \bigcup_{j=1}^s \mathfrak{p}_j$. נבחר $x_k \in \mathfrak{m} \setminus \bigcup_{j=1}^s \mathfrak{p}_j$. יהי $\mathfrak{q}$ אידאל ראשוני המכיל את $x_1, \ldots, x_k$. אזי $\mathfrak{q}$ מקיף אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$ של A השיָך ל $\sum_{i=1}^{k-1} Ax_i$. אם קיָם j כך ש $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_j$, אזי $x_k \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{p}$, לכן $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ ולכן $\mathrm{height}(\mathfrak{q}) \geq \mathrm{height}(\mathfrak{p}) + 1 = k$. אם $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_j$ לכל j, אזי $\mathrm{height}(\mathfrak{q}) \geq \mathrm{height}(\mathfrak{p}) \geq k$. כך שבכל מקרה $\mathrm{height}(\mathfrak{q}) \geq k$, כפי שהאנדוקציה דורשת.

יהי עתה $\mathfrak{p}$ אידאל ראשוני של A השיָך לאידאל $\sum_{i=1}^d Ax_i$. לפי הבניה, $\mathrm{height}(\mathfrak{p}) \geq d$. הואיל ו $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}$ ו $\mathrm{height}(\mathfrak{p}) \leq \mathrm{height}(\mathfrak{m}) = \dim(A) = d$, נקבל ש $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$. מכאן נובע ש $\mathfrak{m} = \sqrt{\sum_{i=0}^d Ax_i}$. לכן, $\sum_{i=0}^d Ax_i$ מקדים־$\mathfrak{m}$. מכאן נובע ש $\delta(A) \leq d$, כפי שהיה להוכיח. ∎

אם נצרף את הלמות 4.4.1, 4.4.4 ו 4.4.9, נקבל את המשפט הבא:

משפט 4.4.10 (משפט הממד): *שלשת המספרים הבאים המצוֹרפים לחוג נטר מקומי $(A, \mathfrak{m})$ שוים זה לזה:*

(א) *הארך המרבי של שרשרת של אידאלים ראשוניים של A (זהו $\dim(A)$).*

(ב) *המעלה של הפולנום האפיְני $\chi_\mathfrak{m}$ (המֻגדר על ידי התכונה $\chi_\mathfrak{m}(n) = l(A/\mathfrak{m}_n)$ לכל n גדול דיו. את המעלה הנ"ל סימנו ב $d(A)$).*

(ג) *המספר המזערי של יוצרים של אידאל מקדים־$\mathfrak{m}$ של A (זהו $\delta(A)$).*

דֻגמה 4.4.11: *ממד חוג הפולינומים מעל שדה.* יהי $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ חוג הפולינומים במשתנים $X_1, \ldots, X_n$ מעל שדה K. נתבונן באידאל המרבי $\mathfrak{m} = \sum_{i=1}^n RX_i$ ובמִקום שלו $A = R_\mathfrak{m}$. אזי A הוא חוג נטר מקומי. לכל k טבעי נסמן ב R_k את המרחב הוקטורי מעל K הנוצר על ידי כל המונומים ב $X_1, \ldots, X_n$ ממעלה k. אזי $R = \bigoplus_{k=0}^\infty R_k$ הוא הצגה של R כחוג מדֹרג.

נגדיר העתקה $\alpha_k\colon \mathfrak{m}^k A \to R_k$ באפן הבא. כל אבר u של $\mathfrak{m}^k A$ נִתן להצגה כמנה $\frac{f(\mathbf{X})}{g(\mathbf{X})}$, באשר $f = \sum_{i=k}^\infty f_i$, $f_i \in R_i$, $f_i = 0$ עבור כמעט כל i ו $g(0) \neq 0$. נגדיר $\alpha_k(u) = \frac{f_k(\mathbf{X})}{g(0)}$. בדיקה מראה ש $\alpha_k(u)$ אינו תלוי בהצגה של u וש α_k מהוה אפימורפיזם שגרעינו $\mathfrak{m}^{k+1}A$. לכן הוא משרה איזומורפיזם $\mathfrak{m}^k A/\mathfrak{m}^{k+1}A \cong R_k$ של מרחבים וקטוריים מעל K. יתר על כן, אם $v \in \mathfrak{m}^l A$ אזי $uv \in \mathfrak{m}^{k+l}A$ ו $\alpha_k(u)\alpha_l(v) = \alpha_{k+l}(uv)$. אסף ה α_k־ים מגדיר אפוא איזומורפיזם, $\alpha\colon G_\mathfrak{m}(A) \to R$ של חוגים מדֹרגים.

לפי דֻגמה 4.2.10, טור פואנקרה של R שוה ל $\frac{1}{(1-t)^n}$. בפרט, הסדר של הקטב שלו ב $t = 1$ הנו n. לפי הערה 4.3.5, $n = d(A)$ הוא גם המעלה של הפולינום האָפיני $\chi_\mathfrak{m}$. לכן, לפי משפט הממד, $n = \dim(A)$. מכאן נובע גם ש $\mathrm{height}(\mathfrak{m}) = n$. אולם איננו יכולים להסיק מכאן ש $\dim(R) = n$. תוצאה זו הוכחנו במשפט 4.1.5.
∎

תוצאה 4.4.12: *יהי* $(A, \mathfrak{m})$ *חוג נטר מקומי ויהי* $\bar{K} = A/\mathfrak{m}$ *שדה השאריות שלו. אזי* $\dim(A) \leq \dim_{\bar{K}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.

הוכחה: יהיו $x_1,\dots,x_r$ אברים של $\mathfrak{m}$ שתמונותיהם מודולו $\mathfrak{m}^2$ מהוות בסיס ל $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ כמרחב וקטורי מעל $\bar{K}$. לפי הלמה של נקָימה, $x_1,\dots,x_r$ יוצרים את $\mathfrak{m}$. לפי משפט הממד, $\dim(A)=\delta(A)\le r$. ∎

למה 4.4.13: *יהי $(A,\mathfrak{m})$ חוג מקומי ויהי $\mathfrak{q}$ אידאל של A המקיֵם $\sqrt{\mathfrak{q}}=\mathfrak{m}$. אזי $\mathfrak{q}$ הנו אידאל מקדים.*

הוכחה: יהיו x,y אברים של A המקיְמים $xy\in\mathfrak{q}$. אם $x\notin\mathfrak{m}$, אזי x הפיך ב A ולכן $y\in\mathfrak{q}$. מכאן ש $\mathfrak{q}$ מקדים. ∎

תוצאה 4.4.14: *יהי A חוג נטר ו $x_1,\dots,x_r\in A$. אזי הגבה של כל אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$ השיָך ל $\sum_{i=1}^r Ax_i$ אינו עולה על r.*

הוכחה: נעבֹר לחוג המקומי $A_\mathfrak{p}$ עם האידאל המרבי היחיד שלו $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. זהו חוג נטר ו $\mathfrak{m}=\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ הוא האידאל הראשוני היחיד השיָך ל $\mathfrak{q}=\sum_{i=1}^r A_\mathfrak{p}x_i$. לפי למה 4.4.13, $\mathfrak{q}$ הוא אידאל מקדים של A. לכן, לפי משפט הממד, $r\ge\dim(A_\mathfrak{p})=\mathrm{height}(\mathfrak{p})$. ∎

תוצאה 4.4.15 (משפט האידאל הראשי של קרוּל): *יהי A חוג נטר ו x אבר של A שאינו מחלק אפס. אזי הגבה של כל אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$ השיָך לאידאל Ax שוה ל 1.*

הוכחה: יהי $\mathfrak{p}$ אידאל ראשוני של A השיָך ל Ax. לפי תוצאה 4.4.14, $\mathrm{height}(\mathfrak{p})\le 1$. אִלו היה $\mathrm{height}(\mathfrak{p})=0$ היה $\mathfrak{p}$ אידאל ראשוני מזערי של A ולכן היה $\mathfrak{p}$ אידאל ראשוני השיָך ל 0. מכאן ש $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ הוא האידאל הראשוני היחיד ב $A_\mathfrak{p}$. לכן, $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ אפיסי. בפרט קיָם n טבעי כך ש $x^n=0$ ב $A_\mathfrak{p}$. זאת אומרת, שקיָם $u\in A\smallsetminus\mathfrak{p}$ כך ש $ux^n=0$. לכן, x הוא מחלק אפס של A, בנִגוד להנחה. ∎

תוצאה 4.4.16: *יהי $(A,\mathfrak{m})$ חוג נטר מקומי ו x אבר של $\mathfrak{m}$ שאינו מחלק אפס. אזי* $\dim(A/Ax)=\dim(A)-1$.

הוכחה: לפי תוצאה 4.4.3 ומשפט הממד 4.4.10, $d=\dim(A/Ax)\le\dim(A)-1$. מאידך, נותן לנו משפט 4.4.10 אידאל מקדים $\bar{\mathfrak{q}}$ ב A/Ax ביחס ל $\mathfrak{m}/Ax$ הנוצר על ידי d אברים $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_d$. יהיו $x_1,\dots,x_d$ הרמות של $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_d$ ל A ויהי $\mathfrak{q}$ הרמה של $\bar{\mathfrak{q}}$ ל A. אזי $\mathfrak{q}$ הוא אידאל מקדים־$\mathfrak{m}$ של A הנוצר על ידי $x,x_1,\dots,x_d$. לכן, לפי משפט 4.4.10, $\dim(A)\le d+1$. בצרוף עם אי השויון הקודם אנו מקבלים ש $\dim(A)=\dim(A/Ax)+1$. ∎

תוצאה 4.4.17: *יהי $(A,\mathfrak{m})$ חוג נטר מקומי ותהי $(\hat{A},\hat{\mathfrak{m}})$ ההשלמה ה $\mathfrak{m}$־אדית שלו. אזי* $\dim(\hat{A})=\dim(A)$.

הוכחה: לפי למה 2.5.5, $A/\mathfrak{m}^n\cong\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}^n$. לכן, $\chi_\mathfrak{m}=\chi_{\hat{\mathfrak{m}}}$. לפי משפט הממד, $\dim(A)=\dim(\hat{A})$. ∎

תוצאה 4.4.18: *יהי K שדה ו $\hat{A}=K[[X_1,\dots,X_n]]$ חוג טורי החזקות הפורמליים ב $X_1,\dots,X_n$ מעל K. אזי,* $\dim(\hat{A})=n$.

הוכחה: נסמן ב A את המְקום של חוג הפולינומים $K[X_1,\dots,X_n]$ ביחס לאידאל המרבי הנוצר על ידי $X_1,\dots,X_n$. אזי A הוא חוג נטר מקומי ו $\hat{A}$ הנו ההשלמה שלו. לפי דֻגמה 4.4.11, $\dim(A)=n$. לכן, לפי תוצאה 4.4.17, $\dim(\hat{A})=n$. ∎

4.5 מערכת מְצַדים.

יהי $(A,\mathfrak{m})$ חוג נטר מקומי ממֵמד r. קבוצה $x_1,\dots,x_r$ נקראת **מערכת מְצַדים** (system of parameters) של A אם $\sum_{i=1}^r Ax_i$ הנו אידאל מקדים־$\mathfrak{m}$. למערכת כזו יש תכונת אי תלות המתֹארת במשפטון 4.5.2 להלן.

למה 4.5.1: *יהי A חוג.*

(א) *אם פולינום $f\in A[X]$ הנו מחלק אפס ב $A[X]$, אזי קיָם $a\in A$ שונה מאפס כך ש $af=0$.*

(ב) *אם אחד המקדמים של פולינום $f\in A[X_1,\dots,X_n]$ הפיך ב A, אזי f אינו מחלק אפס ב $A[X_1,\dots,X_n]$.*

הוכחת א: נרשֹם $f(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_mX^m$ עם $a_i\in A$ ו $a_m\neq 0$. יהי $g(X)=b_0+b_1X+\cdots+b_nX^n$ פולינום שונה מאפס בעל מעלה מזערית n כך ש $fg=0$. בפרט $a_mb_n=0$. לכן $f(X)a_mg(X)=0$ ו $\deg(a_mg(X))<\deg(g)$. מהמזעריות של $\deg(g)$ נובע ש $a_mg=0$. לכן, נוכל להסיק מ $fg=0$ ש $a_{m-1}b_n=0$. לכן, $\deg(a_{m-1}g)<\deg(g)$ ומהשויון $fa_{m-1}g=0$ נסיק ש $a_{m-1}g=0$. באפן כזה נמשיך ונוכיח ש $a_ig=0$ לכל i. לכן, $a_ib_0=0$ לכל i ומכאן ש $fb_0=0$. הואיל ו X אינו מחלק אפס ב $A[X]$, נובע מהמזעריות של $\deg(g)$ ש $b_0\neq 0$.

הוכחת ב: אבר הפיך ב A אינו מחלק אפס. במלים אחרות, טענה ב נכונה עבור $n=0$. נניח שהיא נכונה עבור $n-1$ ונניח בשלילה ש f מחלק אפס ב $A[X_1,\dots,X_n]$. נרשֹם $f=\sum_{i=0}^d f_iX_n^i$ באשר $f_i\in A[X_1,\dots,X_{n-1}]$ עבור $i=0,\dots,d$. לפי ההנחה קיָם j כך שאחד המקדמים של f_j הפיך ב A. כמו כן, f הפיך בחוג $A[X_1,\dots,X_{n-1}][X_n]$. חלק א נותן אפוא $g\in A[X_1,\dots,X_{n-1}]$ שונה מאפס כך ש $gf=0$. מכאן ש $gf_j=0$, בסתירה להנחת האנדוקציה. ∎

משפטון 4.5.2: *יהי $(A,\mathfrak{m})$ חוג נטר מקומי ממֵמד r, $x_1,\dots,x_r$ מערכת מְצַדים של A ו $\mathfrak{q}=\sum_{i=1}^r Ax_i$ האידאל המקדים־$\mathfrak{m}$ הנוצר על ידה. יהי $f\in A[X_1,\dots,X_r]$ פולינום הומוגני ממעלה k ונניח ש $f(x_1,\dots,x_r)\in\mathfrak{q}^{k+1}$. אזי כל המקדמים של f שַיָכים ל $\mathfrak{m}$.*

הוכחה: לפי הערה 4.3.5 ומשפטון 4.3.4, $d(G_{\mathfrak{q}}(A))=\deg(\chi_{\mathfrak{q}})=\deg(\chi_{\mathfrak{m}})$. לפי משפט המֵמד 4.4.10,

$$\deg(\chi_{\mathfrak{m}})=\dim(A)=r\,.$$

לכן, $d(G_{\mathfrak{q}}(A))=r$.

החוג המקומי $\bar{A} = A/\mathfrak{q}$ הוא נטרי, בתור מנה של חוג נטר ובעל אידאל ראשוני אחד והוא $\mathfrak{m}/\mathfrak{q}$ (כי $\mathfrak{q}$ מקדים־$\mathfrak{m}$) לכן $\dim(\bar{A}) = 0$. לפי משפט Akizuki 3.3.6, $\bar{A}$ הוא גם חוג ארטין. לכל $a \in A$ נסמן $\bar{a} = a + \mathfrak{q}$ ולכל פולינום $g \in A[X_1, \ldots, X_r]$ נסמן ב $\bar{g}$ את הפולינום המתקבל מ g על ידי השמת גג על מקדמי g. לבסוף נרשם $x_i' = x_i + \mathfrak{q}^2$, $i = 1, \ldots, r$. נגדיר הומומורפיזם α של $R = \bar{A}[X_1, \ldots, X_r]$ לתוך $G_{\mathfrak{q}}(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}$ על ידי $\alpha(\bar{g}(X_1, \ldots, X_r)) = \bar{g}(x_1', \ldots, x_r')$. הואיל ו $x_1, \ldots, x_r$ יוצרים את $\mathfrak{q}$, מתקיֵם $G_{\mathfrak{q}}(A) = \bar{A}[x_1', \ldots, x_r']$ ולכן α על. מהגדרת הכפל ב $G_{\mathfrak{q}}(A)$ עולה שאם g הוא פולינום הומוגני ממעלה l, אזי $\alpha(\bar{g}(X_1, \ldots, X_r)) = g(x_1, \ldots, x_r) + \mathfrak{q}^{l+1}$. הואיל ו f הומוגני ממעלה k ו $f(x_1, \ldots, x_r) \in \mathfrak{q}^{k+1}$, נקבל בפרט ש $\alpha(\bar{f}) = 0$. במלים אחרות, $R\bar{f} \subseteq \mathrm{Ker}(\alpha)$. לכן, $G_{\mathfrak{q}}(A)$ הוא מנה של החוג $R/R\bar{f}$. הואיל ו $\bar{f}$ הומוגני, $R/R\bar{f}$ הנו מודול־A נטרי מדרג. מלבד זאת מקבלת פונקציה הארך (המשמשת להגדרת טורי פואנקרה) רק ערכים אי שליליים. לכן, לפי למה 4.2.7, $d(R/R\bar{f}) \geq d(G_{\mathfrak{q}}(A))$.

נניח עתה בשלילה שאחד המקדמים a של f אינו שיָך ל $\mathfrak{m}$. אזי a הפיך ב A ולכן, $\bar{a}$ הפיך ב $\bar{A}$. לפי למה 4.5.1(ב), $\bar{f}$ אינו מחלק אפס ב R . לכן, לפי תוצאה 4.2.8, $d(R/Rf) = d(R) - 1$. לפי דֻגמה 4.2.10 (ביחס לחוג ארטין $\bar{A}$) , $d(R) = r$. לכן, לפי הפסקה הקודמת, $d(G_{\mathfrak{q}}(A)) \leq d(R/R\bar{f}) = d(R) - 1 = r - 1$. אם נצרף אי שויון זה למסקנה של הפסקה הראשונה של ההוכחה נקבל ש $r \leq r - 1$. מסתירה זו עולה שכל המקדמים של f שיָכים ל $\mathfrak{m}$. ∎

התוצאה הבאה מעניֶנת במקרה ש A מַקיף תת שדה.

תוצאה 4.5.3: *יהי $(A, \mathfrak{m})$ חוג נטר מקומי ממַמד r, $x_1, \ldots, x_r$ מערכת מֵצדים של A. אזי $x_1, \ldots, x_r$ אינם תלויים אלגברית מעל כל תת שדה K_0 של A.*

הוכחה: יהי $f \in K_0[X_1, \ldots, X_r]$ פולינום שונה מאפס. נניח בשלילה ש $f(x_1, \ldots, x_r) = 0$. יהי $f = f_k + f_{k+1} + \cdots + f_l$ פרוק של f לסכום של פולינומים הומוגניים f_i מעל K_0 ממעלה i כך ש $f_k \neq 0$. הואיל ו $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m}$, מתקיֵם $f_i(x_1, \ldots, x_r) \in \mathfrak{m}^{k+1}$ לכל $i \geq k + 1$. לכן גם $f_k(x_1, \ldots, x_r) \in \mathfrak{m}^{k+1}$. לפי תוצאה 4.5.2, כל המקדמים של f_k שיָכים ל $\mathfrak{m}$. מאידך שיָכים מקדמים אלו ל K_0 ו $\mathfrak{m} \cap K_0 = 0$. לכן, $f_k = 0$, בסתירה לבחירתו. ∎

4.6 חוגים מקומיים רגילים.

בגאומטריה אלגברית מבחינים בין נקֻדות "רגילות" (regular) לבין נקֻדות "חריגות" (singular) על יריעות. נקֻדה מכֻנה **רגילה** אם החוג המקומי שלה **רגיל**. כלומר אם הוא מקיֵם את אחת הטענות השקולות של המשפט הבא:

משפט 4.6.1: *יהי $(A, \mathfrak{m})$ חוג נטר מקומי ממַמד r עם שדה שאריות $K = A/\mathfrak{m}$. אזי הטענות הבאות שקולות זו לזו:*

(א) *$G_{\mathfrak{m}}(A)$ איזומורפי ל $K[X_1, \ldots, X_r]$ כחוג מדרג.*

(ב) $\dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = r$.

(ג) $\mathfrak{m}$ *נוצר על ידי* r *אברים.*

הוכחה: כדי להוכיח ש (א) גורר (ב) נסמן ב $\mathfrak{N}$ את האידאל המרבי של $K[X_1, \ldots, X_r]$ הנוצר על ידי $X_1, \ldots, X_r$. לפי ההנחה, $G_\mathfrak{m}(A) \cong \bigoplus_{k=0}^\infty \mathfrak{N}^k/\mathfrak{N}^{k+1}$. בפרט, $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ איזומורפי כמרחב וקטורי מעל K ל $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}^2$. בסיס למרחב זה הנו $X_1 + \mathfrak{N}^2, \ldots, X_r + \mathfrak{N}^2$ וממדו הוא אפוא r.

הטענה (ג) נובעת מ (ב) לפי למת נקַימה.

נניח עתה ש $\mathfrak{m}$ נוצר על ידי האברים $x_1, \ldots, x_r$. אזי אברים אלו מהוים מערכת מצדים ו $G_\mathfrak{m}(A) = K[x_1, \ldots, x_r]$. נקרא לקבוצה $\{x_1, \ldots, x_r\}$ **מערכת מצדים רגילה**. נסמן ב $\mathfrak{M}$ את האידאל של $A[X_1, \ldots, X_r]$ הנוצר על ידי $X_1, \ldots, X_r$. בפרט $\bar{\mathfrak{M}} = \mathfrak{N}$. נתבונן בההעתקה $\alpha_k\colon \mathfrak{M}^k \to \mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$ של מודולֵי־A המֻגדרת על ידי $\alpha_k(f) = f(x_1, \ldots, x_r) + \mathfrak{m}^{k+1}$ מתאפסת על כל הפולינומים שמקדמיהם ב $\mathfrak{m}$ ולכן מגדירה העתקה לינארית־K $\bar{\alpha}_k\colon \mathfrak{N}^k \to \mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$ על ידי $\bar{\alpha}_k(\bar{f}) = f(x_1, \ldots, x_r) + \mathfrak{m}^{k+1}$. ההעתקה α_k מתאפסת על $\mathfrak{M}^{k+1}$ ולכן $\bar{\alpha}_k$ מתאפסת על $\mathfrak{N}^{k+1}$. זה מגדיר לנו העתקה לינארית־K $\alpha'_k\colon \mathfrak{N}^k/\mathfrak{N}^{k+1} \to \mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$. הואיל ו α_k הנה על, גם $\bar{\alpha}_k$ ו α'_k הנן על. לפי משפטון 4.5.2, α'_k חד חד ערכית ולכן היא איזומורפיזם.

צרוף האיזומורפיזמים α'_k נותן איזומורפיזם $G_\mathfrak{m}(A) \cong K[X_1, \ldots, X_r]$ של חוגים מדֻרגים. ∎

משפטון 4.6.2:

(א) *יהיו* A *חוג ו* $\mathfrak{a}$ *אידאל כך ש* $\bigcap_{n=0}^\infty \mathfrak{a}^n = 0$ *ו* $G_\mathfrak{a}(A)$ *הנו תחום שלמות. אזי* A *הנו תחום שלמות.*

(ב) *כל חוג נטר מקומי רגיל* $(A, \mathfrak{m})$ *הנו תחום שלמות.*

הוכחת א: יהיו x, y אברים שונים מאפס של A. הואיל ו $\bigcap_{n=0}^\infty \mathfrak{a}^n = 0$ קיָמים $k, l \geq 0$ שלמים כך ש $x \in \mathfrak{a}^k \smallsetminus \mathfrak{a}^{k+1}$ ו $y \in \mathfrak{a}^l \smallsetminus \mathfrak{a}^{l+1}$. לכן $x + \mathfrak{a}^{k+1} \neq 0$ ב $\mathfrak{a}^k/\mathfrak{a}^{k+1}$ ו $y + \mathfrak{a}^{l+1} \neq 0$ ב $\mathfrak{a}^l/\mathfrak{a}^{l+1}$. הואיל ו $G_\mathfrak{a}(A)$ תחום שלמות מתקיֵם בחוג זה

$$xy + \mathfrak{a}^{k+l+1} = (x + \mathfrak{a}^{k+1})(y + \mathfrak{a}^{l+1}) \neq 0.$$

בפרט $xy \neq 0$ והוכחנו אפוא ש A תחום שלמות.

הוכחת ב: הואיל ו A הוא חוג נטר, $\bigcap_{n=0}^\infty \mathfrak{m}^n = 0$. לפי משפט 4.6.1, $G_\mathfrak{m}(A)$ איזומורפי לתחום השלמות $K[X_1, \ldots, X_n]$, באשר $K = A/\mathfrak{m}$. לכן, לפי (א), A תחום שלמות. ∎

תנאי (ב) במשפטון 4.6.2 אומר שלכל נקֻדה רגילה על יריעה קיֶמת סביבה אפינית פתוחה ואי פריקה.

משפטון 4.6.3: *יהי $(A,\mathfrak{m})$ חוג נטר מקומי ו $\hat{A}=\varprojlim A/\mathfrak{m}^n$ ההשלמה שלו. אזי A רגיל אם ורק אם $\hat{A}$ רגיל.*

הוכחה: לפי משפטון 2.6.1, $\hat{A}$ הנו חוג מקומי עם אידאל מרבי $\hat{\mathfrak{m}}$. לפי משפט 2.7.5, $\hat{A}$ נטרי. לפי תוצאה 4.4.17, $\dim(A)=\dim(\hat{A})$. לפי למה 2.7.1, $G_{\mathfrak{m}}(A)$ איזומורפי ל $G_{\hat{\mathfrak{m}}}(\hat{A})$ כמודולים מדרגים. בפרט, שדה השאריות $K=A/\mathfrak{m}$ איזומורפי ל $\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}$. אם נסמן $r=\dim(A)=\dim(\hat{A})$ נקבל מכאן ש $G_{\mathfrak{m}}(A)$ איזומורפי ל $K[X_1,\dots,X_r]$ כחוג מדרג אם ורק אם $G_{\hat{\mathfrak{m}}}(\hat{A})$ איזומורפי ל $K[X_1,\dots,X_r]$ כחוג מדרג. ממשפט החוג המקומי הרגיל 4.6.1 נובע אפוא ש A רגיל אם ורק $\hat{A}$ רגיל. ∎

אם $(A,\mathfrak{m})$ הוא חוג נטר מקומי רגיל, אזי גם $(\hat{A},\hat{\mathfrak{m}})$ רגיל ולכן, לפי משפטון 4.6.2, $\hat{A}$ הנו תחום שלמות. במונחים גאומטריים פרוש תוצאה זו הוא שבאפן מקומי יריעה אלגברית אי פריקה באפן אנליטי בכל נְקֻדה רגילה.

משפט 4.6.4: *יהי $(A,\mathfrak{m})$ חוג נטר מקומי רגיל ממֵמד r ויהי K תת שדה של A העובר תחת העתקת המנה $A\to A/\mathfrak{m}$ באפן חד חד ערכי על $A/\mathfrak{m}$. אזי:*

(א) $\hat{A}\cong K[[X_1,\dots,X_r]]$.

(ב) *A בעל פריקות חד ערכית.*

(ג) *A סגור בשלמות.*

הוכחת א: תהי $x_1,\dots,x_r$ מערכת מצדים רגילה של $(A,\mathfrak{m})$. אזי $\mathfrak{m}=\sum_{i=1}^r Ax_i$ ולכן, כל אבר x של $\mathfrak{m}^n$ שוה לפולינום הומוגני ב $x_1,\dots,x_r$ ממעלה n במקדמים השַיָכים ל A. כל אבר של A חופף מודולו $\mathfrak{m}$ לאבר של K. לכן, קיָם פולינום הומוגני $f\in K[X_1,\dots,X_r]$ ממעלה n כך ש $x\equiv f(x_1,\dots,x_r) \mod \mathfrak{m}^{n+1}$. אם $f'\in K[X_1,\dots,X_r]$ הוא פולינום הומוגני נוסף ממעלה n המקיֵם $x\equiv f'(x_1,\dots,x_r) \mod \mathfrak{m}^{n+1}$, אזי $f(x_1,\dots,x_r)-f'(x_1,\dots,x_r)\in\mathfrak{m}^{n+1}$. לפי משפטון 4.5.2, המקדמים של $f-f'$ שיָכים ל $\mathfrak{m}$. מאידך, הם שיָכים גם ל K. לכן שוים כל המקדמים ל 0 ומכאן ש $f=f'$.

אבר של $\hat{A}=\varprojlim A/\mathfrak{m}^n$ הוא סִדרה $y=(y_1+\mathfrak{m},y_2+\mathfrak{m}^2,y_3+\mathfrak{m}^3,\dots)$ שבה y_n הוא אבר של A ו $y_{n+1}\equiv y_n \mod \mathfrak{m}^n$ לכל n טבעי. יהי f_0 האבר היחיד של K כך ש $y_1\equiv f_0 \mod \mathfrak{m}$. בלי הגבלת הכלליות נניח ש $y_1=f_0$. עתה נסמן $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_r)$ ו $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_r)$. נגדיר באנדוקציה סדרה $f_0,f_1,f_2,\dots$ כך ש $f_n\in K[\mathbf{X}]$ הוא פולינום הומוגני ממעלה n ו $y_n\equiv\sum_{i=0}^{n-1}f_i(\mathbf{x}) \mod \mathfrak{m}^n$. ואכן, נניח ש $f_0,\dots,f_{n-1}$ הֻגדרו כבר ושהם אינם תלויים אלא במחלקות $y_1+\mathfrak{m},\dots,y_{n-1}+\mathfrak{m}^{n-1}$. לפי הפסקה הראשונה קיָם פולינום הומוגני יחיד $f_n\in K[\mathbf{X}]$ ממעלה n כך ש $y_{n+1}-y_n=f_n(\mathbf{x})$. הוא מקיֵם $y_{n+1}=\sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x})$. יתר על כן, $f_n(\mathbf{x})$ תלוי רק במחלקה $y_n+\mathfrak{m}^n$.

הראינו אפוא שאפשר להציג את y באֹפן יחיד כסדרה $y=(\sum_{i=0}^{n-1}f_i(\mathbf{x})+\mathfrak{m}^n)_{n=0,1,2,\dots}$ שבה $f_i\in K[\mathbf{X}]$ פולינום הומוגני ממעלה i. נתאים אפוא את y לטור החזקות $\sum_{i=0}^\infty f_i$. התאמה זו מעתיקה את $\hat{A}$ באפן חד חד ערכי על $K[[X_1,\dots,X_r]]$ ושומרת על החִבור ועל הכפל.

הוכחת ב: כפי שהערנו, לפני המשפט, $\hat{A}$ הוא תחום שלמות. לפי [אלגברה ב3, יג.ט] יש לחוג טורי החזקות הפורמליים $K[[X_1,\ldots,X_r]]$ פריקות חד ערכית. לכן, לפי (א), יש ל $\hat{A}$ פריקות חד ערכית. ממשפטון 2.6.9 נובע שהחוג A הוא בעל פריקות חד ערכית.

הוכחת ג: כל חוג בעל פריקות חד ערכית סגור בשלמות. בפרט, לפי (ב), A סגור בשלמות. ∎

משפטון 4.6.5: *התנאים הבאים על חוג נטר מקומי $(A,\mathfrak{m})$ מממד 1 שקולים זה לזה:*

(א) *A רגיל.*

(ב) *A סגור בשלמות.*

(ג) *A הנו חוג הערכה בדידה.*

הוכחה: ההנחה ש $\dim(A)=1$ אומרת שהתנאי "A רגיל" שקול לתנאי "$\mathfrak{m}$ ראשי". לכן, לפי משפטון 1.1.2, התנאים (א), (ב) ו (ג) שקולים זה לזה. ∎

הערה 4.6.6:

(א) נקֻדה על יריעה אלגברית V מכֻנה ***תְקינה*** *או* ***נורמלית*** *אם החוג המקומי שלה סגור בשלמות. ממשפט 4.6.4 עולה שכל נקֻדה רגילה הנה תקינה.*

(ב) להפך, אם הממד של נקֻדה של V שוה ל $\dim(V)-1$, אזי הממד של החוג המקומי המתאים לה שוה ל 1. אם בנוסף לכך, הנקֻדה תקינה, אזי לפי משפטון 4.6.5, הנקֻדה רגילה ומתאימה לה הערכה בדידה. נקֻדות מממד $\dim(V)-1$ הנן נקֻדות יוצרות של תת יריעות של V מממד נלוֶה 1. ההערה הנוכחית מהוה בסיס לתורת החִתוכים (intersection theory) של מחלקים על יריעות.

(ג) תהי V יריעה אלגברית מממד r מעל שדה K ותהי $\mathfrak{a}\in V(\tilde{K})$ נקֻדה אלגברית שלה. הממד של החוג המקומי של $\mathbf{a}$ הנו r. אם $\mathbf{a}$ רגילה, אזי ההשלמה של החוג המקומי שלה איזומורפי ל $K[[X_1,\ldots,X_r]]$ (לפי משפט 4.6.4) ואינה תלויה (עד כדי איזומורפיזם) אפוא בנקֻדה.

(ד) משפט הפריקות החד ערכית עבור חוגי נטר רגילים נכון באפן כללי ולא רק במקרה הגאומטרי המופיע במשפט 4.6.4. הוא הוכח על ידי Auslander ו Buchsbaum. ראה משפט 20.3 בעמוד 163 של [Mat94].

(ה) משפט המִבנה של כהן יוצא מחוג נטר מקומי מֻשלם $(A,\mathfrak{m})$ בעל שדה שאריות K. אם A מַקיף שדה, אזי קיָם מספר טבעי n וקיָם אידאל I של $K[[X_1,\ldots,X_n]]$ כך ש $A\cong K[[X_1,\ldots,X_n]]/I$. ראה עמוד 191 ב [Eis95].

∎

5. בחן יעקבי לפשטות של נקֻדות

נקֻדות פשוטות על יריעות הן גם רגילות וגם מוסיפות להשאר כאלו גם לאחר הרחבת שדה המקדמים. בפרק קצר זה נוכיח את בחן יעקבי לפשטות על משטחי על ונזכיר גם את המקרה הכללי.

5.1 מרחב על.

יהי K שדה ו $f \in K[X_1,\dots,X_n]$. **משטח העל** המֻגדר על ידי f הוא ההַעְתקון (פונקטור) המתאים לכל שדה L המקיף את K את הקבוצה $H(L) = \{\mathbf{a} \in L^n \mid f(\mathbf{a}) = 0\}$. נקֻדה $\mathbf{a} \in H(L)$ מכֻנה **פשוטה** אם קיָם i כך ש $\frac{\partial f}{\partial X_i}(\mathbf{a}) \neq 0$.

למה 5.1.1: *יהי K שדה ו $f \in K[X_1,\dots,X_n]$ פולינום אי פריק. נסמן ב H את משטח העל הנוצר ב $\mathbb{A}^n$ על ידי f ותהי $\mathbf{a} \in H(K)$ נקֻדה רציונלית־ K שלו. אזי $\mathbf{a}$ פשוטה אם ורק אם החוג המקומי של H ב $\mathbf{a}$ רגיל.*

הוכחה: נסמן $R = K[\mathbf{X}]$, $x_i = X_i + Rf$, $i = 1,\dots,n$, $A = K[\mathbf{x}]$, $\mathfrak{M} = \{g \in R \mid g(\mathbf{a}) = 0\}$, ו $\mathfrak{m} = \{g \in A \mid g(\mathbf{a}) = 0\}$. אזי $f(\mathbf{a}) = 0$, H הנו אסף כל האפסים של f ב $\mathbb{A}^n$, A הנו חוג הקואורדינטות של H, $\mathfrak{M}$ ו $\mathfrak{m}$ הם אידאלים מרביים ב R ו A בהתאמה, שדות השאריות הם K ו $A_\mathfrak{m}$ הוא החוג המקומי של H ב $\mathbf{a}$. יתר על כן ההעתקה $g(\mathbf{X}) \mapsto g(\mathbf{x})$ נותנת סדרה מדֻיקת קצרה

$$0 \to R_\mathfrak{M} f \to R_\mathfrak{M} \to A_\mathfrak{m} \to 0$$

לפי משפט 4.1.5, $\dim(R) = n$. לפי משפט 4.1.9, הארך של כל סדרה מרבית של אידאלים ראשוניים ב R הוא n. הואיל ו $\mathfrak{M}$ אידאל מרבי של R, גם $\dim(R_\mathfrak{M}) = n$. הואיל ו f אינו מחלק אפס של R, $\dim(A_\mathfrak{m}) = \dim(R) = n-1$. ממשפט 4.6.1 עולה שעלינו להוכיח ש $\mathbf{a}$ פשוטה על H אם ורק אם $\dim_K(\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2A_\mathfrak{m}) = n-1$. הואיל ו $\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2A_\mathfrak{m} \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ צריך להוכיח ש $\mathbf{a}$ פשוטה על H אם ורק אם $\dim_K \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = n-1$. לצרך זה נצא מהסדרה הקצרה המדֻיקת של מרחבים וקטוריים מעל K:

$$0 \to (Rf + \mathfrak{M}^2)/\mathfrak{M}^2 \to \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to 0$$

בסיס למרחב $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$ הוא $X_1 - a_1 + \mathfrak{M}^2, \dots, X_n - a_n + \mathfrak{M}^2$ וממדו הוא אפוא n.

אם $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = n-1$, אזי $\dim_K(Rf + \mathfrak{M}^2)/\mathfrak{M}^2 = 1$ ולכן, $f \notin \mathfrak{M}^2$. פתוח טיילור של f סביב $\mathbf{a}$ נותן

$$f(\mathbf{X}) \equiv \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(\mathbf{a})(X_i - a_i) \mod \mathfrak{M}^2$$

מכאן שקיָם i כך ש $\frac{\partial f}{\partial X_i}(\mathbf{a}) \neq 0$, כלומר $\mathbf{a}$ פשוטה.

להפך, אם $\mathbf{a}$ פשוטה, אזי $f(\mathbf{X}) \notin \mathfrak{M}^2$. לכן, $\dim_K \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = n-1$. ∎

5.2 בֹּחַן יעקבי הכללי.

יהי $\mathfrak{a}$ אידאל של חוג R. **הממד הנִלוה** (codimension) ל $\mathfrak{a}$ מֻגדר כגבה הקטן ביותר של אידאלים ראשוניים המקיפים את $\mathfrak{a}$. נסמן אותו ב $\mathrm{codim}(\mathfrak{a})$. באֹפן מפרש $\mathrm{codim}(\mathfrak{a})$ הנו הארך המזערי של שרשרת אידאלים ראשוניים $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_c$ של R כך ש $\mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{a}$.

יהי F שדה הנוצר סופית מעל שדה K. אנו אומרים ש F **פריד** (separable) מעל K אם קַיֶּמת להרחבה F/K **בסיס נעלות מפריד** (separating transwcendence base), כלומר קַיָּמים $t_1, \dots, t_r$ ב F שאינם תלויים אלגברית מעל K כך ש $F/K(t_1, \dots, t_r)$ הנה הרחבה אלגברית פרידה.

משפט 5.2.1 (בֹּחַן יעקבי): *יהיו K שדה, $R = K[X_1, \dots, X_n]$ חוג הפולינומים מעל K, $I = \sum_{i=1}^m Rf_i$ ו P אידאל ראשוני של R המקיף את I. נסמן ב c את הממד הנִלוֶה של IR_P ב R_P, ב $\kappa(P)$ את שדה המנות של R/P וב $J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)$ את מטריצת יעקבי. עוד נסמן ב $\bar{J}$ את ההעמדה של J מודולו P, כלומר את התמונה של J ב $\kappa(P)$. יהי $A = R/I$ ו $\mathfrak{p} = P/I$.*

(א) $\mathrm{rank}(\bar{J}) \leq c$.

(ב) *אם $\mathrm{char}(K) > 0$ נניח עוד ש $\kappa(P)$ הוא הרחבה פרידה של K. אזי $A_\mathfrak{p}$ הוא חוג מקומי רגיל אם ורק אם $\mathrm{rank}(\bar{J}) = c$.*

הוכחה: *ראה עמודים 404 ו 604 של ספרו* Commutative Algebra *של דוד אייזנבָּד* (David Eisenbud).

נֵנסח את בֹּחַן יעקבי במקרה הגאומטרי הקלסי שבו I הוא פולינום אי פריק.

תוצאה 5.2.2: *תהי V קבוצה אלגברית אי פריקה ממד r המֻגדרת ב $\mathbb{A}^n$ מעל שדה K בעזרת פולינומים $f_1, \dots, f_m \in K[X_1, \dots, X_n]$. תהי $\mathbf{a} \in V(\tilde{K})$. נסמן $J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)$ ותהי $\mathbf{a} \in V(\tilde{K})$.*

(א) $\mathrm{rank}(J(\mathbf{a})) \leq n - r$.

(ב) *נניח ש $K(\mathbf{a})/K$ הרחבה פרידה. אזי החוג המקומי של V ב $\mathbf{a}$ רגיל אם ורק אם* $\mathrm{rank}(J(\mathbf{a})) = n - r$.

הוכחה: כמו בסעיף נראה את V כהעתקון המתאים לכל שדה L המַקיף את K את הקבוצה

$$V(L) = \{\mathbf{x}' \in L^n \mid f_1(\mathbf{x}') = \cdots = f_m(\mathbf{x}') = 0\}.$$

נסמן $R = K[X_1, \dots, X_n]$ ו $I = \sum_{i=1}^m Rf_i$. מהנחותינו נובע ש I הוא אידאל ראשוני של R. אם נסמן $x_i = X_i + I$, $i = 1, \dots, n$ נקבל ש $A = K[x_1, \dots, x_n] = R/I$ הוא תחום שלמות (הנקרא **חוג הקואורדינטות** של V), $F = K(x_1, \dots, x_n)$ הוא שדה (הנקרא **שדה הפוקציות הרציונליות של** V), $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ היא נְקֻדה ב $V(F)$ (המכֻנה **יוצרת** ובאנגלית generic) ו $r = \mathrm{trans.deg}(F/K) = \dim(A)$ (משפט 4.1.5). יתר על כן, הואיל ו I ראשוני, $\mathrm{codim}(I) = \mathrm{height}(I) = \dim(R) - \dim(R/I) = n - r$.

יהי $P = \{p \in K[X_1, \ldots, X_n] \mid p(\mathbf{a}) = 0\}$ ויהי $\mathfrak{p} \in K[x_1, \ldots, x_n] \mid p(\mathbf{a}) = 0\}$. אזי P הוא אידאל ראשוני של R המקיף את I, $\mathfrak{p}$ הוא התמונה של P ב A, $A_{\mathfrak{p}} = \{\frac{p(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})} \mid p, q \in R,\ q(\mathbf{a}) \neq 0\}$ הוא החוג המקומי של V ב $\mathbf{a}$, $K(\mathbf{a})$ הוא שדה המנות של R/P, ו $J(\mathbf{a})$ הנו ההעמדה של J מודולו P. לפי בחן יעקבי, $\mathrm{rank}(J(\mathbf{a})) \leq n - r$. ואם $K(\mathbf{a})/K$ הוא הרחבה פרידה, אזי החוג המקומי $A_{\mathfrak{p}}$ רגיל אם ורק אם $\mathrm{rank}(J(\mathbf{a})) = n - r$. ∎

בסימונים של תוצאה 5.2.2 נאמר ש $\mathbf{a}$ **פשוטה** על V אם $J(\mathbf{a}) \neq 0$.

למה 5.1.1 הוא מקרה פרטי של תוצאה 5.2.2 שבו שבו $m = 1$, ו $K(\mathbf{a}) = K$.

שארית הפרק מֻקדשת להוכחת בֹחן יעקבי. הכלי המרכזי בהוכחה (הארֻכה) הנו "דיפרציאלים של חוגים".

5.3 מודול הדיפרנציאלים של קלר

יהיו S חוג ו M מודול־S. העתקה $d\colon S \to M$ מכֻנה **גזירה** אם היא לינארית ומקיֶמת את **כלל לַיְבּניץ**:

$$d(f+g) = df + dg$$

$$d(fg) = fdg + gdf$$

אם בנוסף לזאת S היא אלגברת־R ו d היא הומומורפיזם של מודולי־R, אומרים ש d הנה **לינארית־R**

הסכום של גזירות לינאריות־R הוא שוב גזירה לינארית־R. הכפל של אבר $s \in S$ בגזירת־R d מֻגדר על ידי הנֻסחה $(sd)(f) = s \cdot df$ ומהוה גזירה לינארית־R. הקבוצה $\mathrm{Der}_R(S,M)$ של כל גזירות־R $S \to M$ מהוה מודול־S.

לדֻגמה, יהי $S = K[X,Y]$ חוג הפולינומים ב X, Y מעל שדה X. הנגזרת החלקית $\frac{\partial}{\partial X}$ היא גזירה מ S לתוך עצמו. נִתן להראות ש $\mathrm{Der}_{K[X]}(S,S)$ הנו מודול־S חפשי מדרגה 1 הנוצר על ידי $\frac{\partial}{\partial X}$.

מעניֵן ביותר הוא לבחֹר $S = M$. לדֻגמה, אם S הנו חוג הקואורדינטות של יריעה אלגברית V מעל שדה K, אזי $\mathrm{Der}_K(S,S)$ הנו קבוצת המשיקים האלגבריים של V.

מהשויון $d(1\cdot 1) = 1d(1) + 1d(1)$ נובע ש $d(1) = 0$ לכל גזירה d. לכן, אם d לינארית־R, אזי $da = 0$ לכל $a \in R$. ואכן, $da = d(a \cdot 1) = ad(1) = 0$.

הגדרה 5.3.1: מודולי קֶלֶר. תהי S אלגברת־R. **המודול של דיפרנציאלי קלר** הנו המודול־S הנוצר על ידי הקבוצה $\{df \mid f \in S\}$ עם היְחסים הבאים:

$$d(af+bg) = adf + bdg$$

$$d(fg) = fdg + gdf$$

מודול זה מסֻמן על ידי $\Omega_{S/R}$. ההעתקה $d\colon S \to \Omega_{S/R}$ המעְתיקה את f ל dF הנה גזירת־R הנקראת **גזירת־R האוניברסלית**.

למה 5.3.2: *יהי M מודול־S.*

(א) *תהי $e\colon S \to M$ גזירת־R. אזי קיָם הומומורפיזם יחיד $e'\colon \Omega_{S/R}$ כך ש $e' \circ d = e$.*

(ב) $\mathrm{Der}_R(S,M) \cong \mathrm{Hom}_S(\Omega_{S/R}, M)$.

הוכחה: תנאי (ב) הנו נִסוח מחדש של תנאי (א). כדי להוכיח את (א) נגדיר את e' על ידי $e'(df) = e(f)$ לכל $f \in S$. ∎

מ (ב) של הלמה האחרונה נובע שכדי לחשב את $\mathrm{Der}_R(S,M)$ מספיק באפן עקרוני להכיר את $\Omega_{S/R}$. נשתדל אפוא בהמשך לחקר את המודול הזה.

למה 5.3.3: *תהי S אלגברת־R.*

(א) *לכל $x_1, \ldots, x_n \in S$ ולכל פולינום $f \in R[X_1, \ldots, X_n]$ מתקיֵם*

$$d(f(x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(x_1, \ldots, x_n)dx_i$$

(ב) *אם $S = R[x_i]_{i \in I}$, אזי המודול $\Omega_{S/R}$ נוצר על ידי dx_i, $i \in I$, מעל S.*

הוכחה: תנאי (ב) נובע מתנאי (א). את תנאי (א) מספיק להוכיח במקרה שבו $f(X_1, \ldots, X_n) = X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$. ותחילה בהשראה על i עבור הפולינום $f(X) = X^i$ במקרה שבו $i \geq 1$. עבור $i = 1$ הטענה ברורה. עבור $i \geq 2$ מתקיֵם

$$\begin{aligned} d(x^i) &= d(xx^{i-1})) = xd(x^{i-1}) + x^{i-1}dx \\ &= x(i-1)x^{i-2}dx + x^{i-1}dx = ix^{i-1}dx = \frac{d(X^i)}{dX}(x)dx \end{aligned}$$

עתה נניח שהנֻסחה הוכחה עבור $n-1$ וש $i_1, \ldots, i_n \geq 1$. אזי

$$\begin{aligned} d(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}) &= x_1^{i_1}d(x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}) + x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}d(x_1^{i_1}) \\ &= x_1^{i_1}i_2x_2^{i_2-1}x_3^{i_3}\cdots x_n^{i_n}dx_2 + \cdots + x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_{n-1}^{i_{n-1}}i_nx_n^{i_n-1}dx_n \\ &\qquad + x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}i_1x_1^{n-1}dx_2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n})}{\partial X_i}(x_1, \ldots, x_n)dx_i \end{aligned}$$

כנדרש. ∎

משפטון 5.3.4: *יהי $S = R[X_1, \ldots, X_r]$ חוג הפולינומים ב r משתנים. אזי $\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i=1}^{r} SdX_i$ הנו המודול־S החפשי עם הבסיס $dX_1, \ldots, dX_n$.*

הוכחה: לפי למה 5.3.3 קיָם אפימורפיזם $\delta\colon S^r \to \Omega_{S/R}$ המעתיק את אבר הבסיס הטבעי ה i־י ל dX_i. מצד שני, הנגזרת החלקית $\frac{\partial}{\partial X_i}$ הנה גזירת־R מ S ל S ומשרה אפוא הומומורפיזם $\partial_i\colon \Omega_{S/R} \to S$ המעתיק את dX_i ל 1 ואת dX_j ל 0 עבור $j \neq i$ (למה 5.3.2). צרוף העתקות אלו נותן הומומורפיזם $(\partial_1, \ldots, \partial_r)\colon \Omega_{S/R} \to S^r$ הֵהפוך ל δ. לכן, δ הנו איזומורפיזם. ∎

הערה 5.3.5: *המודול $\Omega_{S/R}$ כפונקטור.* את האלגברה S נִתן לראות גם כהומומורפיזם $R \to S$ של חוגים. נתבונן

בתרשים החִלופי

$$
\begin{tikzcd}
\Omega_{S/R} \arrow[r, dotted, "\omega"] & \Omega_{S'/R'} \\
S \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\sigma"] & S' \arrow[u, "d"'] \\
R \arrow[u] \arrow[r, "\rho"] & R' \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

נראה את $\Omega_{S'/R'}$ גם כמודול־S דרך σ. כלומר, המכפלה של אבר f של S באבר של $\Omega_{S'/R'}$ תהיה המכפלה של $\sigma(f)$ באותו האבר. בהתאם לכך, יתקיֵם עבור $f, g \in S'$

$$d(\sigma(fg)) = d(\sigma(f)\sigma(g)) = \sigma(f)d(\sigma(g)) + \sigma(g)d(\sigma(f)) = f \cdot d(\sigma(g)) + g \cdot d(\sigma(f))$$

ולכן ההעתקה $d \circ \sigma \colon S \to \Omega_{S'/R'}$ הנה גזירת־R.

ולכן, לפי למה 5.3.2, משרה את ההומומורפיזם ω כך שגם הרבוע העליון חלופי.

במקרים רבים $R = R'$ ו ρ הנו העתקת הזהות.

להעתקון (פונקטור) $\Omega_{S/R}$ נקרא **העתקון המשיק הנִלוֶה היַחסי.**

משפטון 5.3.6 (הסדרה המדֻיקת הבסיסית הראשונה): *כל סִדרה $R \to S \to T$ של הומומורפיזמים של חוגים משרה סדרה מדֻיקת*

$$T \otimes_S \Omega_{S/R} \to \Omega_{T/R} \to \Omega_{T/S} \to 0 \qquad (1)$$

של מודולי־T שבה ההעתקה הימְנית מעתיקה את dt ל dt וההעתקה השמאלית מעתיקה את ds ל $t \otimes ds$ ל tds.

הוכחה: האברים dt שבהם $t \in T$ יוצרים את $\Omega_{T/R}$ ואת $\Omega_{T/S}$ כמודולֵי־T. במקרה השני הם מקיְמים יחס נוסף והוא $ds = 0$ לכל $s \in S$. לכן, החץ השני משמאל של (1) מֻגדר היטב ומהוֶה אפימורפיזם.

אבר $\sum t_i \otimes ds_i$ של $T \otimes_S \Omega_{T/R}$ עובר על ידי החץ הראשון לאבר $\sum t_i ds_i$ והנ"ל עובר על ידי החץ השני ל 0, כי כפי שאמרנו לעיל, $ds_i = 0$ ב $\Omega_{T/S}$ לכל $s_i \in S$.

לבסוף הגרעין של ההעתקה $\Omega_{T/R} \to \Omega_{T/S}$ נוצר על ידי האברים ds שבהם $s \in S$ הבאים מהאברים $1 \otimes ds$ של $T \otimes_S \Omega_{S/R}$. לכן הסדרה (1) מדֻיקת. ∎

אם ההעתקה $S \to T$ במשפטון 5.3.6 על, אזי $dt = 0$ לכל $t \in T$ ולכן $\Omega_{T/S} = 0$. במקרה זה הסדרה המדֻיקת (1) מתקצרת ל $T \otimes_S \Omega_{S/R} \to \Omega_{T/R} \to 0$. המשפטון הבא מתאר את הגרעין של העתקה זו.

משפטון 5.3.7 (**הסדרה המדֻיֶקת הבסיסית השניה**): *יהי* $\pi\colon S\to T$ *אפימורפיזם של אלגבראות־*R *ויהי* $I=\operatorname{Ker}(\pi)$. *אזי הסדרה הבאה מדֻיקת:*

$$I/I^2 \xrightarrow{\bar d} T\otimes_S \Omega_{S/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0 \tag{2}$$

בסדרה זו $\bar d(i+I^2)=1\otimes di$ *ואִלו* $D\pi(t\otimes ds)=tds$ *כמקודם.*

הוכחה: הצמצום של הגזירה האוניברסלית $d\colon S\to\Omega_{S/R}$ ל I נותן ההעתקה חבורית $i\to 1\otimes\Omega_{S/R}$ של I לתוך $T\otimes_S\Omega_{S/R}$ המעתיקה את is, עבור $i\in I$ ו $s\in S$ ל

$$1\otimes d(si)=1\otimes(sdi+ids)=\pi(s)(1\otimes di)+\pi(i)\otimes ds=\pi(s)(1\otimes di) \tag{3}$$

ולכן היא העתקה של מודולֵי־S. אם s ב (3) שייָך אף הוא ל I, אזי אגף ימין של (3) שוה לאפס. מכאן שההעתקה מתאפסת על I^2 ולכן ההעתקה $\bar d$ המושרית על ידה היא העתקה של מודולי־S/I, כלומר העתקה של מודולֵי־T.

כדי להוכיח ש $\operatorname{Ker}(D\pi)=\operatorname{Im}(\bar d)$, נזכֹר שהכפלה טנזורית הנה העתקון מדָיק מימין. לכן, הסדרה המדֻיקת $0\to I\to S\to T\to 0$ נותנת סדרה מדֻיקת $I\otimes_S\Omega_{S/R}\to S\otimes_S\Omega_{S/R}\to T\otimes_S\Omega_{S/R}\to 0$. האבר האמצעי אינו אלא $\Omega_{S/R}$ ואִלו התמונה של $I\otimes_S\Omega_{S/R}$ ב $\Omega_{S/R}$ הנה $I\otimes\Omega_{S/R}$. לכן, $T\otimes_S\Omega_{S/R}=\Omega_{S/R}/I\Omega_{S/R}$, ההעתקה $D\pi$ מעתיקה אבר $ds+I\Omega_{S/R}$ על $d\bar s$, באשר $\bar s=\pi(s)$ ואִלו $\bar d(i+I^2)=ds+I\Omega_{S/R}$. הסִדרה (2) שאת דִיוקה אנו צריכים להוכיח הופכת להיות השורה השלישית בתרשים החלופי הבא של מודולי־S:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & dI \arrow[r] & dS \arrow[r] \arrow[d] & dT \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & I \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_{S/R} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_{T/R} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & I/I^2 \arrow[r] & \Omega_{S/R}/I\Omega_{S/R} \arrow[r] & \Omega_{T/R} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dI,dS,dT בשורה העליונה הנם מודולי־S החפשיים הנוצרים על ידי האברים di,ds,dt ב I,S,T בהתאמה. לכן, שורה זו מהוה סדרה מדֻיקת קצרה. החצים המאונכים העליונים הם העתקות המנה מודולו מודולֵי היחסים המתאימים. צרוף ההעתקות המאוזנות בשורה האחרונה שוה להעתקת האפס. להפך, אבר של $\Omega_{S/R}/I\Omega_{S/R}$ העובר לאפס ש $\Omega_{T/R}$ בא מאבר של dS השוה לסכום של אברים במודול המבטא את הלינאריות־R של $\Omega_{S/R}$, את כלל ליבניץ ואברים מהצורה $\sum s_jdi_j$ שבהם $i_j\in I$. האברים מהסוג הראשון עוברים כמובן לאפס כבר ב $\Omega_{S/R}$ ואלו מהסוג האחרון עוברים לאברים המגיעים ל $\Omega_{S/R}/I\Omega_{S/R}$ מ I/I^2. במלים אחרות, הסדרה התחתונה בתרשים האחרון מדֻיקת גם באבר האמצעי. ∎

הערה 5.3.8: אפשר להוכיח את הדיוק של הסדרות הבסיסיות גם על ידי מעבר למודולי הגזירות לפי למה 5.3.2. ראה [Mat, Thms. 25.1, 25.2]. ∎

5.4 חִשובי דיפרנציאלים

הסדרות המדיָקות הבסיסיות עבור מודולי הדיפרנציאלים מאפשרות במקרים רבים לחשב מודולים אלו. לדֻגמה, יהי R חוג ו $S = R[\mathbf{X}]/I$ אלגברת־R נוצרת סופית שבה $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ ו $I = \sum_{j=1}^m R[\mathbf{X}]f_j$. לפי משפטון 5.3.4, $\Omega_{R[\mathbf{X}]/R} = \bigoplus_{k=1}^n R[\mathbf{X}]dX_i$. הסִדרה המדֻיקת השניה עבור הדיפרנציאלים נותנת

$$\Omega_{S/R} = \mathrm{Coker}(d\colon I/I^2 \to \sum_{k=1}^n R[\mathbf{X}]dX_k)$$

לפי למה 5.3.3, $df_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_k} dX_k$, באשר $\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_j}{\partial X_k}(\mathbf{x})$ ו $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ו $x_k = X_k + I$ לכל k. עתה נרשֹם את I/I^2 כמנה של מודול־S החפשי $\bigoplus_{j=1}^m Se_j$ שבה e_j עובר ל $f_j + I^2$. אזי ההרכבה

$$\sum_{j=1}^m Se_j \to I/I^2 \to \bigoplus_{k=1}^n R[\mathbf{X}]dX_k$$

הנה העתקה של מודולי־S חפשיים המיֻצגת על ידי **מטריצת יַעֲקֹבִי**

$$.\mathcal{J} = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right)_{1 \le j \le m,\ 1 \le k \le n}$$

ואִלו

$$\Omega_{S/R} = \bigoplus_{k=1}^m SdX_k / \Big\langle \sum_{j=1}^k \frac{\partial f_1}{\partial x_k} dX_k, \ldots, \sum_{j=1}^k \frac{\partial f_n}{\partial x_k} dX_k \Big\rangle \tag{4}$$

לדֻגמה, אם $S = R[X]/R[X]f$, אזי

$$\Omega_{S/R} = SdX/Sf'(x)dX = S/Sf'(x)$$

באשר $x = X + Sf(X)$.

בתור דֻגמה שניה יהי $S = R[X,Y,Z]/\langle Y^2 - X^2(Z^2 - X)\rangle$. במקרה זה מטריצת יעקבי תהיה מסדר 3×1:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2xz^2 \\ 2y \\ -2x^2 z \end{pmatrix}$$

ואלו $\Omega_{S/R}$ יהיה מודול־S החפשי עם היוצרים dX, dY, dZ והיחס היחיד

$$.(3x^2 - 2xz^2)dX + 2ydY - 2x^2 zdZ = 0$$

5.5 גבולות נְלוים ומְקומים

נבנה בסעיף זה כמה כלֵי עזר שיהפכו את הטפול במודולי הדיפרנציאליים יותר נוח.

משפטון 5.5.1 (שִנוי בסיס): *הבניה של דיפרנציאלים מתחלפת עם שנוי בסיס. במלים אחרות, יהיו R' ו S אלגבראות R. אזי קיָם משֻלש חִלופי*

$$\begin{tikzcd} & R' \otimes_R \Omega_{S/R} \arrow[dd, "\alpha"] \\ R' \otimes_R S \arrow[ur, "1\otimes d"] \arrow[dr, "d"'] & \\ & \Omega_{(R' \otimes_R S)/R'} \end{tikzcd} \tag{5}$$

הוכחה: נסמן $S' = R' \otimes_R S$. ההעתקה $1 \otimes d\colon R' \otimes_R S \to R' \otimes_R \Omega_{S/R}$ היא גזירת־R' של מודולי־S'. לכן קיָם הומומורפיזם יחיד α ההופך את המשֻלש (5) לחִלופי. מצד שני, ההעתקה המֻרכבת $S \to R' \otimes S \xrightarrow{d} \Omega_{S'/R'}$ המֻגדרת על ידי $s \mapsto d(1 \otimes s)$ היא גזירת־R של מודולֵי־S. לכן קיֶמת העתקה יחידה $\beta_0\colon \Omega_{S'/R'} \to \Omega_{S/R}$ כך ש $\beta_0(d'(1 \otimes s)) = ds$ לכל $s \in S$. אם נצרף את β_0 להעתקה הקנונית $\Omega_{S/R} \to R' \otimes_R \Omega_{S/R}$ נקבל הומומורפיזם $\beta\colon \Omega_{S'/R'} \to R' \otimes_R \Omega_{S/R}$ של מודולי־S.

מההגדרות עולה ש $\alpha \circ \beta(ds') = ds'$ לכל $s' \in S'$. לכן נובע מהיחידות בלמה 5.3.2 ש $\alpha \circ \beta$ הנה העתקת הזהות של $\Omega_{S'/R'}$. כמו כן נובע מההגדרות ש $(\beta \circ \alpha)(r' \otimes ds) = r' \otimes ds$ לכל $r' \in R'$ ו $s \in S$. הואיל ואברים אלו יוצרים את $R' \otimes_R \Omega_{S/R}$, אנו מקבלים ש $\beta \circ \alpha$ הנה העתקת הזהות של $R' \otimes_R \Omega_{S/R}$.

מכל זה עולה ש α הנו איזומורפיזם. ∎

נתבונן עתה במשפחה $\{S_i\}_{i \in I}$ של מודולי־R. **המכפלה הטנזורית המצֻמצמת שלהם** שנרשֹם אותה כ $\bigotimes_R S_i$ או $\bigotimes_{R,i} S_i$ או $\bigotimes_{R,i \in I} S_i$ הנה אלגברת־R הנוצרת על ידי האברים $\bigotimes_i s_i$ שבהם $s_i \in S_i$ לכל $i \in I$ ו $s_i = 0$ עבור כמעט כל i מודולו יחסי הלינאריות־R:

$$(rs_i + r's'_i) \otimes \bigotimes_{j \neq i} s_j = r(s_i \otimes \bigotimes_{j \neq i} s_j) + r'(s'_i \otimes \bigotimes_{j \neq i} s_j)$$

לכל $r, r' \in R$ ו $s_i \in S_i$.

כדי לפשט את הסימונים ננצל את החִלופיות של המכפלה הטנזורית ונרשֹם את הטנזורים בכל סדר שנמצא לנכון.

משפטון 5.5.2 (מכפלות טנזוריות): *אם $T = \bigotimes_R S_i$ היא מכפלה טנזורית מצֻמצמת של אלגבראות־R S_i, אזי*

$$\Omega_{T/R} \cong \bigoplus_i (T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R}) = \bigoplus_i \big((\bigotimes_{R, j\neq i} S_j) \otimes_R \Omega_{S_i/R} \big).$$

האיזומורפיזם ביחס זה מסֻמן ב α והוא מקיֵם

$$\alpha\big(d(s_i \otimes \bigotimes_{j\neq i} 1)\big) = ds_i \otimes \bigotimes_{j\neq i} 0 \tag{6}$$

לכל $I \in i$ ו $s_i \in S_i$.

הוכחה: השויון שב (6) מֻצדק על ידי הטִעון הבא:

$$\begin{aligned} T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} &= (\bigotimes_{R,j\neq i} S_j) \otimes_R (S_i \otimes_{S_i} \otimes \Omega_{S_i/R}) \\ &= (\bigotimes_{R,j\neq i} S_j) \otimes_R \Omega_{S_i/R} \end{aligned}$$

כדי לבנות את האיזומורפיזם α נתבונן בסכום הישר

$$T = \bigoplus_i \big((\bigotimes_{R,j\neq i} S_j) \otimes_R \Omega_{S_i/R} \big).$$

כל t ב T הנו סכום של מספר סופי של אברים מהצורה $\bigotimes_i s_i$ שבהם $s_i \in S_i$ וכמעט כֻּלם שוים לאפס. נובע מכאן שרק מספר סופי של ההעתקות

$$1 \otimes d_i \colon T = \bigoplus_i \big((\bigotimes_{R,j\neq i} S_j) \otimes_R \Omega_{S_i/R} \big) \to (\bigotimes_{j\neq i} S_j) \otimes_R \Omega_{S/R}$$

אינן מתאפסות על t. לכן הן מגדירות העתקה $e = \bigoplus_i 1 \otimes d_i \colon T \to \Omega$. הואיל וכל אחת מההעתקות $1 \otimes d_i$ הנה גזירת־R, אם e הנה גזירת־R. לכן קיָם הומומורפיזם־R $\alpha\colon \Omega_{T/R} \to \Omega$ המקיֵם

$$\alpha\big(d(\bigotimes_{R,i} s_i)\big) = e(\bigotimes_{R,i} s_i).$$

כדי להגדיר את ההעתקה ההפוכה ל α ההרכבה של ההעתקה הטבעית $S_i \to T$ עם $d\colon T \to \Omega_{T/R}$ הנה גזירת־R של מודול־S_i ולכן היא משרה הומומורפיזם יחיד $\Omega_{S_i/R} \to \Omega_{T/R}$ המעתיק את $d_i s_i$ ל $d(1 \otimes s_i)$, באשר 1 היא כאן אבר היחידה של $\bigotimes_{j\neq i} S_j$. הואיל והטוָח של הומומורפיזם זה הנו מודול־T, נִתן להרחיב העתקה זו להומומורפיזם $\beta_i\colon T \otimes_{S_i} \Omega_{S_i/R} \to \Omega_{T/R}$ שיְקַיֵם $\beta_i(1 \otimes d_i s_i) = d(1 \otimes s_i)$ לכל $s_i \in S_i$. סכום ה β_i־ים נותן הומומורפיזם $\beta\colon \Omega \to \Omega_{T/R}$ של מודולי־T.

כדי להוכיח ש $\beta \circ \alpha$ הנה העתקת הזהות של $\Omega_{T/R}$ מספיק להוכיח ש $\beta(\alpha(dt)) = dt$ לכל $t \in T$ (כי האברים dt יוצרים את $\Omega_{T/R}$ מעל T). מֻסחת לייבניץ נובע שכבר האברים $d(1 \otimes s_i)$ יוצרים את $\Omega_{T/R}$. עבורם מתקיֵם $\beta(\alpha(d(1 \otimes s_i))) = \beta(1 \otimes d_i s_i) = \beta_i(1 \otimes d_i s_i) = d(1 \otimes s_i)$ להפך, האברים $1 \otimes d_i s_i$ יוצרים את Ω ועבורם $\alpha(\beta(1 \otimes d_i s_i)) = \alpha(d(1 \otimes s_i)) = 1 \otimes d_i s_i$, כנדרש. ∎

המשמעות בגאומטריה אלגברית של משפטון $5.5.2$ עבור מכפלה טנזורית של שני חוגים היא שהמרחב המשיק לנקֻדה פשוטה של מכפלה ישרה של שתי יריעות אלגבריות הוא הסכום הישר של המרחבים המשיקים למרכיבֵי הנקֻדה על שתי היְריעות.

אם נצא מן המקרה הפרטי של משפטון $5.3.4$ שבו $S = R[X]$ שאותו נִתן לוַדא באֹפן ישיר, נקבל שמשפטון $5.3.4$ הוא מקרה פרטי של משפטון $5.5.2$ עבור החוגים $R[X_i]$. התוצאה הבאה הנה הכללה של משפטון $5.3.4$:

תוצאה $5.5.3$: *אם $T = S[X_1, \ldots, X_r]$ הנו חוג הפולינומים מעל החוג S שהוא אלגברת־R, אזי*

$$\Omega_{T/R} \cong (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus \big(\bigoplus_{i=1}^{r} T dX_i\big)$$

הוכחה: *נסמן $T' = R[X_1, \ldots, X_n]$ ונשתמש בזהות $T = T' \otimes_R S$, במשפטון $5.5.2$ ובמשפטון $5.3.4$ כְּדֵי לקבל*

$$\begin{aligned}
\Omega_{T/R} &\cong (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus (T \otimes_{T'} \Omega_{T'/R}) \\
&\cong (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus (T \otimes_{T'} \bigoplus_{i=1}^{r} T' dX_i) \\
&\cong (T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus \big(\bigoplus_{i=1}^{r} T dX_i\big)
\end{aligned}$$

כמבֻקש. ∎

תוצאה $5.5.4$: *יהיו $\psi, \psi' \colon S_1 \to S_2$ שני הומומורפיזמים של אלגבראות־R, $I = \sum_{s_1 \in S_1} S_2(\psi(s_1) - \psi'(s_1))$* **המַשׁוֶה הנִלוה** *של הזוג (ψ, ψ') ו $T = S_2/I$. אזי הסִדרה הבאה של מודולי־T הנה מדֻיקת:*

$$T \otimes_{S_1} \Omega_{S_1/R} \xrightarrow{T \otimes D\psi - T \otimes D\psi'} T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R} \longrightarrow \Omega_{T/R} \longrightarrow 0 \qquad (7)$$

בסִדרה זו $D\psi$ מעתיק את ds_1 ל $d(\psi(s_1))$, ההעתקה $D\psi'$ מֻגדרת באפן דומה.

הוכחה: הסִדרה המדֻיקת הקצרה $0 \to I \to S_2 \to T \to 0$ גוררת, לפי משפטון $5.3.7$, ש $\Omega_{T/R}$ הנו המודול $T \otimes_{S_2} \Omega_{S_2/R}$ מודולו תת המודול הנוצר על ידי כל האברים מהצורה $d(\psi(s_1) - \psi'(s_1))$. תת מודול זה אינו אלא התמונה של ההומומורפיזם $T \otimes D\psi - T \otimes D\psi'$. מכאן שהסדרה (7) מדֻיקת. ∎

משפטון 5.5.5 (מְקומים): *תהיינה S אלגברת־R ו U תת קבוצה כפלית של S.*

(א) *קיָם איזומורפיזם טבעי $\Omega_{S[U^{-1}]/R} \cong S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ שבו מזהים את $d\left(\frac{1}{u}\right)$ עם $-\frac{du}{u^2}$.*

(ב) *אם $S = R[x_i]_{i\in I}$, אזי $\Omega_{S[U^{-1}]/R} = \sum_{i\in I} S[U^{-1}]dx_i$.*

(ג) *אם $F = K(x_i)_{i\in I}$ הם שדות, אזי dx_i, $i \in I$, יוצרים את המרחב הוקטורי $\Omega_{F/K}$ מכל F.*

הוכחת א: נגדיר העתקה $d'\colon S[U^{-1}] \to S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ על ידי $d'\left(\frac{s}{u}\right) = \frac{1}{u^2} \otimes (sdu - uds)$. אם u' הוא אבר נוסף של U, אזי

$$d'\left(\frac{su'}{uu'}\right) = \frac{1}{u^2(u')^2} \otimes (su'd(uu') - uu'd(su'))$$
$$= \frac{1}{u^2(u')^2} \otimes (s(u')^2du + suu'du' - suu'du' - u(u')^2ds = d\left(\frac{s}{u}\right)$$

חִשוב ישיר מראה ש d' הנה גזירת־R. לכן, קיָם הומומורפיזם $\alpha\colon \Omega_{S[U^{-1}]/R} \to S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R}$ כך ש $\alpha(d\left(\frac{s}{u}\right)) = d'\left(\frac{s}{u}\right)$.

בכִוון הֶהפוך, הרכבת ההעְתקות $S \to S[U^{-1}] \xrightarrow{d} \Omega_{S[U^{-1}]/R}$ הנה גזירת־R של מודולי־S ולכן מגדירה הומומורפיזם־S $\Omega_{S/R} \to \Omega_{S[U^{-1}]/R}$ הנִתן להרחבה להומומורפיזם־$S[U^{-1}]$

$$\beta\colon S[U^{-1}] \otimes_S \Omega_{S/R} \to \Omega_{S[U^{-1}]/R}$$

המקיֵם $\beta\left(\frac{s}{u} \otimes d\left(\frac{s'}{u'}\right)\right) = \frac{s}{u}d\left(\frac{s'}{u'}\right)$. בדיקה מראה ש α ו β הפוכים זה לזה ולכן הם איזומורפיזמים.

הוכחת ב: לפי למה 5.3.3 יוצרים הדיפרנציאלים dx_i, $i \in I$, את $\Omega_{S/R}$ כמודול־S. לכן, לפי חלק א, הם יוצרים את $\Omega_{S[U^{-1}]/R}$ כמודול־$S[U^{-1}]$.

הוכחת ג: נסמן $S = K[x_i]_{i\in I}$ ו $U = S \setminus \{0\}$. אזי $F = S[U^{-1}]$. טענה ג היא אפוא מקרה פרטי של טענה ב. ∎

משפטון 5.5.6 (מכפלות ישרות): *יהיו $S_1, \ldots, S_n$ אלגבראות־R ו $S = \prod_{i=1}^n S_i$. אזי, $\Omega_{S/R} = \prod_{i=1}^n \Omega_{S_i/R}$.*

הוכחה: נסמן ב $d\colon S \to \Omega_{S/R}$ וב $d_i\colon S_i \to \Omega_{S_i/R}$ את הגזירות האוניברסלית ויהי $\Omega = \prod_{i=1}^n \Omega_{S_i/R}$. אזי $D = \prod_{i=1}^n d_i\colon S \to \Omega$ הנה גזירת־R ולכן מגדירה הומומורפיזם $\alpha\colon \Omega_{s/R} \to \Omega$ כך ש $\alpha \circ d = D$. להפך, לכל i ההרכבה $S_i \to S \xrightarrow{d} \Omega_{S/R}$ הנה גזירת־R של מודולי־S_i ולכן מגדירה הומומורפיזם $\beta_i\colon \Omega_{S_i/R} \to \Omega_{S/R}$ המקיֵם $\beta_i(d_i s_i) = ds_i$. אֹסף ה β_i־ים מגדיר הומומורפיזם $\beta\colon \Omega \to \Omega_{S/R}$. בדיקה מראה ש α ו β הפוכים זה לזה ולכן מהוים איזומורפיזמים. ∎

5.6 מורפיזמים זערוריים

ההבדל בין שני הומומרפיזמים־R של אלגבראות R בדרך כלל אינו הומומורפיזם־R. אולם אם הם שוים זה לזה מודולו אידאל שרבועו אפס, אזי הבדלם הוא גזירת־R.

משפטון 5.6.1: *יהי $\varphi\colon S \to S'$ הומומורפיזם של אלגבראות־R ותהי $\delta\colon S \to S'$ העתקה חבורית כך ש $\delta(S)^2 = 0$. אזי $\varphi + \delta$ הוא הומומורפיזם של אלגבראות־R אם ורק אם δ הוא גזירת־R של S, כלומר $\delta(s_1s_2) = \varphi(s_1)\delta(s_2) + \varphi(s_2)\delta(s_1)$.*

הוכחה: נצא משתי הזהויות

$$(\varphi+\delta)(s_1s_2) = \varphi(s_1s_2) + \delta(s_1s_2)$$

$$(\varphi+\delta)(s_1)(\varphi+\delta)(s_2) = \varphi(s_1s_2) + \varphi(s_1)\delta(s_2) + \varphi(s_2)\delta(s_1)$$

אשר השניה מביניהן התקבלה מההנחה $\delta(s_1)\delta(s_2) = 0$ עבור $s_1, s_2 \in S$. האֲגפים השמאליים שוים זה לזה אם ורק אם $\delta(s_1s_2) = \varphi(s_1)\delta(s_2) + \varphi(s_2)\delta(s_1)$, כלומר, אם רק אם δ היא גזירת־R של S_2. ∎

נאמר שההעתקה $\alpha\colon A \to B$ של קבוצות **מתפצלת משמאל** אם קיֶמת העתקה $\alpha'\colon B \to A$ כך ש $\alpha' \circ \alpha = \mathrm{id}_A$. בפרט α חד חד ערכית ואלו α' היא על. נאמר ש α **מתפצלת מִימין** אם קיֶמת העתקה $\alpha'\colon B \to A$ כך ש $\alpha \circ \alpha' = \mathrm{id}_B$. בפרט α' חד חד ערכית ואלו α היא על.

משפטון 5.6.2: *יהי $\pi\colon S \to T$ אפימורפיזם־R של אלגבראות ויהי $I = \mathrm{Ker}(\pi)$. נתבונן בשתי הסדרות המדֻיקות ש π משרה:*

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow S/I^2 \xrightarrow{\bar\pi} T \longrightarrow 0$$

$$I/I^2 \xrightarrow{d} T \otimes_S \Omega_{S/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0$$

אזי d מתפצלת משמאל כהומומורפיזם של אלגבראות־T אם ורק אם $\bar\pi$ היא מתפצלת מימין כהומומורפיזם של של אלגבראות־S.

הוכחה: נחלק את ההוכחה לשלשה חלקים.

חלק א: *העמדה על המקרה שבו $I^2 = 0$.* הסִדרה המדֻיקת הבסיסית השניה המתאימה לאפימורפיזם $S \to S/I^2$ הנה

$$I^2/I^4 \to S/I^2 \otimes_S \Omega_{S/R} \xrightarrow{D} \Omega_{(S/I^2)/R} \to 0$$

(משפטון 5.3.7). היא נותנת את השויון

$$\Omega_{(S/I^2)/R} = \Omega_{S/R}/(I^2\Omega_{S/R} + d(I^2))$$

מנֻסחת לייבניץ לגזירה נובע ש $d(I^2) \subseteq I\Omega_{S/R}$. לכן,

$$\begin{aligned}
T\otimes_S \Omega_{(S/I^2)/R} &= S/I\otimes_S \Omega_{(S/I^2)/R}\\
&= \Omega_{(S/I^2)/R}/I\Omega_{S/I^2)/R}\\
&= \big(\Omega_{S/R}/(I^2\Omega_{S/R}+d(I^2))\big)\big/\big(I\Omega_{S/R}/I^2\Omega_{S/R}+d(I^2)\big)\\
&= \Omega_{S/R}/I\Omega_{S/R} = S/I\otimes_S\Omega_{S/R} = T\otimes_S\Omega_{S/R}
\end{aligned}$$

אם נצרף לשויונות (=איזומורפיזמים טבעיים) אלו את השויון $T=(S/I^2)/(I/I^2)$ נוכל להחליף את S ב S/I^2 כדי להניח בלי הגבלת הכלליות ש $I^2=0$. תחת ההנחה הזו הסדרות המדֻיקות המופיעות במשפט מקבלות את הצורה הפשוטה יותר:

$$\begin{gathered}
0 \longrightarrow I \longrightarrow S \xrightarrow{\pi} T \longrightarrow 0\\
I \xrightarrow{d} T\otimes_S\Omega_{S/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{T/R} \longrightarrow 0
\end{gathered}$$

כדי למנוע בלבול נסמן ב $d'\colon S\to\Omega_{S/R}$ את הגזירה הכוללת.

חלק ב: *יהי* $\sigma\colon T\otimes_S\Omega_{S/R}\to I$ *הומומורפיזם המקיֵם* $\sigma\circ d=\mathrm{id}_I$. יהי

$$\gamma\colon \Omega_{S/R}=S\otimes_S\Omega_{S/R}\to T\otimes_S\Omega_{S/R}$$

ההומומורפיזם $\pi\otimes 1$. אזי d הנו הצמצום של $\gamma\circ d'$ ל I. אזי $\delta=\sigma\circ\gamma\circ d'\colon S\to I\subseteq S$ היא גזירת־R.

$$\begin{tikzcd}
 & S \arrow[r, "d'"] \arrow[d, shift right, "\delta"'] & S\otimes_S\Omega_{S/R} \arrow[d, "\gamma"] & & \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r, shift left, "d"] \arrow[u, shift right] & T\otimes_S\Omega_{S/R} \arrow[r, "D\pi"] \arrow[l, shift left, "\sigma"] & \Omega_{T/R} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

לפי משפטון 5.6.1, $\mathrm{id}_S-\delta\colon S\to S$ הוא הומומורפיזם־R של אלגבראות. לכל $i\in I$ מתקיֵם $\sigma(di)=i$, לכן $\delta(i)=\sigma(\gamma(d'(i)))=\sigma(d(i))=i$ ומכאן ש $(\mathrm{id}_S-\delta)(I)=0$. לכן $\mathrm{id}_S-\delta$ משרה הומומורפיזם של אלגבראות $\tau\colon T\to S$. הואיל ו $\pi(\delta(s))=0$ (כי $\delta(s)\in I$) עבור $s\in S$, נקבל ש $\pi\circ\tau(s+I)=\pi(s-\delta(s))=s+I-\pi(\delta(s))=s+I$ כלומר $\pi\circ\tau=\mathrm{id}_T$, כנדרש.

חלק ג: *יהי* $\tau\colon T\to S$ *הומומורפיזם המקיֵם* $\pi\circ\tau=\mathrm{id}_T$. אזי ההעתקה $\delta=\mathrm{id}_S-\tau\circ\pi\colon S\to S$ מקיֶמת $\pi(\delta(s))=\pi(s-\tau\pi(s)))=\pi(s)-\pi(\tau(\pi(s)))=\pi(s)-\pi(s)=0$ לכל $s\in S$ ולכן $\delta(S)\subseteq I$. בתור הפרש של שני הומומורפיזמים (לתוך S), δ היא גזירת־R לתוך I (משפטון 5.6.1). לכן, משרה δ הומומורפיזם־R $\sigma'\colon\Omega_{S/R}\to I$ של אלגבראות־S כך ש $\delta=\sigma'\circ d'$. לכל $i\in I$ ו $s\in S$ העתקה זו מקיֶמת

$\sigma'(ids)=\sigma'(i)\sigma'(ds)=\sigma'(i)\delta(i)=0$ כי $\sigma'(i)\delta(i)\in I^2=0$. לכן σ' מתאפסת על $I\Omega_{S/R}$ ולכן σ' מתפצלת דרך $\Omega_{S/R}/I\Omega_{S/R}=T\otimes_S\Omega_{S/R}$. במלים אחרות, קיָם הומומורפיזם $\sigma\colon T\otimes_S\Omega_{S/R}$ ההופך את התרשים הבא לחִלופי:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_{S/R} \arrow[r] \arrow[dr, "\sigma'"] & T\otimes_S\Omega_{S/R} \arrow[d, "\sigma"] \\
S \arrow[u, "d'"] \arrow[r, "\delta"] & I
\end{tikzcd}$$

הואיל ו $\pi(i)=0$ לכל $i\in I$, ההעתקה σ מקיֶמת $\sigma(di)=\sigma(d'i)=\delta(i)=i-\tau(\pi(i))=i$ ולכן, $\sigma\circ d=\mathrm{id}_I$, כנדרש. ∎

יהי $(R,\mathfrak{m})$ חוג מקומי. תת שדה L של R נקרא **שדה מקדמים** של החוג, אם העתקת המנה $R\to R/\mathfrak{m}$ מעתיקה את L באפן איזומורפי על $R/\mathfrak{m}$.

תוצאה 5.6.3: *יהי $(R,\mathfrak{m})$ חוג מקומי המקיף שדה K ותהי ההעתקה המֻשרית $d\colon \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\to(R/\mathfrak{m})\otimes_R\Omega_{R/K}$ על ידי הגזירה הכוללת $R\to\Omega_{R/K}$.*

(א) *ההעתקה d חד חד ערכית אם ורק אם קיָם לחוג המקומי $(R/\mathfrak{m}^2,\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ שדה מקדמים המקיף את K.*

(ב) *אם $R/\mathfrak{m}$ פריד מעל K, אזי d חד חד ערכית.*

הוכחת א: הסדרות המדֻיקות של משפטון 5.6.2 מקבלות במקרה שלנו את הצורה

$$0\longrightarrow\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\longrightarrow R/\mathfrak{m}^2\xrightarrow{\pi}R/\mathfrak{m}\longrightarrow 0$$

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\xrightarrow{d}(R/\mathfrak{m})\otimes_K\Omega_{R/K}\xrightarrow{D\pi}\Omega_{(R/\mathfrak{m})/K}\longrightarrow 0$$

את ההעתקה d אנו רואים כהעתקה לינארית של מרחבים וקטוריים מעל השדה $R/\mathfrak{m}$. אם היא חד חד ערכית, אזי היא מתפצלת משמאל. לכן, לפי משפטון 5.6.2 ההעתקה π של מודולי־$R/\mathfrak{m}^2$ מתפצלת מימין. במלים אחרות, קיָם מונומורפיזם $\pi'\colon R/\mathfrak{m}\to R/\mathfrak{m}^2$ כך ש $\pi\circ\pi'=\mathrm{id}_{R/\mathfrak{m}}$. התמונה L של π' תהיה שדה מקדמים של $R/\mathfrak{m}^2$. יתר על כן L יקיף את K, כי $\pi'(k+\mathfrak{m})=k\pi'(1+\mathfrak{m})=k+\mathfrak{m}^2$ לכל $k\in K$ ואנו מזהים את k עם $k+\mathfrak{m}$ (בתוך $R/\mathfrak{m}$) ועם $k+\mathfrak{m}^2$ (בתוך $R/\mathfrak{m}^2$).

להפך, נניח שקיָם ל $R/\mathfrak{m}^2$ תת שדה L המקיף את K אשר π מעתיק באפן חד חד ערכי על $R/\mathfrak{m}$. לכן, π מתפצל מימין כהומומורפיזם של מודולי־$R/\mathfrak{m}^2$. לפי משפטון , ההעתקה d מתפצלת משמאל ולכן היא חד חד ערכית.

הוכחת ב: מההנחה על R נובע שהחוג המקומי $R/\mathfrak{m}^2$ נטרי. יתר על כן, כל סדרת קושי בו מתכנסת ולכן הוא מֻשלם. לפי משפט 7.8 של [Eis], יש ל $R/\mathfrak{m}^2$ שדה מקדמים (למרות שהמשפט הנ"ל דורש שהחוג יהיה נטרי, אין הוכחתו משתמשת בהנחה זו). לכן, לפי (א), d חד חד ערכי.

∎

אם F/K הנה הרחבת שדות, אזי $\Omega_{F/K}$ הנו מרחב וקטורי מעל F. הואיל ו $\Omega_{F/K}$ נוצר על ידי אברים dx שבהם $x \in F$, קַיָם ל $\Omega_{F/K}$ בסיס המֻרכב מאברים כאלו. נאמר שאסף $\{x_i\}_{i\in I}$ מהוה **בסיס דיפרציאלי** אם $\{dx_i\}_{i\in I}$ מהוה בסיס ל $\Omega_{F/K}$ כמרחב וקטורי מעל F.

דֻגמה 5.7.1: יהיו $R = K[X_i]_{i\in I}$ ו $F = K(X_i)_{i\in I}$ חוג הפולינומים ושדה הפונקציות הרציונליות בהתאמה במשתנים X_i מעל השדה K. לפי משפטון 5.5.5 ומשפטון 5.3.3

$$\Omega_{R/K} = \bigoplus_{i\in I} \bigotimes_{K,j\neq i} K[X_j] \otimes_K K[X_i]dX_i = \bigoplus_{i\in I} RdX_i$$

לכן, לפי משפטון המִקומים 5.5.5,

$$\Omega_{F/K} = F \otimes_R \Omega_{F/K} = \bigoplus_{i\in I} F \otimes_R RdX_i = \bigoplus_{i\in I} FdX_i$$

במִלים אחרות, הקבוצה $\{X_i\}_{i\in I}$ מהוה בסיס דיפרנציאלים עבור F/K. ∎

תת קבוצה $\{t_j\}_{j\in J}$ של F נקראת **בסיס נֳעֲלות** עבור F/K אם היא אינה תלויה אלגברית מעל K ואם $F/K(t_j)_{j\in J}$ היא הרחבה אלגברית. תת קבוצה $\{x_i\}_{i\in I}$ של F נקראת **בסיס־**p עבור F/K אם היא מהוה קבוצת יוצרים מזערית עבור F כאלגברת־KF^p.

נראה שבאפיון 0, המושג של בסיס דיפרנציאלים מתלכד עם המושג של בסיס נעלות ואִלו באפיון p הוא מתלכד עם המושג של בסיס־p.

למה 5.7.2: *יהי R חוג, K שדה המקיף את R ו L הרחבה אלגברית פרידה של K. אזי* $\Omega_{L/R} = L \otimes_S \Omega_{K/R}$.

הוכחה: הואיל ושני ההעתקונים $\Omega_{T/S}$ ו $T \otimes_S \cdot$ מתחלפים עם סכומים ישרים (??), נתן להניח ש L היא הרחבה פרידה סופית של K. יהי z אבר קדום של L/K ויהי $f = \mathrm{irr}(z, K)$. אזי, $L = K[X]/K[X]f(X)$. הסִדרה המדֻיקת השניה (משפטון 5.3.7, מקבלת אפוא את הצורה

$$K[X]f(X)/K[X]f(X)^2 \xrightarrow{d} L \otimes_{K[X]} \Omega_{K[X]/R} \xrightarrow{D} \Omega_{L/R}$$

באשר $D(g(x) \otimes d(h(X))) = g(x)d(h(x))$. לפי תוצאה 5.5.3,

$$\Omega_{K[X]/R} \cong (K[X] \otimes_K \Omega_{K/R}) \oplus K[X]dX$$

לכן,

$$L \otimes_{K[X]} \Omega_{K[X]/R} \cong (L \otimes_K \Omega_{K/R}) \oplus LdX. \qquad (7)$$

ההעתקה D שומרת על המחֻבר הראשון באגף ימין בעוד שהמחֻבר השני עובר ל Ldx. נרשׂם עתה $f(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ עם $a_i \in K$. נסמן $(df)(X) = \sum_{i=0}^n (da_i) X^i$. מהשויון $f(x) = 0$ נובע ש $(df)(x) + f'(x)dx = 0$. מהפרידות של $f(X)$ נובע ש $f'(x) \neq 0$, לכן,

$$.dx = -\frac{1}{f'(x)}(df)(x) \in L \otimes_K \Omega_{K/R}$$

הפעלת D על (7) נותנת אפוא ש $\Omega_{L/R} = L \otimes_S \Omega_{K/R}$. ∎

למה 5.7.3: *תהי F/K הרחבת שדות ו $\{x_i\}_{i \in I}$ תת קבוצה של F. אזי $\{dx_i\}_{i \in I}$ הנו בסיס של $\Omega_{F/K}$ כמרחב וקטורי מעל F אם ורק אם*

(א) $\mathrm{char}(K) = 0$ ו $\{x_i\}_{i \in I}$ הנו בסיס נעלות של F/K, או

(ב) $\mathrm{char}(K) = p \neq 0$ ו $\{x_i\}_{i \in I}$ הנו בסיס־p של F/K.

הוכחה: נפריד בין שני המקרים.

מקרה א: $\mathrm{char}(K) = 0$.

נניח קודם ש $\{x_i\}_{i \in I}$ בסיס נעלות של F/K. לכן F הנו הרחבה אלגברית (פרידה) של $E = K(x_i)_{i \in I}$. לפי דֻגמה 5.7.1, $\{dx_i\}_{i \in I}$ מהוה בסיס של $\Omega_{E/K}$ כמרחב וקטורי מעל E. לפי למה 5.7.3, $\Omega_{F/K} = F \otimes_K \Omega_{E/K}$. לכן, $\{dx_i\}_{i \in I}$ מהוֶה בסיס של $\Omega_{F/K}$ כמרחב וקטורי מעל F.

להפך, נניח ש $\{dx_i\}_{i \in I}$ הנו בסיס של $\Omega_{F/K}$. נסמן $E = K(x_i)_{i \in I}$. הסדרה המדֻיקת הראשונה המתאימה להרחבות השדות $K \to E \to F$ תהיה $F \otimes_E \Omega_{E/K} \xrightarrow{D} \Omega_{F/K} \to \Omega_{F/E} \to 0$. באשר $D(1 \otimes dx_i) = dx_i$ לכל $i \in I$. הואיל והאברים dx_i של $\Omega_{F/K}$ יוצרים מרחב זה מעל F מקבלים ש $\Omega_{F/E} = 0$. מכאן נובע, לפי הפסקה הקודמת ש F הנה הרחבה אלגברית של E.

נותר לנו אפוא להראות ש $\{x_i\}_{i \in I}$ הנו בסיס נעלות עבור F/K. נניח בשלילה שאין הדבר כך ולמשל $0 \in I$ ו x_0 אלגברי מעל $E_0 = K(x_i)_{i \neq 0}$. כמו בהוכחת למה 5.7.2, ינבע בכך ש dx_0 שיָך למרחב הוקטורי הנוצר מעל F על ידי האברים dx_i, $i \neq 0$, בסתירה לאי התלות של האברים dx_i, $i \in I$.

מקרה ב: $\mathrm{char}(K) = p$. מהזהות $d(x^p) = px^{p-1}dx = 0$ עבור $x \in F$ נובע שכל גזירה של F/K מתאפסת על KF^p. לכן, $\Omega_{F/K} = \Omega_{F/KF^p}$. נחליף אפוא את K ב KF^p כדי להניח ש $K \subseteq F^p$. בסיס־p עבור F/K יהיה קבוצת יוצרים מזערית ל F כאלגברת־K.

תחת ההנחה שבפסקה הקודמת נניח ש $\{x_i\}_{i \in I}$ הנו בסיס־p עבור F/K. אזי $\Omega_{F/K}$ נוצר על ידי האברים dx_i, $i \in I$ (למה 5.3.3). נניח בשלילה ש $\Omega_{F/K}$ נוצר על ידי כל ה dx_i־ים פרט ל dx_0. נסמן $F_0 = K(x_i)_{i \neq 0}$. אזי, הסדרה המדֻיקת הראשונה המתאימה להרחבת השדות $K \to F_0 \to F$ מקבלת את הצורה

$$F \otimes_{F_0} \Omega_{F_0/K} \to \Omega_{F/K} \to \Omega_{F/F_0} \to 0 \qquad (8)$$

הואיל ועבור $i \neq 0$,dx_i מגיע ל $\Omega_{F/K}$ מ $\Omega_{F_0/K}$ ומשם עובר ל 0 ב Ω_{F/F_0}, מקבלים מהדיוק של (8) ש $\Omega_{F/F_0} = 0$. מצד שני נובע מההנחה ש $K \subseteq F^p$ ש $y = x_0^p \in F_0$ ולכן $F = F_0[X]/F_0[X](X^p - y)$. הסִדרה המדֻיקת השניה המתאימה תהיה

$$F_0[X]/(X^p - y)/F_0[X](X^p - y)^2 \xrightarrow{d} F \otimes_{F_0} \Omega_{F_0[X]/F_0} \xrightarrow{D} \Omega_{F/F_0} \to 0 \qquad (9)$$

האבר האמצעי של (9) יהיה FdX (לפי ??). אותו צריך לחלק ב $d(X^p - y)$ כדי לקבל את Ω_{F/F_0}. אולם $d(X^p - y) = pX^{p-1} = 0$. לכן, $\Omega_{F/F_0} = Fdx \neq 0$, בסתירה למסקנה דלעיל. מסתירה זו נובע שהאברים dx_i, $i \in I$ מהוים בסיס עבור $\Omega_{F/K}$.

עתה נניח ש $K \subseteq F^p$ וש $\{dx_i\}_{i\in I}$ מהוה בסיס ל $\Omega_{F/K}$ כמרחב וקטורי מעל F. נסמן $E = K(x_i)_{i\in I}$. כמו במקרה א נובע מהדיוק של הסדרה $F \otimes_E \Omega_{E/K} \xrightarrow{D} \Omega_{F/K} \to \Omega_{F/E} \to 0$ ומכך שהאברים dx_i יוצרים את $\Omega_{F/K}$ מעל F ש $\Omega_{F/E} = 0$. מאידך, אִלו היתה F הרחבה נאותה של E, היינו יכוליםלבחֹר לה בסיס־p $\{y_j\})_{j\in J}$ עם קבוצת ציונים J לא ריקה. כמו בפסקה הקודמת היה נובע שהאברים dy_j, $j \in J$ של $\Omega_{F/E}$ אינם תלויים לינארית, בסתירה לכך ש $\Omega_{F/E} = 0$. מסתירה זו נובע ש $F = E$.

נותר לנו להוכיח ש $\{x_i\}_{i\in I}$ היא קבוצת יוצרים מזערית ל F כאלגברת־K. אִלו לא היה הדבר כך, היה קים x_0 בקבוצה זו שהיה שיָך לאלגברת־K הנוצרת על ידי ה x_i־ים האחרים. ואז dx_0 היה שיך לתת המרחב מעל F הנוצר על ידי $\{dx_i\}_{i\neq 0}$, בסתירה לאי התלות הלינארית של dx_i, $i \in I$. ∎

תהי F/K הרחבה של שדות בעלי אפיון חיובי p. תת קבוצה $\{x_i\}_{i\in I}$ נקראת **בסיס נעלות מפריד** עבור ההרחבה F/K אם $\{x_i\}_{i\in I}$ אינה תלויה אלגברית ואם F הנו הרחבה אלגברית פרידה של $K(x_i)_{i\in I}$.

יהיו E ו F שדות המקיפים שדה K ומוכלים בשדה משֻתף. נאמר ש E **מֻפרד לינארית** (linearly disjoint) אם כל $x_1, \ldots, x_n$ ב E שאינם תלויים לינארית מעל K נשארים לא תלויים לינארית גם מעל F. לחִלופין, ההעתקה $E \otimes_K F \to E[F]$ המעתיקה את $x \otimes y$ ל xy חד חד ערכית. במקרה זה גם F מֻפרדת לינארית מ E מעל K. למֻפרדות לינארית יש **תכונת המגדל:** יהי K' שדה בין K ל E. אזי E מֻפרד לינארית מ F מעל K אם ורק אם K' מֻפרד לינארית מ F מעל K ו E מֻפרד לינארית מ $K'F$ מעל K' [FrJ, §2.5].

ההרחבה F/K מכֻנה **פרידה** אם F מֻפרדת לינארית מהשדה $K^{1/p}$ מעל K, לחלופין מכל אחד מהשדות K^{1/p^n} מעל K, לחלופי חלופין מהשדה K_{ins} שהוא האחוד של כל השדות K^{1/p^n}. אם F/K נוצרת סופית, אזי F/K פרידה אם ורק אם יש לה בסיס נעלות מפריד. השקילויות האלו הנן משפט של Maclane. ראה למשל [Lan, p. 53, Thm. 1].

למה 5.7.4: *תהי F/K הרחבת שדות בעלי אפיון חיובי p פרידה ו B בסיס־p של F/K. אזי אברי B אינם תלויים אלגברית מעל השדה K.*

הוכחה: נסמן ב M את קבוצת המונומים $x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}$ שבהם $x_1,\dots,x_n\in B$ שונים זה מזה ו $0\le j_1,\dots,j_n<p$. מההנחה ש B היא קבוצת יוצרים מזערית של F כאלגברה מעל KF^p נובע ש M אינה תלויה לינארית מעל K. הואיל וההרחבה F/K פרידה, F מֻפרד לינארית מ $K_{\rm ins}$ מעל K. לכן, לפי תכונת המגדל, F מֻפרד לינארית מ $F_pK_{\rm ins}$ מעל KF^p. לכן, M אינה תלויה לינארית מעל $F^pK_{\rm ins}$. מכאן ש B הוא גם בסיס־p עבור ההרחבה $FK_{\rm ins}/K_{\rm ins}$. בלי הגבלת הכלליות נוכל להחליף אפוא את K ב $K_{\rm ins}$ כדי להניח ש K מְשֻׁכלל, כלומר $a^{1/p}\in K$ לכל $a\in K$.

נניח עתה בשלילה שקַיָּמים $x_1,\dots,x_n\in B$ שונים זה מזה, קַיֶּמת קבוצה סופית לא ריקה I של n־יות של מספרים שלמים אי שליליים ולכל $\mathbf{i}\in I$ קַיָּם $a_\mathbf{i}\in K^\times$ כך ש

$$\sum_{\mathbf{i}\in I}a_\mathbf{i}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}=0\,. \tag{9.5}$$

נסדר את קבוצת ה n־יות של המספרים האי שליליים באֹפן מִלוני ונניח גם ש I אבר מזערי תחת סדר זה. כמו כן נסמן $J=\{\mathbf{j}\in I\mid 0\le j_1,\dots,j_n<p\}$. עתה נשתמש במשפט החִלוק עם שארית כדי לרשֹם

$$i_1=j_{\mathbf{i},1}+k_{\mathbf{i}1}p,\dots,i_n=j_{\mathbf{i},n}+k_{\mathbf{i},n}p$$

באשר $(j_{\mathbf{i},1},\dots,j_{\mathbf{i},n})\in J$. לכל $\mathbf{j}\in J$ נסמן $I_\mathbf{j}=\{\mathbf{i}\in I\mid(j_{\mathbf{i},1},\dots,j_{\mathbf{i},n})=(j_1,\dots,j_n)\}$. בסימונים אלו נוכל לרשֹם את (9.5) מחדש בצורה

$$\sum_{\mathbf{j}\in J}\Big(\sum_{\mathbf{i}\in I_\mathbf{j}}a_\mathbf{i}x_1^{k_{\mathbf{i},1}p}\cdots x_n^{k_{\mathbf{i},n}p}\Big)x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}=0\,. \tag{9.6}$$

האברים בסוגרים של אגף שמאל של (9.6) שַׁיָּכים ל KF^p ואלו המונומים $x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}$ הם אברים שונים זה מזה של M ולכן אינם תלויים לינארית מעל KF^p. לכן,

$$\sum_{\mathbf{i}\in I_\mathbf{j}}a_\mathbf{i}x_1^{k_{\mathbf{i},1}p}\cdots x_n^{k_{\mathbf{i},n}p}=0 \tag{9.7}$$

לכל $\mathbf{j}\in J$. הואיל ולפי הנחתנו K מְשֻׁכלל, נוכל להוציא שֹרש p־י משני האגפים של (9.7) ולקבל

$$\sum_{\mathbf{i}\in I_\mathbf{j}}a_\mathbf{i}^{1/p}x_1^{k_{\mathbf{i},1}}\cdots x_n^{k_{\mathbf{i},n}}=0$$

אם $\mathbf{i},\mathbf{i}'$ הן שתי n־יות שונות ב $I_\mathbf{j}$, אזי $(k_{\mathbf{i},1},\dots,k_{\mathbf{i},n})\ne(k_{\mathbf{i}',1},\dots,k_{\mathbf{i}',n})$. לכן, מהמזעריות של I נובע ש $a_\mathbf{i}^{1/p}=0$ ולכן $a_\mathbf{i}=0$ לכל $\mathbf{i}\in I_\mathbf{j}$, בסתירה להנחה. ∎

משפטון 5.7.5: *תהי F/K הרחבה של שדות בעלי אפיון חיובי p.*

(א) *כל בסיס נעלות מפריד של F/K הוא גם בסיס־p עבור F/K.*

(ב) *אם ההרחבה F/K נוצרת סופית ו B הוא בסיס־p עבור F/K, אזי $F/K(B)$ היא הרחבה פרידה סופית. בפרט נִתן לבחר בסיס נעלות של F/K שיהיה מוכל ב B.*

(ג) *אם ההרחבה F/K נוצרת סופית פרידה ו B הוא בסיס p עבור F/K, אזי B הוא בסיס נעלות מפריד של F/K.*

הוכחת א: יהי B בסיס נעלות מפריד של F/K. נניח בשלילה שקָים $x \in B$ כך ש $F = F^pK(B_0)$ עבור $B_0 = B \setminus \{x\}$. הואיל ו $F/K(B)$ הנה הרחבה אלגברית פרידה, גם $F^p/K(B)^p$ הנה הרחבה אלגברית פרידה. לכן, $F/K(B^p, B_0)$ הנה הרחבה אלגברית פרידה. מכאן ש $K(B)/K(B^p, B_0)$ הנה הרחבה אלגברית פרידה. מצד שני, ההרחבה $K(B)/K(B^p, B_0)$ אי פרידה בטהֳרה. לכן, $K(B) = K(B^p, B_0)$. מכאן נובע שקָימים $x_1, \ldots, x_r \in B_0$, כך ש $x = \sum a_k x^{k_0 p} x_1^{k_1} \cdots x_r^{k_r}$ עבור קבוצה סופית של $r+1$־יות $(k_0, k_1, \ldots, k_r)$ של מספרים טבעיים אי שליליים ואברים $a_k \in K$. שויון זה עומד בסתירה לאי התלות האלגברית של האברים $x, x_1, \ldots, x_r$ של B. מסתירה זו נובע ש B הוא בסיס־p של F/K.

הוכחת ב: נניח עתה ש F/K נוצרת סופית ו B הוא בסיס־p עבורה. אזי גם ההרחבה $F/K(B)$ נוצרת סופית. יהי $y_1, \ldots, y_s$ בסיס נעלות עבור $F/K(B)$ ונסמן ב F_0 את ההרחבה הפרידה המרבית של $K(B)(y_1, \ldots, y_s)$ ב F. אזי F/F_0 היא הרחבה אי פרידה בטהרה סופית. לכן קָים n טבעי כך ש $F^{p^n} \subseteq F_0$. מההנחה ש B בסיס־p ל F/K נובע ש $F^pK(B) = F$. נניח בהשראה ש $F^{n-1}K(B) = F$. אזי

$$.F^{p^n}K(B) = (F^{p-1})^pK(B)^pK(B) = (F^{p-1}K(B))^pK(B) = F^pK(B) = F$$

לכן $F = F_0$, ומכאן ש F הוא הרחבה פרידה של $K(B)(y_1, \ldots, y_s)$. לכן גם $F^p/K(B)^p(y_1^p, \ldots, y_s^p)$ הנה הרחבה פרידה.

$$\begin{tikzcd}
F^p \arrow[rr, dash] \arrow[d, dash] & & F = F^pK(B) \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\
K(B)^p(y_1^p, \ldots, y_s^p) \arrow[r, dash] & K(B)(y_1^p, \ldots, y_s^p) \arrow[r, dash] & K(B)(y_1, \ldots, y_s)
\end{tikzcd}$$

מכאן ש $F/K(B)(y_1^p, \ldots, y_s^p)$ הנה הרחבה פרידה. זה גורר ש $K(B)(y_1, \ldots, y_s)/K(B)(y_1^p, \ldots, y_s^p)$ הנה הרחבה פרידה. מאידך, אם $s > 0$, אזי y_1 אי פריד בטהרה מעל $K(B)(y_1^p, \ldots, y_s^p)$. נובע אפוא ש $s = 0$. לכן $F/K(B)$ היא הרחבה פרידה סופית.

הוכחת ג: לפי (ב), $F/K(B)$ היא הרחבה פרידה סופית. לפי למה 5.7.4 אברי B אינם תלויים אלגברית מעל K. לכן, B הוא בסיס נעלות מפריד של F/K. ∎

צרוף המשפטונים 5.7.3 ו 5.7.5 נותן את התוצאה הבאה:

תוצאה 5.7.6: *תהי F/K הרחבה של שדות ו $\{x_i\}_{i\in I}$ קבוצת אברים של F. נניח ש $\mathrm{char}(K)=0$ או שההרחבה F/K פרידה ונוצרת סופית. אזי הקבוצה $\{dx_i\}_{i\in I}$ היא בסיס למרחב הוקטורי $\Omega_{F/K}$ מעל F אם ורק אם $\{x_i\}_{i\in I}$ היא בסיס נעלות מפריד של F/K. בפרט, אם ההרחבה F/K נוצרת סופית, אזי $\Omega_{F/K}=0$ אם ורק אם F/K הנה הרחבה פרידה.*

תוצאה 5.7.7: *יהיו K שדה ו T מְקוֹם של אלגברת־K נוצרת סופית. אזי $\Omega_{T/K}=0$ אם ורק אם T הנו מכפלה ישרה של שדות הרחבה פרידים סופיים של K.*

הוכחה: נניח תחילה ש $T=\prod_{i=1}^n K_i$ הנו מכפלה ישרה של שדות הרחבה פרידים סופיים של K. לפי למה 5.7.2, $\Omega_{K_i/K}=K_i\otimes_K\Omega_{K/K}=0$. לכן, לפי משפטון 5.5.6, $\Omega_{T/K}=\bigoplus_{i=1}^n\Omega_{K_i/K}=0$.

בכוון הֶהָפוּך נטפל תחילה במקרה שבו T הנו המְקוֹם של אלגברה נוצרת סופית מעל K באידאל מרבי שלה ו $\Omega_{T/K}=0$. נסמן ב $\mathfrak{m}$ את האידאל המרבי של T וב $\bar{T}=T/\mathfrak{m}$ את שדה המנות שלו. אזי $\bar{T}$ הנה הרחבת שדות נוצרת סופית של K. הסִדרה המדֻיֶּקֶת השניה המתאימה לסדרה הקצרה $0\to\mathfrak{m}\to T\to\bar{T}\to 0$ הנה

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\xrightarrow{d}\bar{T}\otimes_T\Omega_{T/K}\to\Omega_{\bar{T}/K}\to 0. \tag{10}$$

הואיל ו $\Omega_{T/K}=0$, נובע מסדרה זו ש $\Omega_{\bar{T}/K}=0$. מתוצאה 5.7.6 נובע ש $\bar{T}$ הנה הרחבה פרידה סופית של K. יתר על כן, לפי חלק ב של תוצאה 5.6.3, ההעתקה d בסדרה (10) חד חד ערכית. לכן, $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2=0$. הואיל ו T נטרי, נובע מכאן ומהלמה של נקָיָמה ש $\mathfrak{m}=0$. לכן, $T=\bar{T}$ הנו הרחבה סופית פרידה של K.

עתה נתבונן במקרה הכללי שבו T הנו המְקוֹם של אלגברה נוצרת סופית מעל K בקבוצה כפלית שלה ו $\Omega_{T/K}=0$. יהי $\mathfrak{m}$ אידאל מרבי של T. אזי $T_\mathfrak{m}$ הוא המקום של אלגברה נוצרת סופית מעל K באידאל מרבי. יתר על כן, לפי משפטון המְקוֹמִים 5.5.5, $\Omega_{T_\mathfrak{m}/K}=0$. לכן, לפי הפסקה הקודמת, $T_\mathfrak{m}$ הנו שדה הרחבה סופית פרידה של K. מכאן נובע שאין ל T שום אידאל ראשוני המוכל ממש ב $\mathfrak{m}$. זה אומר ש $\dim(T)=0$. בנוסף על זה, T נטרי. לכן, לפי משפט אקיצוקי 3.3.6, T הנו חוג ארטין.

יהיו $\mathfrak{m}_1,\ldots,\mathfrak{m}_r$ האידאלים הראשוניים (שהם גם המרביים) השונים של T (משפטון 3.3.3). לפי הפסקה הקודמת, לכל j, $T_j=T_{\mathfrak{m}_j}$ הוא שדה. ולכן האידאל המרבי שלו $\mathfrak{m}_jT_{\mathfrak{m}_j}$ שוה ל 0. אם נתבונן באידאל $\mathfrak{n}=\mathfrak{m}_1\cdots\mathfrak{m}_r$, נקבל שכל המְקוֹמִים שלו באידאלים ראשוניים שוים לאפס ולכן הוא עצמו שוה לאפס. מכאן ש $T=\prod_{j=0}^r T/\mathfrak{m}_j$. כמו כן, $T/\mathfrak{m}_j=T_{\mathfrak{m}_j}/\mathfrak{m}_jT_{\mathfrak{m}_j}=T_{\mathfrak{m}_j}$. לכן, $T=\prod_{j=1}^r T_{\mathfrak{m}_j}$ הוא מכפלה של שדות הרחבה פרידים סופיים של K. ∎

תוצאה 5.7.8: *תהי F/K הרחבה נוצרת סופית של שדות מדרגת נעלות r.*

(א) *$\dim_F\Omega_{F/K}\geq r$ והשויון מתקַיֵּם אם ורק אם F/K פרידה.*

(ב) *אם F/K פרידה, אזי כל קבוצת יוצרים מכילה בסיס נעלות מפריד.*

הוכחת א: נניח תחילה ש $\mathrm{char}(K)=0$. יהי $x_1,\dots,x_r$ בסיס נעלות של F/K. אזי $x_1,\dots,x_r$ הוא בסיס נעלות מפריד. לכן, לפי תוצאה 5.7.6, $dx_1,\dots,dx_r$ הנו בסיס של $\Omega_{F/K}$. לכן, $\dim_F \Omega_{F/K}=r$, כנטען.

עתה נניח ש $\mathrm{char}(K)=p$ חיובי. יהיו $x_1,\dots,x_n$ בסיס־p של F/K. לפי חלק ב של משפטון 5.7.5, $r\le n$. לפי חלק ב של משפטון 5.7.3, $\dim_F \Omega_{F/K}=n$. לכן, $r\le \dim_F \Omega_{F/K}$.

אם F/K פרידה, אזי לפי חלק ג של משפטון 5.7.5, $x_1,\dots,x_n$ הוא גם בסיס נעלות מפריד של F/K. לכן, $n=r$. לפי הפסקה הקודמת, $\dim_F \Omega_{F/K}=r$.

להפך, נניח ש $\dim_F \Omega_{F/K}=r$. אזי $n=r$. לפי חלק ב של משפטון 5.7.5, מכילה הקבוצה $\{x_1,\dots,x_n\}$ בסיס נעלות של F/K. לכן, מהוה קבוצה זו עצמה בסיס נעלות של F/K. בנוסף אומר חלק ב של משפטון 5.7.5 שההרחבה $F/K(x_1,\dots,x_r)$ פרידה. לכן מהוים $x_1,\dots,x_r$ בסיס נעלות מפריד של F/K. זה אומר שההרחבה F/K פרידה.

הוכחת ב: תהי עתה $x_1,\dots,x_n$ קבוצת יוצרים של F/K. לפי חלק ג של משפטון 5.5.5, $dx_1,\dots,dx_n$ יוצרת את המרחב הוקטורי $\Omega_{F/K}$ מעל F. בלי הגבלת הכלליות, $dx_1,\dots,dx_r$ מהוים בסיס ל $\Omega_{F/K}$. לפי למה 5.7.3, $x_1,\dots,x_r$ הוא בסיס־p של F/K. לכן, לפי למה 5.7.5, $x_1,\dots,x_r$ מהוה בסיס נעלות מפריד של F/K, כמבֻקש. ∎

5.8 הוכחת בֹחן יעקבי

ההכנות שעשינו מאפשרות לנו עתה לגשת להוכחת בֹחן יעקבי.

משפט 5.2.1 (בֹחן יעקבי): *יהיו K שדה, $R=K[X_1,\dots,X_n]$ חוג הפולינומים מעל K, $I=\sum_{i=1}^m Rf_i$ אידאל של R ו P אידאל ראשוני של R המקיף את I. נסמן ב c את הממד הנִלְוֶה של IR_P ב R_P, ב L את שדה המנות של R/P וב $J=\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)_{1\le i\le m,\,1\le j\le n}$ את מטריצת יעקבי. עוד נסמן $x_i=X_i+P$, ותהי $\bar J=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$ את ההעמדה של J מודולו P, כלומר את התמונה של J ב L. יהי $A=R/I$ ו $\mathfrak{p}=P/I$.*

(א) $\mathrm{rank}(\bar J)\le c$.

(ב) אם $\mathrm{char}(K)>0$ *נניח עוד ש L הוא הרחבה פרידה של K. אזי $A_{\mathfrak{p}}$ הוא חוג מקומי רגיל אם ורק אם* $\mathrm{rank}(\bar J)=c$.

הוכחת א: *הואיל ו c הנו הממד הנלוה של IR_P ב R_P, קיָם אידאל ראשוני Q של R המקיֵם $I\subseteq Q\subseteq P$ ו $\mathrm{codim}(Q)=c$. נבחר פולינומים $f_{m+1},\dots,f_{m'}$ ב R כך ש $Q=\sum_{i=1}^{m'} Rf_i$. נסמן $J'=\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)_{1\le i\le m',\,1\le j\le n}$. אזי $\mathrm{rank}(\bar J)\le \mathrm{rank}(\bar J')$. אם נוכיח ש $\mathrm{rank}(\bar J')\le c$, נקבל שגם $\mathrm{rank}(\bar J)\le c$. לכן, כדי להוכיח את טענה א, אפשר להניח ש $I=Q$.*

תהי $d = \mathrm{rank}(\bar{J})$. אזי קַיֶמת ל J תת מטריצה רבועית מסדר $d \times d$ שהקוצב (=דטרמיננטה) שלה אינו שיָך ל P. לכן הקוצב אינו שיָך ל Q. מכאן שהדרגה של J מודולו Q גדולה או שוה ל d. אם נראה שהדרגה של J מודולו Q קטנה או שוה ל C, ינבע ש $d \le c$. לכן, כדי להוכיח את טענה א, נוכל להניח בלי הגבלת הכלליות ש $I = Q = P$.

הואיל ו $A = R/Q$ נובע מסעיף 5.4 ש

$$\Omega_{A/K} = \bigoplus_{k=1}^{n} A dX_k / \langle \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} dX_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_k} dX_k \rangle \tag{11}$$

נכפיל טנזורית את שני האגפים של (11) ב L אשר עתה אינו אלא החוג המקומי של A באידאל האפס. לפי משפטון המְקומים, $L \otimes_A \Omega_{A/K} = \Omega_{L/K}$ ולכן $\Omega_{L/K} = V/U$ הוא מנה של שני המרחבים הוקטוריים מעל L $V = \sum_{k=1}^{n} L dX_k$ ו $U = \langle \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} dX_k, \cdots, \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial X_k} dX_k \rangle$. מכאן נובע ש

$$. \dim_L \Omega_{L/K} = \dim(V) - \dim(U) = n - \mathrm{rank}(\bar{J}) \tag{12}$$

מאידך, $\dim_L \Omega_{L/K} \ge \mathrm{trans.deg}(L/K)$ (תוצאה 5.7.8), $\mathrm{trans.deg}(L/K) = \dim(A)$ (משפט 4.1.5), $\dim(A) = \dim(R) - \mathrm{codim}(Q)$ (לפי הגדרת הממד הנלוֶה) ו $\dim(R) - \mathrm{codim}(Q) = n - c$ (שוב לפי תוצאה 5.7.8). אם נצרף אי שויונות אלו ל (12), נקבל ש $\mathrm{rank}(\bar{J}) \le c$, כנטען.

הוכחת ב: נניח עתה ש L פריד מעל K ונתבונן בסדרה המדֻיֶקת השניה

$$\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 A_\mathfrak{p} \xrightarrow{d} L \otimes_K \Omega_{A_\mathfrak{p}/K} \to \Omega_{L/K} \to 0 \tag{13}$$

הנלוֵית לסדרה המדיֻקת הקצרה $0 \to \mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p} \to L \to 0$ מעל השדה K. לפי חלק ב של תוצאה 5.6.3, ההעתקה d ב (13), חד חד ערכית. הואיל ואברי הסדרה הנם מרחבים וקטוריים נוצרים סופית,

$$. \dim_L(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 A_\mathfrak{p}) + \dim_L \Omega_{L/K} = \dim_L L \otimes_K \Omega_{A_\mathfrak{p}/K} \tag{14}$$

לפי תוצאה 4.4.12, $\dim_L \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 A_\mathfrak{p} \ge \dim(A_\mathfrak{p})$, ולפי משפט 4.6.1 הופך אי השויון לשויון אם ורק אם $A_\mathfrak{p}$ חוג רגיל. הואיל ו L/K הנה הרחבה פרידה נוצרת סופית, נובע מחלק א של תוצאה 5.7.8, ש $\dim_L \Omega_{L/K} = \mathrm{trans.deg}(L/K)$. הואיל ו L הוא שדה המנות של $A/\mathfrak{p}$ ותחום שלמות זה נוצר סופית מעל K, נובע ממשפט 4.1.5, ש $\mathrm{trans.deg}(L/K) = \dim(A/\mathfrak{p})$. אם נבחר אידאל ראשוני מזערי Q המקיף את I ומוכל ב P, נקבל שהארך של שרשרת מרבית של אידאלים ראשוניים מ R ל P ועוד הארך של שרשרת מרבית של אידאלים ראשוניים מ P ל Q ועוד הארך של שרשרת מרבית של אידאלים ראשוניים מ Q ל 0 שוה לארך של שרשרת מרבית של אידאלים ראשוניים של R. במלים אחרות, $n = \dim(R/P) + \dim(A_\mathfrak{p}) + \mathrm{codim}(I)$ לכן, לפי (14),

$$\dim_L L \otimes_K \Omega_{A_\mathfrak{p}/K} \ge \dim(A_\mathfrak{p}) + \dim(R/P) = n - c \tag{15}$$

ו (15) הופך לשויון אם ורק אם $A_{\mathfrak{p}}$ רגיל.

כדי לסיֵם את הוכחת חלק ב עלינו עוד לקשר את $\dim_L L\otimes_K \Omega_{A_{\mathfrak{p}}/K}$ עם $\mathrm{rank}(\bar{J})$. לצֹרך זה נשים לב תחילה שנֻסחה (11) תקפה עבור $A=R/I$ (במקום $A=R/Q$). אם נכפיל שויון זה טנזורית משמאל ב $A_{\mathfrak{p}}$, נקבל לפי משפטון המקומים 5.5.5, ש

$$\Omega_{A_{\mathfrak{p}}/K} = \bigoplus_{k=1}^{n} A_{\mathfrak{p}} dX_k / \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} dX_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_k} dX_k \Big\rangle \tag{16}$$

עתה נכפיל טנזורית את (15) משמאל ב L ונשתמש בדיוק מימין של המכפלה הטנזורית כדי לקבל ש $L\otimes_K \Omega_{A_{\mathfrak{p}}/K} = V/U$, באשר V הוא המרחב ממֵמד n הנוצר מעל L על ידי dX_k, $k=1,\ldots,n$ ו U הוא תת המרחב שלו הנוצר על ידי האברים $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} dX_k$, $i=1,\ldots,m$. לכן,

$$\dim_L L\otimes_K \Omega_{A_{\mathfrak{p}}/K} = \dim(V) - \dim(U) = n - \mathrm{rank}(\bar{J}) \tag{17}$$

אם נצרף את (17) ל (15), נקבל ש $n-c \geq \dim_L L\otimes\Omega_{L/K} = n-\mathrm{rank}(\bar{J})$ ולכן $\mathrm{rank}(\bar{J}) \leq c$. אי השויון הופך לשויון אם ורק אם החוג המקומי $A_{\mathfrak{p}}$ רגיל. ∎

מפתח העניינים

Bibliography

[AtM] M.F. Atiyah and I.G. Mackdonald, *Introduction to Commutative Algebra,* Addison–Wesley, Reading, 1969.

[Bou] N. Bourbaki, *Commutative Algebra, Chapters 1–7,* Springer, Berlin, 1989.

[Eis] D. Eisenbud, Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics **150**, Springer-Verlag, New York, 1995.

[FrJ] M. D. Fried and M. Jarden, *Field Arithmetic, Second Edition, revised and enlarged by Moshe Jarden,* Ergebnisse der Mathematik (3) **11**, Springer, Heidelberg, 2005.

[Lan] S. Lang, *Introduction to Algebraic Geometry,* Interscience Publishers, New York, 1958.

[Mat] H. Matsumura, *Commutative ring theory,* Cambridge studies in advanced mathematics **8**, Cambridge University Press, Cambridge 1994.

[ZaS1] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra I,* Springer, New York, 1975.

[ZaS2] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra II,* Springer, New York, 1975.