

ה. השערת רימן לשבוע פונקציות.

נניח כי $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$. נניח כי $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$. נניח כי $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$.

אם $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$, אזי $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$.

אם $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$, אזי $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$.

אם $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$, אזי $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$.

פונקציה זיטא רמזי מוגדרת על ידי הנוסחה

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

כאשר s הוא מספר מרוכב. הנוסחה מתקיימת לכל $\sigma > 1$.

אם $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$, אזי $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$.

אם $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$, אזי $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$.

אם $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$, אזי $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$.

אם $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$, אזי $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$.

אם $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$, אזי $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$.

אם $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$, אזי $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$.

אם $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$, אזי $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$.

אם $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$, אזי $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$.

אם $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$, אזי $\zeta(s)$ אינו אפס על קו המעבר $\sigma = \frac{1}{2}$.

לכוננת העשרת דימן יש השלכות מרחיקות לכת על משפט הנחשבים, הנאמנים ועל הרכה
שאלות אחרות.

כיצד העשרת דימן נאכה פתוחה עד היום הזה. הפירק זה אמר נאצור פונקציות
דימן לפנות פונקציות מתקדמות לפונקציות דימן של דימן, נראה שהיא מקיפה משמורה
פונקציונלית ולכסול נכסח ומכילה משפט שיהיה מלווה להעשרת דימן. (לדבר מסקנה
ממשפט נביא הוצאות על מכשירים של עקומים ויחידות מאל גבה סופי

ה' מספר החלקים של F/K .

יהי q מתק, ראשוני של F/K . שבה השאריות $\mathbb{F}_q$ שלו הוא ניתנה.

סופית של K מעלה $\deg$ - לכן $\mathbb{F}_q$ הוא שבה סופי. נסמן את מספר

אבריו $> Np$. מספר זה מקיים את הנסחה

$$Np = q^{\deg p}$$

Np יקרא גם המחלקה או המחלקה המוחלטת של q . נכתוב את השבר המוחלט ^{לשם} מחלקים על ידי שגור

$$N\alpha = q^{\deg \alpha}$$

$$N(\alpha+\beta) = N\alpha \cdot N\beta$$

למה ה'ו' מספר החלקים הראשוניים של F ומעלה F אינה צולה. מספר נתון ^{סגור} m הוא סופי. מספר החלקים שמעלה אפס הוא סופי. מספר זה מסומן $> h$ ונקרא מספר החלקים של F .

הוכחה: נגדיר אבר סגור α של F מעל K . יהי $E = K(\alpha)$.

נסמן S_0 את אסל של החלקים הראשוניים של E/K שמעלה $\geq m$. כל

אבר של S_0 מתאים לפולינום x^m ונמקין $> [E:K]$ שמעלה $\geq m$, או

שהוא ≥ 1 p_0 . מספר הפולינומים הנ"ל הוא סופי ולכן גם S_0 היא קבוצה סופית.

מעל כל אבר של S_0 מונחים רק מספר סופי של חלקים ראשוניים של F/K . לכן

הקבוצה S של כל החלקים הראשוניים של F המונחים מעל אבריו S_0 היא סופית.

יהי P מחלק ראשוני של F/K מעלתו $\geq m$. יהי P_0 המחלק

הראשוני של E היותו מתחילי. אזי $K \in E_{P_0} \in F_P$ ולכן

$$m \geq \deg P_0 \leq \deg P \leq m, \quad P_0 \in S, \text{ ולכן } P \in S.$$

הוכחנו אפוא שמספר המחלקים הראשוניים של F מעלתם $\geq m$ היא סופית.

מכאן נמצא שמספר המחלקים האו-סיליים של F מעלתם m היא סופית.

כדי להוכיח את הרקל השני של הלמה נגדור מחלק חזקי m מעלתו

$g \leq m$. יהי B מחלק מעלתו m אזי, לפי משפט רימן-הורד,

$$\dim B \geq m - g + 1 \geq 1$$

ולכן קיים $x \in F^x$ כך ש $0 \neq (x) + B$, כלומר המחלקה של B יש מחלק או סילי.

מחלק הראשוני של ההוכחה נקרא $\mathcal{C}_m$ של מחלקות המחלקים מעלתם m

היא סופית. נניח שההצטרפות $\alpha \mapsto \alpha + m$ מעירה הצטרפות חד-חד ערכית של

$\mathcal{C}_0$ אל $\mathcal{C}_m$. לכן $\mathcal{C}_0$ היא חבורה סופית.

הרעיון: הוכח שלכל m שלם $|\mathcal{C}_m| = 0$ או $|\mathcal{C}_m| = h$.

למה זה? יהי C מחלקת מחלקים של F/K . מספר המחלקים האו-סיליים $C >$

אז

$$\frac{\dim C}{g-1}$$

הוכחה: אם $\dim C = 0$. גלגלה לזרחה . נניח אם כן $\dim C = n$, ויהי E מחלק

C . מספר המחלקים האי שליליים C שיה דיוק למספר המחלקים הראשיים

(x) שגורם $L(E)$. יהי $x_1, \dots, x_n$ קסיס $L(E)$ מעל K . מספר

האגרים F מהצורה $\sum_{i=1}^n a_i x_i$, $a_i \in K$, שיה q^n . מספר זה צריך

להגסיר 1 , כיון שאיך אפשר מן המאיים מחלק , ולנסוף צריך לחלק q , $q \neq 1$,

כיון e $(x) = (x')$ אם ורק אם קיים $a \in K^*$ כך $x' = ax$.

נסמן עתה δ את המחלק המשותף המרבי של מעלות המחלקים של F/K .

אנו מניחים $\delta = 1$. עז שטוען להוכחה עוקדה זו נסבד שגורם כל m שלם

קיים מחלק ממעלה m אם ורק אם m הוא כפולה של δ . לפיכך δ מחלק את $2g-2$

כי המעלה של המחלק הקטני שיה $2g-2$.

למה זה? אם סגח הוא כפולה של δ אזי מספר המחלקים האי שליליים ממעלה m שיה

$$A_n = h \frac{q^{\dim E} - 1}{q - 1}$$

כאשר E הוא מחלק ממעלה m . לפיכך , אם $2g-2 \nmid m$ אזי

$$A_n = h \frac{q^{n-g+1} - 1}{q - 1}$$

הוכחה: הנסחה הראשונה נקבעת מההגדרה של A_n . הנסחה השנייה נקבעת

מההצגה $A_n = h \frac{q^{n-g+1} - 1}{q - 1}$.

ה. 2. פונקציות זיטא של שדה פונקציות.

מסביר לנו כי מרוכב

$$(1) \quad \zeta(s) = \zeta_{F/K}(s) = \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{(N\alpha)^s}$$

כאשר α עובר על כל המחלקים האי-אפס של F/K . כזו נקראת המספר

ההיכנסות של האיבר α במרחב, על ידי הגדרה

$$t = q^{-\alpha}$$

ומקבל כי הפונקציה $\zeta(s) = Z(t)$ והמשתנה t יהיו

$$(2) \quad Z(t) = \sum_{\alpha \geq 0} t^{\deg \alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n$$

כאשר A_n מספר האיבר α של F/K שמתאים לדרגה n ויש לו n נקודות עבור $s > 0$

$$(2.1) \quad Z(t) = \sum_{n \leq 2g-2} A_n t^n + h \sum_{m = \frac{2g-2+\delta}{\delta}}^{\infty} \frac{q^{m\delta-g+1} - 1}{q-1} t^{m\delta}$$

האיבר האינסופי באשר t יהיו מתכנס עבור $|t| < q^{-1}$ כלומר עבור $\text{Re } s > 1$. נכון (המשפט)

במצב מסוים הטורים והמאגרים יוקדשו

$$(3) \quad Z(t) = \Phi(t) + \frac{h q^{g-1+\delta}}{q-1} \frac{t^{2g-2+\delta}}{1-(qt)^\delta} - \frac{h}{q-1} \frac{t^{2g-2+\delta}}{1-t^\delta}$$

כאשר

$$(4) \quad \Phi(t) = \sum_{n=0}^{2g-2} A_n t^n$$

הוא פולינום ממעלה $\geq 2g-2$.

אם נסביר את האנטימטריה בקולטת מקדל

משפט 4.1: עבור התצוקות $Z(t)$ והמטות על יצי (2) מתכנס $\sum_{n=0}^{\infty} q^n |t|^n$ לא השווי

הנסחה (3) מאפשרת להמשיך את $Z(t)$ כפונקציה מרומורכית. הקטעים היתריות

של פונקציה זו הם בקצוות $t=1$ ו $t=q^{-1}$ ושיהיה בטוחים.

אם גורמל (1) והמסדר על יצי (1) מתכנס לתצ' המישר ודכר $\sum_{n=0}^{\infty} q^n |t|^n$ על יצי התורה

$t=q^{-1}$ נוסחה (3) נוכל להמשיך את (1) ונכל להמשיך את (1) לפונקציה מרומורכית

כל המישר פני לקצוות הסטנדרטיות $t=1$ ו $t=0$.

הכיוון: הוכח שאם $q=0$ אזי $h=1$ (הוא הוכח) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n |t|^n$ (52) ודאור

$$Z(t) = \frac{1}{(1-qt)(1-t)}$$

הצגה כפולית לפונקציות זיגא

נסתכל על נקודה אחת, לוי (כ) הצגה כפולית כזוהי לזן איש לפונקציות זיגא של רומן

משפט 5.1: אם $\text{Re } s > 1$ ו- $|t| < q^{-1}$ אז

$$(1) \quad \zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - (Np)^{-s}} = \prod_p \frac{1}{1 - t^{q^s p}}$$

כאשר q עובר על כל המחלקים הראשוניים של F/K . המכנה מתבטל (החל) ולכן היא אינה תלויה בסדר האורחים.

הוכחה: אם נשתמש שכל גורם של Np הוא q^s ונעזרים במחלקים נוצרים

חשבים על ידי המחלקים הראשוניים נקבל $\prod_{p|N} (1 - t^{q^s p})^{-1}$ ו- $\text{Re } s > 0$

$$\prod_{Np \leq m} \frac{1}{1 - (Np)^{-s}} = \prod_{Np \leq m} \sum_{k=0}^{\infty} (Np)^{-ks} = \sum_{\substack{\alpha \geq 0 \\ N\alpha \leq m}} (N\alpha)^{-s} + \sum_{\substack{\alpha \geq 0 \\ N\alpha > m}} (N\alpha)^{-s}$$

כאשר α עובר על כל המחלקים הראשוניים של N ו- α הוא שלילי

המקומים $N\alpha > 0$ של המחלקים הראשוניים q המופיעים להם מקומים $Np \leq m$

ולכן

$$\left| \zeta(s) - \prod_{Np \leq m} \frac{1}{1 - (Np)^{-s}} \right| \leq \left| \sum_{\substack{\alpha \geq 0 \\ N\alpha > m}} (N\alpha)^{-s} \right|$$

אם יתכן הוא גורם של N ו- α הוא שלילי לאדם כאשר m הוא מספר

באופן כללי מנו מקבלים את (1) מההתבטלות בגורמים מקבילים באופן דומה

הוכחה 6.1: אם $\text{Re } s > 0$ אז $\zeta(s) \neq 0$

ה. 4. יחיד פונקציה α היא הפונקציה α המוגדרת על ידי:

לכל $r \in K$ יש פונקציה α_r המוגדרת על ידי $\alpha_r(r) = r$ ויהי α_r הפונקציה

המקבלת K_r ל F_r ויהי $F_r = K_r \cdot F$ ויהי K_r הפונקציה המקבלת K ל K_r

המקבלת K ל K_r ויהי F_r הפונקציה המקבלת F ל F_r ויהי K_r הפונקציה המקבלת K ל K_r

המקבלת K ל K_r ויהי F_r הפונקציה המקבלת F ל F_r ויהי K_r הפונקציה המקבלת K ל K_r

המקבלת K ל K_r ויהי F_r הפונקציה המקבלת F ל F_r ויהי K_r הפונקציה המקבלת K ל K_r

המקבלת K ל K_r ויהי F_r הפונקציה המקבלת F ל F_r ויהי K_r הפונקציה המקבלת K ל K_r

המקבלת K ל K_r ויהי F_r הפונקציה המקבלת F ל F_r ויהי K_r הפונקציה המקבלת K ל K_r

המקבלת K ל K_r ויהי F_r הפונקציה המקבלת F ל F_r ויהי K_r הפונקציה המקבלת K ל K_r

המקבלת K ל K_r ויהי F_r הפונקציה המקבלת F ל F_r ויהי K_r הפונקציה המקבלת K ל K_r

המקבלת K ל K_r ויהי F_r הפונקציה המקבלת F ל F_r ויהי K_r הפונקציה המקבלת K ל K_r

המקבלת K ל K_r ויהי F_r הפונקציה המקבלת F ל F_r ויהי K_r הפונקציה המקבלת K ל K_r

$$[F_{r, \theta_i} : K] = \text{len}(r, m) \quad i=1, \dots, d$$

101

$$\deg \theta_i = [F_{r, \theta_i} : K_r] = r^{-1} \text{len}(r, m) \quad i=1, \dots, d$$

101

$$m = \deg p = d \deg \theta_1 = d r^{-1} \text{len}(r, m)$$

$$d = \gcd(r, m) \quad \Leftarrow$$

הנקודה בין הפונקציה Z_r ל F_r ואין Z מן $\mathbb{Z}$ ידוע

(1) $Z_r(t^r) = \prod_{\xi^r=1} Z(\xi t)$ משפט 1.2: לכל מרחב מהקים

כאשר ξ עובר על כל שרשי היחידה ה r -יי

הוכחה: לכן עקבין ההמשכה האנליטית מספיק להוכיח את השוויון הנ"ל עבור $|t| < q^{-r}$

במקרה זה נוכל להשתמש בגזעיות הפולינום בפתחנו (משפט 1.5). ואכן, לפי (1) א

(2) $Z_r(t^r)^{-1} = \prod_p \prod_{\theta | p} (1 - t^{r \deg \theta})$
 $= \prod_p (1 - t^{\text{lcm}(r, \deg p)})^{\gcd(r, \deg p)}$

(3) $\prod_{\xi^r=1} Z(\xi t)^{-1} = \prod_p \prod_{\xi^r=1} (1 - (\xi t)^{\deg p})$

כדי להוכיח את המשפט מספיק אנוח להוכיח שוויון השברים עבור כל p (ראו פירוט)

הימנייה של (2) ו (3). ואכן, עבור p קדום נוסח

$m = \deg p$, $d = \gcd(r, m)$

מה שפירוטו להוכיח קסימונים אלו הוא

(4) $(1 - t^{\frac{rm}{d}})^d = \prod_{\xi^r=1} (1 - (\xi t)^m)$

נציג $x = t^{\frac{r}{d}}$ ונקבל (4) $t^m = x^{-1}$ (4) $x = 0$ (5) (ראו פירוט)

(5) $(x^{\frac{r}{d}} - 1)^d = \prod_{\xi^r=1} (x - \xi^m)$

[illegible]

7. הווא ערש יחידה פרינציפאל $\frac{r}{d}$ נאכאן יאן יאן (5) $\int_{\text{הווא}}$

$$\prod_{i=1}^r (x - \xi^m) = \prod_{i=1}^r (x - \theta^{i_m}) = \prod_{i=1}^r (x - \eta^i)$$

$$= \prod_{k=0}^{d-1} \prod_{j=0}^{\frac{r}{d}} (x - \eta^{\frac{r}{d}k + j}) = \prod_{k=0}^{d-1} \prod_{j=0}^{\frac{r}{d}} (x - \eta^j) = \left[\prod_{j=0}^{\frac{r}{d}} (x - \eta^j) \right]^d$$

$$(x^{\frac{r}{d}} - 1)^d$$

$\delta = 1$: (F. K. Schmidt) 8.1.1931

1. $Z(t)$ 2. $r=0$ 3. $Z(t)$ 4. $Z(t)$ 5. $Z(t)$

15) 3) 21 1802 (2) 10d

$$Z(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \delta t^m$$

2. 11.2016 17.10 (1) N. $Z(\xi t) = Z(t)$ 15.11 $\xi^5 = 1$ 19.11, 17.12

$$Z_\delta(t^\delta) = Z(t)^\delta$$

אין אמת הוא איז משפט 4 פונקציע ארומצויגט גאלט קאכ פשוט געקארט $t=1$

$\delta = 1$ für $t=1$ ergibt $\delta = 2004 \cdot 26\%$ der jährl. Löhne zuz.

ה-5. המעלה והפונקציות

המעלה $t \mapsto 1-t$ והפונקציה $Z(t)$ מתאימה, להערה, $t \mapsto \frac{1}{qt}$ המעלה

למה זה? הפונקציה $(\sqrt{q}t)^{1-q} Z(t)$ איננה פונקציה

המעלה $t \mapsto \frac{1}{qt}$ מתאימה, הפונקציה $Z(t)$ מתאימה

$$(\sqrt{q}t)^{1-q} Z(t) = (\sqrt{q}t)^{q-1} Z\left(\frac{1}{qt}\right)$$

הוכחה: אנו נשתמש ב-Witt כי יש לנו הוכחה כי המעלה

המעלה והפונקציה

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{t^{-1}}{1-t^{-1}} + \frac{1}{1-t} = 0$$

המעלה $K(t)$ ו- $\deg C < 0$ היא מתחלקת, מתחלקת ו-

המעלה $\dim C = 0$ ו- $\deg C < 0$ היא מתחלקת, מתחלקת ו-

$$Z(t) = \sum_{\deg C \geq 0} t^{\deg C} = \sum_{\deg C \geq 0} \sum_{\substack{\alpha \geq 0 \\ \alpha \in C}} t^{\deg \alpha}$$

$$= \sum_{\deg C \geq 0} \frac{q^{\dim C} - 1}{q - 1} t^{\deg C}$$

$$= \sum_C \frac{q^{\dim C} - 1}{q - 1} t^{\deg C}$$

$$= \frac{1}{q-1} \sum_C q^{\dim C} t^{\deg C} - \frac{1}{q-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n$$

$$= \frac{1}{q-1} \sum_C q^{\dim C - \frac{1}{2} \deg C} u^{\deg C}$$

כעת, $u = \sqrt{q} t$, נרשם

$$\begin{aligned} \dim C - \frac{1}{2} \deg C &= \frac{1}{2} \deg C + 1 - g + \dim(W - C) \\ &= \dim(W - C) - \frac{1}{2} \deg(W - C) \end{aligned}$$

לכן $\deg W = 2g - 2$ ו- W היא המעטפת המקסימלית והיחידה של S^2 .

$$u^{2-2g} Z(t) = \frac{1}{q-1} \sum_C q^{\dim(W-C) - \frac{1}{2} \deg(W-C)} u^{-\deg(W-C)}$$

$$= \frac{1}{q-1} \sum_{C'} q^{\dim C' - \frac{1}{2} \deg C'} u^{-\deg C'} = Z\left(\frac{1}{q}\right)$$

כעת $C' = W - C$ ו- C זכר W אם ורק אם C' זכר W .
(ההתאמה בין C ל- C' היא איזומורפיזם)

$$= \frac{1}{q-1} \sum_{C'} q^{\dim C'} (qt)^{-\deg C'} = Z\left(\frac{1}{qt}\right)$$

תוצאה: יהי $\phi(t)$ הפונקציה המוגדרת על ידי

$\phi(t) = \sum_{\deg C=0}^{2g-2} q^{\dim C} t^{\deg C}$

$$\phi(t) = \frac{1}{q-1} \sum_{\deg C=0}^{2g-2} q^{\dim C} t^{\deg C} = \frac{1}{q-1} \sum_{m=0}^{2g-2} t^m$$

ה. 6. השערת כימין ומספר המרחקים הראשוניים ממעלה 1.

נחשב ונרשם את נסמך (2) כסדרה, q שמיני, q אחרי שהוכחנו $\delta=1$

$$Z(t) = \phi(t) + \frac{h q^g}{q-1} \frac{t^{2g-1}}{1-qt} + \frac{h}{q-1} \frac{t^{2g-1}}{1-t}$$

$\phi(t)$ הוא פולינום ממעלה $\geq 2g-2$. אם נעשה חכמה משהו קטן יותר נקבל

$$(1) \quad Z(t) = \frac{L(t)}{(1-t)(1-qt)}$$

כאשר

$$L(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{2g} t^{2g} \quad a_i \in \mathbb{Q}$$

נרשם כמה מומקצמים של $L(t)$. יחידה נכונה $a_0 = L(0) = Z(0) = A_0$

A_0 הוא מספר המרחקים האי-אפסניים α ממעלה 0. בין מחלקי האבס נמנה

דוגמה נוספת, $a_0 = 1$. שיהיה A_1 מספר המרחקים הראשוניים של F/K ממעלה 1

נמסן $N = A_1$. את $Z(t)$ נרשם לפני (2) של ה-2 קלילה

$$(2) \quad Z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n$$

נ (1) ו (2) נוצר אם כן

$$L(t) = (1-t)(1-qt) \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n \equiv 1 + (N-(q+1))t \pmod{t^2}$$

כן

$$(3) \quad a_1 = N - (q+1)$$

נבחר $x \in F$ שיהיה $x \in K$ נוסף $F_0 = K(x)$ וזה

לפי ההכנה קצתם Z פונקציה של F_0/K נמנה (3)

121

e 8711 511 6000

יסקלנו אסמא וסמא פונקציונליזם $L(t)$ נישא אונגה האפן אפרי

$L(t)$ נמצא כי יש פתרון

$$\int_{\gamma_j} \quad i=1 \quad , \quad i=0 \quad , \quad \gamma_j \neq \gamma \quad , \quad \gamma_j \neq \gamma$$

מסמך אלו נכתב להסיר $L(t)$ הוא אכן פולינום ממעלה $2g$ וכל אפס

פריק הוא $L(t) \in \mathbb{F}_q[t]$ כלשהו

רשעית $\therefore (L(0)=1 \text{ ו } \gamma_0 \text{ ו } \gamma_1 \text{ ו } \gamma_2) \quad L(t) = \int_0^t \text{מספרים ו } \omega_i^{-1} \text{ ו } \gamma_i \text{ ו } \gamma_2$

$$e_{1000} \int_{\mathbb{R}^N} (5) \quad (4), (3)$$

$$(b) \quad q^g = a_{2g} = \prod_{i=1}^{2g} \omega_i$$

$$(7) \quad N - (q+1) = q, = - \sum_{i=1}^{2q} \omega_i$$

ייתר על כן, מהמטרה והפונקציות $L(t)$ נגזר גם

$$L\left(\frac{1}{\omega_i}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L\left(\frac{a_i}{q}\right) = 0$$

$$e, g, 2g, 1, p, 3ax, j, p', 1, 1 \leq i \leq 2g, 1, 1, 1$$

(8) $L(t) = \prod_{i=1}^g (1 - \omega_i t)(1 - \omega_i^{-1} t)$ $\omega_i \omega_i^{-1} = 1$

5/16 11/18 11/21 11/24

השדה זימן לשדה הסטוקסיות : F/K

מחציתם $\frac{1}{2}$ הישר $\gamma = \frac{1}{2}$

החלטת הוועדה, 20.12.2011

$$|t| = q^{-\frac{1}{2}} \int_{\partial N} \int_N \rho(N) Z_{F/K}(t) \int_{\partial P} \int_P \rho(P) \int_0^{\infty} r^{2n-1} dr$$

$\rho(\omega_k)$, $t = q^{-1}$, $t = 1$, $\rho(\omega_k)$, e , $Z(t)$, $\rho(\omega_k)$, $\int \rho(\omega_k) d\omega_k$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \pi^{n/2} \quad \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \pi^{n/2} \quad \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \pi^{n/2}$$

האם יש לך מידע?

$$\underline{\text{S/N}} \quad L_{F/K}(t) \quad \underline{\text{m/s}} \quad \underline{\int_0^t} \quad \underline{\text{m}^2/\text{s}^2} \quad \underline{\text{m/s}} \quad \underline{\omega_i} \quad \underline{\text{m/s}}$$

$$(9) \quad |\omega_i| = \sqrt{q} \quad i = 1, 2, \dots, 2g$$

מחשבה כימן גרסמה האפיון נוצר המשפט הנסתר הקטן

משפט השני: יהי F שדה סופי, q מספר ראשוני, N מספר טבעי, $N > q$ אז

אזכרים: נסמן g את הגודל של F ו- N את מספר האותיות האפשריות

של F מחלקי 1. אז

$$|N - (q+1)| \leq 2g\sqrt{q}$$

הוכחה: N (ז) ו- (q) נוצר ע

$$\| |N - (q+1)| \leq \sum_{i=1}^{2g} |\omega_i| = 2g\sqrt{q}$$

את המשפט השני נמך גם לנסח בשפת האומאכיה האלגורית

משפט השני: יהי Γ זקום פרימיטיבי, ω פריק לטולין, המושבר מעל שדה סופי

א- q אז q אזכרים. נסמן g את הגודל של Γ ו- N את מספר התקוצות

הנציונליות-א של Γ . אז

$$|N - (q+1)| \leq 2g\sqrt{q}$$

גרסה משפט השני אפשר להעריך את מספר התקוצות הנציונליות-א על ידי

ממך בלשית, ואכן Lang ו- Weil הוכיחו למאמר

Number of points of varieties in finite fields, American Journal of Mathematics 76 (1953), 819-827

את המשפט הקטן

משפט השני: יהי V ייצוג פריק לטולין, ממך Γ המושבר מעל שדה K ^{המחלק האפיון}

גדל q אלקריים. נסמן N את מספר התקופות הנצטרפות של K של r .

אזי קיים קבוע חיובי c תלוי רק n , r והמחלקה של V כך ש

$$|N - q^r| \leq c q^{r-\frac{1}{2}}$$

ה. ז. 1987, כדור, ציור.

למעשה, זהו הוכחה מסקנות של השערת רימן. למעשה, זהו הוכחה מסקנות של

(הנחה נכונה) הנכונה את השערת רימן. לכן, זהו הוכחה מסקנות של סדר ה-4

ומסמן $K_r > 0$ את ההכרחי היתר, של K ממשלה r .

למה ה-13: יהי r מספר טבעי. תנאי הכרחי ומספיק לכך שהשערת רימן תהיה

נכונה לשניה הפונקציות E/K ויש שהיא תהיה נכונה עבור שניה הפונקציות F_r/K_r

הוכחה: מסמן $L_r > 0$ את כוליהם L של F_r/K_r . (פי משה ה-2, ולפי

(3.5) גרמני 101

$$L_r(t^r) = \frac{Z_r(t^r)}{Z_{or}(t^r)} = \prod_{\xi^r=1} \frac{Z(\xi t)}{Z_o(\xi t)} = \prod_{\xi^r=1} L(\xi t) =$$

$$= \prod_{\xi^r=1} \prod_{i=1}^{2g} (1 - \omega_i \xi t) = \prod_{i=1}^{2g} (1 - \omega_i^r t^r)$$

לפי

$$L_r(t) = \prod_{i=1}^{2g} (1 - \omega_i^r t)$$

כלומר $\omega_1^r, \dots, \omega_{2g}^r$ הם הערכים האפשריים של L_r עבור r

$$|\omega_i| = \sqrt{q} \iff |\omega_i^r| = \sqrt{q^r}$$

לכן, הוכחה נכונה. //

למה גבול מאפשר לנו לעבור לגבולות הפעולה ויחידה לשדה קבועים שגור נכונות.

נניח שגבול N_r הוא מספר השתלשולים הוואטונים $\int_{F/K_r}$ ממנה 1.

למה ה-14: יהי F שדה פונקציות מעל שדה קבועים K $r \geq 1$ q איזו

אם קיים קבוצה C כך שלכל r קיים

$$|N_r - (q^r + 1)| \leq c q^{\frac{r}{2}}$$

אזי הפעולה $\int_{F/K}$ נכונה.

הוכחה: נרשם שיש את $L(t)$ ולזורה נכונה.

$$(1) \quad L(t) = \prod_{i=1}^{2g} (1 - \omega_i t)$$

נכנס $\int_{F/K}$ שיש האספנים $\int_{F/K}$ את האופרטור הדיפרנציאלי $D = -t \frac{d \log}{dt}$

$$(2) \quad D(L(t)) = \sum_{i=1}^{2g} \frac{\omega_i t}{1 - \omega_i t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{2g} \omega_i^n \right) t^n$$

א (z) קבוצה 10^2 מהותה $\int_{F/K}$ מה N_r z

$$N_n - (q^n + 1) = - \sum_{i=1}^{2g} \omega_i^n$$

אכן, לפי ההנחה

$$\left| \sum_{i=1}^{2g} \omega_i^n \right| \leq c q^{\frac{n}{2}}$$

אזי שיוון 10^2 מהותה $\int_{F/K}$ מה N_r שדהים ההתבססות R של K והתבססות R של K

ימין $\int_{F/K}$ (2) N_r $\sqrt{q} \geq R$ (3) שדהים ההתבססות R של K והתבססות R של K

- 102 -

$$\omega_i^{-1} \in (2) \quad N \leq N \quad \forall \epsilon \geq N \quad \left(R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right) \quad \text{כאשר} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

כאשר $D(L(t))$ היא הפונקציה המוגדרת על ידי $i=1, \dots, 2g$

$$R = \min_{1 \leq i \leq 2g} |\omega_i^{-1}|$$

$$102 \quad \text{כאשר} \quad (6) \quad N \leq N \quad \forall \epsilon \geq N \quad i=1, \dots, 2g \quad \text{כאשר} \quad |\omega_i| \leq \sqrt{q} \quad \text{כאשר}$$

$$11 \quad i=1, \dots, 2g \quad \text{כאשר} \quad |\omega_i| = \sqrt{q} \quad \text{כאשר} \quad q^g = \prod_{i=1}^{2g} \omega_i \quad \text{כאשר}$$

ה' 8. מס' מל"ח

המס' זה נתיב, כדעת המלכות ה' 14, ו' ה' 14, e K הוא שזה סופי דעל

q אברים ו F הוא שזה פונקציות מל"ח K בעל שזה q כך e

$$(א) \quad q = q^2 \quad \text{הוא כדור}$$

$$(ב) \quad q > (q+1)^4$$

(ג) F יש מל"ח באופן ד. המעלה ד.

כל הדרכות הללו נחשבות להשגה, אם אם הן אינן מתקיימות, על ידו הרכבה

סופית של שזה ומקדמים, כדרכות להוכיח את אי השיון

$$(ד) \quad N - (q+1) < (2q+1)\sqrt{q}$$

זכר והוכחה של אי שיון זה מהיה על ידו הוכחת הכללה של ו' 15 אוטומורפיזם

של F מל"ח K הוא מעלה, כפי שגדל הוכח > 23 המעלה של המעלות והאופיי

של F/K ואין, אם q הוא מל"ח באופן אישי q הוא המל"ח האופיי האופיי של

$$\varphi_{\sigma}(\tilde{x}) = \varphi(\sigma^{-1}x) \quad x \in \tilde{F}$$

המס' לזה נכסר שהעצמה $x \mapsto x^q$ היא אוטומורפיזם מל"ח K של $\tilde{F}$ ולכן הנסחה

$$\varphi_{\sigma^q}(\tilde{x}) = \varphi(\tilde{x})^q$$

המל"ח האופיי המעלה q של q הוא q, כלומר e $\varphi_{\sigma^q} = \varphi_{\sigma}$ אם ורק אם $\deg q = 1$.
מעצמה מל"ח φ_{σ^q} של F/K

אי השיון נכסה להוכיח את זה

$$(2) \quad N^{(\sigma)} - (q+1) < (2q+1)\sqrt{q}$$

גאטר

$$(3) \quad N^{(\sigma)} = \sum_{\sigma p = p^q} \deg p$$

שים לב אם $(\sigma) = \text{Id}$ אזי $N^{(\sigma)} = N$ ולכן (2) נחשב במקרה זה על (1) לפי שנים להוכחה של (2) נצטרך להראות $N^{(\sigma)}$ עם משמורת מוסבר [צבן]

זה נראה קודם את σ לאוטומורפיזם של $\tilde{K}F$ מעל K על ידי טענה

$$\tilde{K} \quad x^q = \sigma x \quad \text{לכל } x \in \tilde{K} \quad \text{ושורה זו אכן מתקנת את ההיחסים המיושבים כי } \tilde{K}$$

מובנה לינארי מ F מעל K . אם p הוא מתא, באופן של F/K מוסבר

הפרק של $\tilde{K}F/\tilde{K}$ יהיה

$$p = \sigma_1 + \dots + \sigma_d$$

כאשר σ_i הם גם מתארים באופנים שונים זה מזה, נלם ממולה ו $d = \deg p$ ולכן

כמו כן טענה σ ו σ^q עזרי מתא, באופן של $\tilde{K}F/F$ במקרים

נקבל $\sigma p = p^q$ אם ורק אם $\sigma \sigma_i = \sigma_i^q$ $i=1, \dots, d$ ולכן $N^{(\sigma)}$ יהיה

$$\sigma \sigma = \sigma^q \quad \text{מספר המתארים הראשוניים } \sigma \text{ של } \tilde{K}F/F \text{ המקיימים}$$

נסמן זאת

$$m = q' - 1 \quad n = q' + 2g \quad r = m + q'n$$

בסימונים אלו נתן לרשום את (2) מעצם בצורה

$$(4) \quad N^{(\sigma)} - 1 \leq r$$

מכאן אפשר את (4)

המקור אבא גסציה העלה של מכתבים וקטלוגים משם א

$$L(0) \subseteq L(p) \subseteq L(2p) \subseteq L(3p) \subseteq \dots$$

עוֹשֵׁה חַסְדִּים - יוֹמֵן - חוֹדֶשׁ (הַחֹדֶשׁ) ע

$$(5) \quad \dim L(iD) - \dim L((i-1)D) \leq 1$$

11) $R \geq 1$, $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \ln 1 - \ln 0 = 0 - (-\infty) = \infty$

מקרא (5) 11/11

$$u_i \in L(iD) - L((i-1)D)$$

0.02. 1.1.12. $\{u_i\}_{i \in \mathbb{I}_R}$ is a sequence of elements in $\mathcal{U}$. $(u_i)_{i \in \mathbb{I}_R} = iD$ for all $i \in \mathbb{I}_R$.

הצורה $R = m$ היא פשוט $L(RP) \cdot \int$

$$L(nD)^{g'} = \{y^{g'} \mid y \in L(nD)\}$$

מחנה מיתר וקטובי מרן
אשר יתן שם הקדוש

$$L = \left\{ \sum_{i \in I_n} u_i y_i^{q^i} \mid y_i \in L(nD) \right\}$$

$U = \{u, u' \mid i \in I_m \text{ and } j \in I_n\}$ איז די קאדירע און די אינדיקסן פון די איינצליינע

במחנה: הגדולה ו א איה גלוייה למאריה נחל ק

צדד לתוכנית סגורה יש מספר תוכנית שהקדמה

על ידי כך שכל $y_i \in F$ מופיע בדיוק F^{q^i} פעם ב- $\int_{\mathbb{F}_q}$

$$v_D(u_i, y_i^{q'}) = v_D(u_j, y_j^{q'}) \quad \Leftrightarrow \quad \text{si y solo } (i, j) \in I_m \quad \text{si y solo } \sum_{i \in I_m} u_i y_i^{q'} = 0$$

$$kl \text{ as } \gg 3 \quad , \quad i \equiv j \pmod{q'} \quad \text{and} \quad -i + q' u_p(y_i) = -j + q' u_p(y_j) \quad \text{and}$$

- III -

$$1 \leq i, j \leq m < q' \quad \text{ימין, כי}$$

מובטח נוסף

$$\dim L = \dim L(mD) \cdot \dim(nD)$$

ימין, לסימבול הימין-ימין

$$(6) \quad \dim L \geq (m-g+1)(n-g+1) = q + \sqrt{q} - g(g+1)$$

שני צדדים מרכז, וקטרי נוסף

$$L' = \left\{ \sum_{i \in I_m} (\sigma u_i)^{q'} y_i \mid y_i \in L(nD) \right\}$$

אם מוכיח

$$L' \subseteq L(mq'(D) + nD)$$

כמו כן, לסימבול

$$\deg(mq'(D) + nD) = mq' + n = q + 2g > 2g - 2$$

ימין, לסימבול הימין-ימין

$$(7) \quad \dim L' \leq \dim(mq'(D) + nD) = q + 2g - g + 1 = q + g + 1$$

מובטח (7) נוסף צדדים מרכז ימין, (7) לסימבול הימין-ימין, (6) לסימבול הימין-ימין

$$(8) \quad \dim L' < \dim L$$

ימין לסימבול הימין-ימין, לסימבול הימין-ימין

$$\sigma^* \left(\sum_{i \in I_m} u_i y_i^{q'} \right) = \sum_{i \in I_m} (\sigma u_i)^{q'} y_i \quad y_i \in L(nD)$$

נניח (8) $\text{Ker } \sigma^* \neq 0$. קיימים אפוא $y_i \in L(uD)$ כאלה ש

$$(9) \quad \sum_{i \in I_m} (\sigma u_i)^{q'} y_i = 0$$

נניח

$$u = \sum_{i \in I_m} u_i y_i^{q'}$$

יש u הוא אגד שונה מאפס $\in L(uD)$, נניח $\int_p u \neq 0$.

נניח , אם p הוא ממנה, נאמר שונה $\in D$ $\int_p u \neq 0$.

1. $\int_p (u_i) \neq 0$. אם נסתכל לזה p נקיים $\sigma p = p^q$. יש N (9) נניח

$$\int_p(u) = \sum_{i \in I_m} \int_p(u_i) \int_p(y_i)^{q'} = \sum_{i \in I_m} \int_p(\sigma u_i)^q \int_p(y_i)^{q'}$$

$$= \int_p \left(\sum_{i \in I_m} (\sigma u_i)^{q'} y_i \right)^{q'} = 0$$

נניח p מוביל ממנה, האפסים $\in u$. נאמר אולי

$$\sum_{\substack{p \neq 0 \\ \sigma p = p^q}} p \leq (u)_0$$

נניח

$$N^{(\sigma)} - 1 \leq \deg(u)_0 = \deg(u)_\infty \leq r$$

נאמר (u) נאמר

ה. חסם מלידס.

בהתאם ללמה 14 עלינו עוד להוכיח כי שיון הסיון (או השיון (1) לסעיף 8

היקדום $2g+1$ העומד כאילו ימין של אי השיון הנ"ל יוחלף לאחד. לצורך הוכחה זו

השיון ההסיון נשמר γ (2) של סיון 8 ובלמה הנאה.

למה 15: יהי F שדה פונקציות מעל שדה סופי K . יהי F' הרחבה של F (כל q אנליטי)

סופית של F כך e א סדר אלגוריתם של F' יהי σ אוטומורפיזם

של F' מעל K ונניח σ מסתיר את F (לכל $\alpha \in F$ $\sigma(\alpha) = \alpha$). נסמן $G = G(F'/F)$

$$N^{(\sigma)}(F) = \frac{1}{[F':F]} \sum_{\tau \in G} N^{(\tau\sigma)}(F')$$

הוכחה: יהי p' מחלק ראשוני של F' יהי p המחלק של F אם p קיים

$\tau \in G$ כך e $\tau\sigma p' = p'^q$ ואילו $\sigma p = p^q$ ואכן אם $x \in F$ אזי

$$\varphi_{\sigma p}(x) = \varphi_p(\sigma^{-1}\tau^{-1}x) = \varphi_{p'}(\sigma^{-1}\tau^{-1}x) = \varphi_{\tau\sigma p'}(x) = \varphi_{p'^q}(x) = \varphi_{p^q}(x)$$

לפיכך, אם $\sigma p = p'^q$ אזי $\sigma p'$ ו p'^q מונחים מעל אותו המחלק הראשוני

של F ולכן קיים $\tau \in G$ כך e $\tau\sigma p' = p'^q$ מספר q ז-י של הנ"ל

אם כדיוקן לאנדקס והסתמכות $e(p)$ של p' מעל p (שים לב ש מספר

זה אינו תלוי ב p' אלא רק ב p). אם נסמן עוד $\gamma(p)$ את מנהל סדר

הסדרים של p' מעל p $\gamma(p)$ את מספר המחלקים הראשוניים של F'

המונחים מעל p נקבל

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \in G} N^{(\tau\sigma)}(F') &= \sum_{\tau \in G} \sum_{\tau\sigma p' = p'^q} \deg p' = \sum_{\sigma p = p^q} \sum_{p' | p} e(p) \deg p' \\ &= \sum_{\sigma p = p^q} e(p) f(p) g(p) \deg p = [F': F] \sum_{\sigma p = p^q} \deg p = [F': F] N^{(\sigma)}(F) \end{aligned}$$

$$I \quad \deg p' = f(p) \deg p$$

המשפט הזה והמשפט ה' הנסמכות

II

$$e(p) f(p) g(p) = [F': F]$$

יהי שדה F שדה פונקציות מעל שדה K גזל q אוקריס. יהי

σ אוטומורפיזם של F מעל K גזל q סדר סופי. נסמן E את שדה השורש

של σ . אזי F הוא הרחבה ספריקלית סופית של E . השדה K הוא

השדה של E וכן נכלל למצא את E , $x \in E$, טיפוס σ מעל K כך E הוא

הרחבה ספריקלית סופית של $K(x)$. אזי F היא הרחבה ספריקלית סופית

של $K(x)$. נסמן F' את סכום כליות של $F/K(x)$. יתכן K אינו

סכום אלגברית. נסמן K' את הסכום האלגברי של K F' אזי

F' ו FK' הם שדות פונקציות מעל K' . יתכן F מופרד לינארית

מ K' מעל K ולכן ניתן להרחיב את σ לאוטומורפיזם של F' מעל $K'(x)$

אוטומורפיזם זה יסומן σ' . נסמן g' את הגזע של F'

על ידי הוכחה נוספת של שני המקרים נכלל לראש שהמשפטים (ט), (ז) ו (ז')

יחידות (לפי ההוכחה) F'/K' .

הוכחה אפוא שכל אחת מהשקלות F נכלל להוכחה את שני המקרים K

כאן שיתקנו התנאים הנכונים:

(א) קיימת להוכחה F/K אינן טרנסצננטיים מכיוון x וקיימת F הוכחה

סופית F' כך ש $F'/K(x)$ הוא הוכחה שלמה וכך K סופית מלמעלה

F'

(ב) q הוא זוגי $q > 6$.

(ג) $q > (g'+1)^4$ כאשר g' הוא השדה של F'

(ד) F' יש ממלך ראשוני K ממעלה 1

למה הוכחה בתנאים $\int x \int z$ מתקיים

$$N^{(0)}(F) - (q+1) \geq -\frac{n-m}{m} (2g'+1) \sqrt{q}$$

$$m = [F':F] \quad n = [F':K(x)] \quad \text{כאשר}$$

הוכחה נסמן $H = g(F'/F)$ מלמעלה ה 15 נרצה

$$(1) \quad N^{(0)}(F) = \frac{1}{m} \sum_{\tau \in H} N^{(\tau)}(F')$$

$$(2) \quad q+1 = N(K(x)) = \frac{1}{n} \sum_{\theta \in G} N^{(\theta)}(F')$$

מאז השוויון (2) נובע ש

$$\sum_{\theta \in G} N^{(\theta)}(F') = \sum_{\tau \in H} N^{(\tau)}(F') + \sum_{\theta \in G-H} N^{(\theta)}(F')$$

$$\leq \sum_{\tau \in H} N^{(\tau)}(F') + \sum_{\theta \in G-H} ((q+1) + (2g'+1)\sqrt{q})$$

$$= \sum_{\tau \in H} N^{(\tau)}(F') + (n-m)(q+1 + (2g'+1)\sqrt{q})$$

לכן, לפי (2)

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \in H} N^{(\tau)}(F') &\geq n(q+1) - (n-m)(q+1 + (2g'+1)\sqrt{q}) \\ &= m(q+1) - (n-m)(2g'+1)\sqrt{q} \end{aligned}$$

לכן, לפי (1)

$$N^{(\sigma)}(F) \geq (q+1) - \frac{n-m}{m} (2g'+1)\sqrt{q}$$

||

והמסקנה g', m, n

נוסח ונעזר בהמשך (11) - (13) נגזרים ממשפט 1.1 וזו הכחשה מספר

של שדה המרחבים. מאחר שספר אפוא אף לא היה 16 ואף סדר 8

תוכלו את המטה הבאה:

למה זה? יהי F שדה סופי ויהי K שדה סופי K ויהי σ אוטומורפיזם

גזל סדר סופי של F מהל K . אזי קיימת K הכחשה סופית K'

כזו ש q' אקדמיים וקיים קבוצת תיכונים C כך שלכל r ש r אקדמיים

$$|N^{(\sigma)}(F_r') - (q^{r'} - 1)| \leq c q^{r' \frac{r}{2}}$$

קאשר K_r' הוא התחלה היחידה של K ממעלה r , הישנה F_r' שיה $\{K_r' F_r'\}$

ו σ מורחג למאמורפיסם של F_r' מרן K_r' ממסומן אל הוא σ .

קשר σ הוא $\sigma = I$, לבן, לכו למטה היכן, השערת

כיוון σ כונה סגור F'/K' מלמעלה היכן מלמעלה היכן ששערת כיוון σ כונה סגור

שדה הפונקציות המקורי F/K .

הערה: הוכח שבמקרים של למטה היכן המקורי

$$|N^{(\sigma)} - (q+1)| \leq 2g\sqrt{q}$$