

3. היחידות של שדה פונקציות.

3.1. היחידות אלוהיות.

יהיו E/K ו F/L שדות פונקציות (אלוהיות של שדה אחר).

אם נאמר ש F/L הוא היחידות של E/K אם $K \subseteq L$, אם $E \subseteq F$

$$L \cap E = K$$

יהי F/L היחידות של E/K ונניח ש σ הוא מהלך ראשוני של F/L .

נניח ש φ_σ אינו טריויאלי על E , כלומר קיים $x \in E, x \neq 0$ כך ש $\varphi_\sigma(x) \neq 0$.

אזי ההצבה של φ_σ לא היא אחר φ של E/K . נסמן p את המהלך

הראשוני המתאים לו. אנו נאמר ש σ מונח מעל p . גמי φ_σ הוצרכה

המחצית של φ_σ , כלומר $\varphi_\sigma(F^x) = \mathbb{Z}$. אזי $\varphi_\sigma(E^x)$ היא תת חבורה

סופית מאפס של $\mathbb{Z}$ ולכן קיים e טבעי כך ש $\varphi_\sigma(E^x) = e\mathbb{Z}$. נגדיר

אפוא פונקציה $\varphi_p: E^x \rightarrow \mathbb{Z}$ על ידי $\varphi_p(x) = \frac{1}{e} \varphi_\sigma(x)$. אזי φ_p

היא ההצבה המחצית של p . למספר e נקרא אנזקס ההסתעפות של σ

מעל p ונסמן אותו גם $e(\sigma/p)$ או $e(\sigma)$ או $e_{F/E}(\sigma)$,

הכל לפי הענין. את מקבלים אפוא את הנסחה

$$\varphi_\sigma(x) = e(\sigma/p) \varphi_p(x) \quad \forall x \in E$$

הוא ההצבה σ_p של p מוכל במהלך ההצבה σ_θ של θ לכן

$$\bar{e}_p \leq \bar{e}_\theta$$

למה 1.3: יהי F/E הרחבה של E/K . אזי לכל הרחבה F/E קיימת הרחבה F/L

$$[L:K] < \infty \quad (1)$$

$$[F:E] < \infty \quad (2)$$

(2) אם θ הוא מהלך, F הוא הרחבה של E וקיימת הרחבה F/L אזי $[F:E] < \infty$

הוכחה: (1) $\Leftrightarrow$ (2) יהי $x \in E$ אזי x רגולרי על K וכן $x \in L$ אזי

$x \notin L$ ולכן x רגולרי על L . מכאן נקוד $[F:L(x)] < \infty$.

$$[F:E] \leq [F:L(x)] = [F:L(x)] \cdot [L(x):K(x)] = [F:L(x)] \cdot [L:K] < \infty$$

$$(1) \Leftrightarrow (2) \quad \text{למה}$$

$$(2) \Leftrightarrow (3)$$

$$[F_\theta:E_\theta] \leq [F_\theta:L] \cdot [L:K] < \infty$$

$$(3) \Leftrightarrow (2) \quad \text{מוכיחה} \quad [L:K] < \infty$$

הוכחה: נוסח $[L:K] = [L(x):K(x)]$ (כאן x רגולרי על L)

יהי θ מהלך של L מופרד (ינאכית) מ $K(x)$ וכן K .

למה נוסח נוסח 1.3 נכון למהלך על ידי שטחית את תנאי הסופיות בתנאי

בהרחבות ההאזניות מן המספרים.

הרחבה F/L של שדה פונקציות E/K תהיה הרחבה סופית אם יהיו

קיימת הרחבה של L וכן L מהלך מהלך F/L מהלך מהלך F/L

F/L מהלך מהלך מהלך F/L מהלך מהלך F/L מהלך מהלך F/L

$$f(\theta/p) = [F_\theta:E_\theta]$$

נקרא מעלה שדה וסמליו σ על $\sigma \in N$. את מספר המעלה של השדה הנמוך

$$[F_\sigma : L][L : K] = [F_\sigma : E_p][E_p : K]$$

אפשר לרשם אפוא גם כזו:

$$\deg \sigma \cdot [L : K] = f(\sigma/p) \deg p$$

הערה: הוכח שאם F/E היא הרחבה אלסגרייה ואם φ הוא אתר (אן

טריקלי) של F אזי $\varphi|_E$ הוא אתר (אן טריקלי) של E .

אם F/L היא הרחבה של E/K ואם $x \in E^*$ אזי אתר (אן) (x)

אפשר לפרש גם כמחלק, כעם מחלק, של x בהרחבה E/K וכעם מחלק של

x בהרחבה F/L . כזו להבדיל בין שני המושגים מסמן $(x)_E$ את מחלק של

x באר E ו- $(x)_F$ את מחלק של x באר F .

למה 23: הוכח F/L הרחבה כלשהיא של שדה הפונקציות E/K . יהי p אתר

ראשוני של E/K . אזי מעל p מונחים. בין מספר סופי של מחלקים

ראשוניים ולמחלק אחד.

הוכחה: מסמן $g > 0$ את הסדר של E/K . אזי $\deg(g+1)p \geq \deg(g+1)p$.

לכן, לפי המשפט היסודי

$$\dim(g+1)p \geq \deg(g+1)p + 1 - g \geq 2$$

קיים אפוא אתר מסומן $x \in E$ כך ש- $(x)_E + (g+1)p \geq 0$. לכן קיים

$1 \leq k \leq g+1$ כך ש- $(x)_{\infty, E} = kp$. אז $(x)_{\infty, F}$ הוא נוסף להבדיל כלומר

$$(x)_{\infty, F} = \sum_{i=1}^r m_i \theta_i \quad 0 \neq m_i \in \mathbb{Z}$$

באשר $\nu_i \geq 1$ ו- $\mathcal{O}_i$ הם המרחקים הראשוניים של F/L .

יהי $\nu \in \mathbb{Z}$ ונסמן $p' > p$ את המרחק הראשוני של E/K הנונה ממרחק

של $\mathcal{O}_i$. אזי $v_{p'}(x) < \infty$ ולכן p' מופיע ב- $(x)_{\infty, E}$. לכן $p' = p$.

באופן כללי הוכחנו שקיים לפחות מרחק ראשוני אחד של F/L הנונה מעל p .

לפיכך, יהי $\mathcal{O}$ מרחק ראשוני של F/L הנונה מעל p אזי $v_{\mathcal{O}}(x) < \infty$

ולכן $\mathcal{O}$ שנה לאחד מה $\mathcal{O}_i$ ייח. מעל p מונחים הפסג יק מספר סופי של המרחקים

"

הראשוניים

מאגרה שההכרח סופית יש לנו הנסחה היסודית הזאת

משפט 3.3: יהי F/L הרחבה סופית של שדה גלואטורית E/K . יהי p

מרחק ראשוני של E/K יהיו $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_r$ כל המרחקים הראשוניים של F/L הנונים

מעל p . אזי

$$[E : E] = \sum_{i=1}^r e(\mathcal{O}_i/p) f(\mathcal{O}_i/p)$$

הוכחה: ג'מאונים של הוכחה למה 2.3 נקג

$$(2) \quad k \deg p = \deg(x)_{\infty, E} = [E : K(x)]$$

כמו כן

$$m_i = -v_{\mathcal{O}_i}(x) = -e(\mathcal{O}_i/p) v_p(x) = e(\mathcal{O}_i/p) k$$

ולכן

$$(3) \quad [F : L(x)] = \deg(x)_{\infty, F} = k \sum_{i=1}^r e(\mathcal{O}_i/p) \deg \mathcal{O}_i$$

הגדל $[L:K]$ (3) זה מכונה גודל המרחב

$$[L(x):K(x)][F:K(x)] = R \sum_{i=1}^r e(\mathfrak{p}_i/p) [L:K] \deg \mathfrak{p}_i$$

62 31482 (1) 10f, 10f

$$[E:K(x)] \cdot [F:E] = R \deg_P \sum_{i=1}^g e(a_i/p) f(a_i/p)$$

(2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

$$[F:E] = \sum_{i=1}^g e(\alpha_i/p) f(\alpha_i/p)$$

$\rho_{jk} = \gamma + f(\theta_j/p) + e(\theta_j/p)$

LFIEJ by s'ir

E'/L' פרי E/K מתן מודול $\int_0$ מודול קרי F/L פרי אסל $\int_{\text{דגל}}$

אם E/K איז נארמאל, דאס מיינט אז E/K איז א גלויבליכע אקטיוויטעט, און E/K איז א גלויבליכע אקטיוויטעט.

Je vicko, jstno mni o mci p jstno mni, F/L Je vicko, jstno mni o

ISIC O JYK'AJINA F'/L'

$$e(\sigma'/p) = e(\sigma'/\sigma) e(\sigma/p)$$

$$f(\sigma'/p) = f(\sigma'/\sigma) \circ f(\sigma/p)$$

23. הרחבות של E/K .

יהי E/K שדה פונקציות ויהיו F/L ו F'/L' שתי הרחבות של E .

σ איזומורפיזם של F על F' המשאיר כל איבר של E במקומו והמעביר את L

על L' . אם σ הוא מתלן באסוסי של F/L נשכיר מתלן באסוסי $\sigma\sigma$ של

F'/L' על ידי ששכיר

$$\psi_{\sigma\sigma}(x) = \psi_{\sigma}(\sigma^{-1}x) \quad x \in F'$$

יותאמה $\sigma \mapsto \sigma\sigma$ היא חד-חד ערכית מקבוצת כל המתלקים האסוסיים של F/L

על קבוצת כל המתלקים האסוסיים של F'/L' . קדור גם $\sigma\sigma = \sigma\sigma$

ו σ מעביר את האיבר האחד של σ לאיבר האחד של $\sigma\sigma$. לכן σ משנה

איזומורפיזם σ של F_{σ} על $F'_{\sigma\sigma}$. אם σ מונח מעל מתלן באסוסי q

של E/K אזי גם $\sigma\sigma$ מונח מעל q וקל לראות ש

$$e(\sigma\sigma/q) = e(\sigma/q)$$

אם F/L היא הרחבה סופית של E/K אזי גם F'/L' היא הרחבה סופית של E/K ומתקיי

$$f(\sigma\sigma/q) = f(\sigma/q)$$

וכן נאמר שהרחבה F/L של E/K היא נורמלית אם ורק אם

F/E היא הרחבה נורמלית. במקרה זה גם ההרחבה L/K נורמלית.

משפט 43. יהי F/L הרחבה נורמלית סופית של שדה פונקציות E/K .

אזי כל שתי מתלקים באסוסיים σ ו σ' של F/L המונחים מעל אותו מתלן

p על E/K מצויק זה לזה, כלומר קום אוטומורפיזם σ על F מעל E כך ש $\sigma\sigma' = \sigma$.

הוכחה: נניח בשלילה ש σ' אינו מצויק ל σ . נסמן G את חבורת

האוטומורפיזמים על F מעל E . אנשי הקבוצה $\{\sigma\sigma' \mid \sigma \in G\}$ ו

$\{\sigma\sigma' \mid \sigma \in G\}$ זהו צורה של σ . המשפט הקודם התלם מרע שקים $x \in F$ כך ש

$$\forall \sigma \in G \quad v_{\sigma\sigma'}(x) < 0 \quad \& \quad v_{\sigma\sigma}(x) > 0$$

נסמן q את מעלת σ הספיריטיואל של F/E . אז

$$y = N_{F/E} x = \prod_{\sigma \in G} (\sigma x)^q$$

הוא אינו על E . עמך אנך זה מקבל מלכ אנך

$$v_{\sigma}(y) = \sum_{\sigma \in G} q v_{\sigma}(\sigma x) = \sum_{\sigma \in G} q v_{\sigma^{-1}\sigma}(x) > 0$$

לכן $v_p(y) > 0$. מלכ שני מקבל באופן דומה ש $v_{\sigma}(y) < 0$ ולכן

" $v_p(y) < 0$, הסתירה.

נמשך להניח ש F/E היא הרחבה נורמלית סופית. נסמן

$G = G(F/E)$ את חבורת הליאה של ההרחבה. שזה השדה של E , הוא

הרחבה אי ספיריטיואל מעל E ו $[E':E] = [F:E]$, הוא מעל אי-

הספיריטיואל של F/E . מאיך F/E' היא הרחבה ספיריטיואל ולכן עליה

גאסר יח הוא מספר גרסא. והנ"ל נובע

$$(1) \quad \prod_{\sigma \in D(\sigma)} (X - \overline{\sigma y})^{[F:E]_i}$$

מוצדק מעל E_p , $\bar{y}$ הוא שורש של f וכל שורשי f ב F_σ אינם

|| F_σ/E_p היא הרחבה גורמלית.

דע קלויז לאה דס נאדיר הרחבה $D(\sigma) \rightarrow G(F_\sigma/E_p)$ אינא

$\sigma \in D(\sigma)$ ותאמר את האבר $\bar{\sigma}$ של $G(F_\sigma/E_p)$ המוצדק על ידי

$$\bar{\sigma} \bar{y} = \overline{\sigma y} \quad y \in O_\sigma$$

קל לראות בהצגה זו היא הומומורפיזם. נוכיח שהיא איזומורפיזם.

נו נסמן E'_p את שדה השבר של $G(F_\sigma/E_p)$. אזי F_σ/E'_p היא

הרחבה ספיריקלית סמיטה ולכן קיים אבר $y \in O_\sigma$ כך ש $F_\sigma = E'_p(\bar{y})$

י"י ערה $\tau \in G(F_\sigma/E_p)$. נ"א (ii) הוכחה הקודמת נכונה שקיים $\sigma \in D(\sigma)$

$$\tau \bar{y} = \overline{\tau y} \quad \bar{\sigma} = \bar{\tau} \quad \text{לכן}$$

נסמן $I(\sigma)$ את הסדרה של האויזומורפיזם הנ"ל. $I(\sigma)$ הוא

אנטי-חבורה כל ה $\sigma \in D(\sigma)$ שערכם $\bar{\sigma}$ הוא אוטומורפיזם המזוהה של

F_σ . חבורה זו מקיפה הרחבה של σ (Inertia group)

מהציון הקודם נכונה

$$G(F_\sigma/E_p) \cong D(\sigma)/I(\sigma)$$

קל להוכיח זאת בנוסחה

$$D(\sigma\theta) = \sigma D(\theta) \sigma^{-1}$$

כמו כן אם מקבלים מהציון גורמילת הסדר e

$$e(\sigma\theta/p) = e(\theta/p) = e \quad f(\sigma\theta/p) = f(\theta/p) = f$$

אם, ממעט 33 נקדל

$$(2) \quad [F:E] = e f$$

מכאן

$$(3) \quad [F:E] = [F:E]_i |g(F/E)| = [F:E]_i |D(\theta)| f = \frac{[F:E]_i |I(\theta)| f}{[F_\theta:E_\theta]_i}$$

אם נשווה את (2) ו (3) נקבל e

$$(3) \quad e = \frac{[F:E]_i |I(\theta)|}{[F_\theta:E_\theta]_i}$$

$$(4) \quad ef = [F:E]_i |D(\theta)|$$

לכאן: א) הוכח שאם F/E היא הרחבה גלטיא א' F/E היא הרחבה גלטיא א'

$$D(\theta) = \{ \sigma \in g(F/E) \mid \forall z \in \theta_\theta \quad v(\sigma z - z) > 0 \}$$

$$I(\theta) = \{ \sigma \in g(F/E) \mid \forall z \in \theta_\theta \quad v(\sigma z - z) > 0 \}$$

(ג) הוכח שאם F/E היא הרחבה גלטיא א' ו σ מתקן באופן של F כי σ

הסדר מזה E או σ אי ספירינלי מזה E (כאן הסדרות לסדר {43})

אם ורק אם $I(\theta)$ אינה טריבילית.

33. מתלקים בהיחבורה

היה F/L היחבורה של שדה סופרציות E/K . נתאים לכל מתלק, ראשוני

p של E/K את המתלק $\sum_{i=1}^r e(\phi_i/p) \phi_i$ של F/L , כאשר $\phi_1, \dots, \phi_r$ הם

המתלקים הראשוניים של F/L המונחים מעל p . נכתוב התאמה זו לתיאור המונחים

של $\mathfrak{P}_E$ למעלה $\mathfrak{P}_F$. כדור המונחים זה יהיה תד תד ערכי והוא יעבור

את המתלק הראשי $(x)_E$ של E למתלק הראשי $(x)_F$ של F וישייר על הסדר

התאמה זו (התיאור לסעיף ג' של קו-נורמה ומסומן Con) משרה גם

המונחים של $\mathfrak{C}_E$ למעלה $\mathfrak{C}_F$. אנו נראה את $\mathfrak{P}_E$ עם $\text{Con} \mathfrak{P}_E$

וכן נמשיך ונשתמש בסימון α לציון גם את המתלק α של E/K למעלה מתלק

של $\mathfrak{P}_F$. למשל הנה נראה את הקשר בין המעלות של α באיור של $\mathfrak{P}_E$ ואלו

של $\mathfrak{P}_F$.

משפט 33: יהי מספר ציוני $\lambda = \lambda_{F/E}$ כך של מתלק α של K מתקיים

$$(4) \quad \lambda \deg_F \alpha = \deg_E \alpha$$

אם $[F:E] < \infty$ אזי $\lambda = [L:K]/[F:E]$. במקרה זה מקבל אפוא

$$[L:K] \deg_F \alpha = [F:E] \deg_E \alpha$$

הוכחה: מספיק להוכיח את השיון (4) למתלקים ראשוניים. כדי לעשות זאת

מספיק להוכיח של כל מתלק ראשוני p ו q של E/K מתקיים

$$\frac{\deg_E p}{\deg_F p} = \frac{\deg_E q}{\deg_F q}$$

נניח שיש לנו שני פולינומים P ו- Q ב- E

$$\frac{\deg_E P}{\deg_F P} < \frac{\deg_E Q}{\deg_F Q}$$

11

$$\frac{\deg_E P}{\deg_E Q} < \frac{\deg_F P}{\deg_F Q}$$

לכן קיימים מספרים m ו- n כך ש-

$$\frac{\deg_E P}{\deg_E Q} < \frac{m}{n} < \frac{\deg_F P}{\deg_F Q}$$

11

$$\deg_E (mQ - nP) > 0$$

(5)

$$\deg_F (mQ - nP) < 0$$

נבחר מספר טבעי R מספיק גדול כך ש-

$$\deg_E (RmQ - RnP) \geq g_E^+$$

לפי משפט רימן-רוך נקבל שיש $\alpha \in E^*$ כך ש-

$$(\alpha) + RmQ - RnP \geq 0$$

כלומר יש נקודה α שיהיה לה R אגרות ב- $\mathcal{L}_F$. אם נבחר R גדול מספיק אז $\deg_F$

$$(5) \quad \int \dots, R \deg_F (mQ - nP) \geq 0$$

אם $[F:E] < \infty$ אזי נבחר x לא יקנה E ו K ו

$$\lambda = \frac{\deg_E(x)_\infty}{\deg_F(x)_\infty} = \frac{[E:K(x)]}{[F:L(x)]} = \frac{[L:K]}{[F:E]}$$

||

תהי זוגה F/L היחידה סופית של שדה פונקציות E/K . נבחר נורמה

נ φ_F ו φ_E שבתא נורמה. לכן זה נסמן $\hat{F}$ את ההיחידה הנורמלית

המסמית של F/E המקיפה את F ויהי $\hat{L}$ הסגור האלמנטרי של L ו $\hat{F}$

אזי $\hat{F}$ הוא שדה פונקציות מעל $\hat{L}$. נסמן $G = \varphi(\hat{F}/E)$ ו $H = \varphi(\hat{F}/F)$

ויהי $y \in F$. אזי הנורמה של y מוגדרת על ידי

$$\text{Norm}_{F/E} y = N_{F/E} y = \prod_{\sigma \in G/H} (\sigma y)^{[F:E]_i}$$

כאשר σ עובר על מערכת מילגום של G מודולו H . על פי הגדרה זו

נבחר, עקב החלק α של F/L

$$\text{Norm}_{F/E} \alpha = N_{F/E} \alpha = [F:E]_i \sum_{\sigma \in G/H} \sigma \alpha$$

הגדרה זו אינה תלויה במילגום המיוק σ של σ , כי אם $\sigma \alpha = \tau \alpha$

כאשר σ ו τ אינן מפרטים את התכונות העקביות של הנורמה.

משפט 3.3: (א) הנורמה היא הומומורפיזם שומר סדר נ φ_F ו φ_E .

(ב) אם σ הוא מחלק ראשוני של F/L ו π הוא המחלק הראשוני של

$$N_{F/E} \sigma = f(\sigma/p) p$$

אם E/K מרחב אלגברי

אם $y \in F^*$ אז

$$N_{F/E}(y) = (N_{F/E} y)$$

אם $\alpha \in \mathbb{Q}$ אז (3)

$$N_{F/E} \alpha = [F:E] \alpha$$

(4) אם $E \subset F \subset F'$ הוא מעגל של שדות פונקציות ו $\varphi_F \in \mathcal{A}_F$ אז

$$N_{F'/E} \alpha = N_{F/E} (N_{F'/F} \alpha)$$

הוכחה: מהגדרה נקבע שההוכחה היא הומומורפיזם שומר סדר מ $\mathcal{A}_F$ ל $\mathcal{A}_{F'}$.

כדי להשלים את ההוכחה (א) מספיק להוכיח שההוכחה מובלת $\mathcal{A}_E$ כדי להשלים.

זאת מספיק להוכיח את (2)

נשקף כי קודם ש (3) ו (4) נקבעו כנכון מהגדרות. נוכל אפוא להשתמש

בגם להוכחה נכונה. נוכיח את (2) קודם למקרה ש F מרחבי מעל E .

$$\bar{F} = F$$

יהיו $\sigma_1, \dots, \sigma_g$ כל האוטומורפיזמים הליניאריים של σ מעל E . אם

לפי סעיף 23

$$N_{F/E} \sigma = [F:E] \sum_{\sigma \in G} \sigma \sigma = [F:E] |D(\sigma)| (\sigma_1 + \dots + \sigma_g)$$

$$= e(\sigma/p) f(\sigma/p) (\sigma_1 + \dots + \sigma_g) = f(\sigma/p) p.$$

נמצא צורה למקרה הכללי ונסמן $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ את כל המפתחים הראשוניים

$$s' = f(\sigma'_i / \sigma) \quad e' = e(\sigma'_i / \sigma) \quad \text{and} \quad \theta = \int_{\sigma_N}^{\sigma} \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\sigma} \frac{d\sigma}{d\sigma} \quad \hat{F}/\hat{L} \int e$$

שק, י' (3) ו' (1) נעמלזא באקיה ונ' ונ' א'

$$[\hat{E}:F] N_{F/E} \mathcal{O} = N_{F/E} (N_{\hat{E}/F} \mathcal{O}) = N_{\hat{E}/E} e'(\mathcal{O}'_1 + \dots + \mathcal{O}'_f)$$

$$= e' f(\mathcal{O}'/P) r' P = e' f' r' \cdot f(\mathcal{O}/P) P$$

$$N_{F/E} \mathcal{O} = f(\mathcal{O}/P) P \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^n} G_2 \, \mu_{\mathcal{O}} \, d\mu_{\mathcal{O}} = 2 \int_{\mathbb{R}^n} G_2 \, \mu_{\mathcal{O}} \, d\mu_{\mathcal{O}}$$

כיון להוכיח את (א) מספיק שיש להם מאפיינים שונים F ונראה כי E

$$|y\rangle = \sum_{\sigma} v_{\sigma}(y) \sigma$$

۱۲

$$N(y) = [F : E]_i \sum_{\sigma} v_{\sigma}(y) \sum_{\sigma \in G} \sigma \sigma$$

1, 23 kN

$$Ny = \bigwedge_{\sigma \in G} \sigma y \quad [F:E]_i$$

1

$$(\sigma y) = \sigma(y) = \sum_{\sigma} v_{\sigma}(y) \sigma$$

١٥٨

$$(Ny) = [F:E]_i \sum_{\sigma \in G} (\sigma y) = [F:E]_i \sum_{\sigma \in G} \sum_{\rho \in G} w_\rho(y) \sigma \rho = N(y)$$

11

$$\deg_{\substack{U/E \\ F/E}}(N \triangleleft) = [1:K] \deg_{U/F} \pi$$

1000 2000 3000 4000 5000

43. הסתכלות

אם נאמר שמתוך האסות $\mathcal{O}$ של F/L אינו מסתל מעל המתוך האסות $\mathcal{P}$

של E/K היותה מתחתית אם $e(\mathcal{O}/\mathcal{P}) = 1$. אם נאמר $\mathcal{O}$ ספיריטלי מעל $\mathcal{P}$ אם $F_{\mathcal{O}}$ ספיריטלי מעל $E_{\mathcal{P}}$.

משפט 83: היות F/L הנחנה אלסגריה של E/K כך e ספיריטלי מתוך מעל

E , וזאת $\mathcal{P}$ האסות של K . אזי מעל לכל מתוך האסות $\mathcal{P}$ של E מונח

כציון מתוך האסות אם $\mathcal{O}$ של F וקיים סגור שלם כך $\mathcal{P} = \mathcal{P}^m \mathcal{O}$.

הוכחה: יהי y אבר שונה מאפס של F . אזי קיים סגור שלם כך $y^{p^m} \in E$.

$$\mathcal{P}^m v_{\mathcal{O}}(y) = v_{\mathcal{O}}(y^{p^m}) = e(\mathcal{O}/\mathcal{P}) v_{\mathcal{P}}(y^{p^n})$$

משוון זה אם למצוא $v_{\mathcal{O}}$ נקודת על ידי $\mathcal{P}$, כך $\mathcal{O}$ הוא אכן יחיד

מעל $\mathcal{P}$. שנית, אם נבחר את y כך $v_{\mathcal{O}}(y) = 1$ נקבל $e(\mathcal{O}/\mathcal{P})$

מתוך, אם $\mathcal{P}$ ולכן קיים סגור שלם כך $e(\mathcal{O}/\mathcal{P}) = \mathcal{P}^m$ כך $\mathcal{P} = \mathcal{P}^m \mathcal{O}$.

תוצאה: כסימונים של משפט 83 הוכח שגם F היא הנחנה או ספיריטלי טהורה של

E מעל q וזאת K הוא שזה מסתכל אזי $\mathcal{P} = q \mathcal{O}$ לכל מתוך האסות $\mathcal{P}$

של E

למה 97: יהי F/L הרחבה של שדה פונקציות E/K . נניח L

אלגברי ספיקולי מעל K ו- $F=LE$. אזי אין $\delta \in F$ כזה שמתקן באופן

δ שהוא מסעל מעל E או שהוא אי ספיקולי מעל E .

הוכחה: נניח בשלילה שקיים $\delta \in F$ מתקן δ שהוא מסעל מעל E (או שהוא

יהי δ ומתקן, היינו ש- E המונח מתחת δ

אי ספיקולי מעל E). ויהי y אגרי δ כך F $\psi_\delta(y)=1$ (או δ

$\bar{\psi}$ אי ספיקולי מעל E_p). ואז y מתקן להצגה כציונלית (אזכורים

$b_1, \dots, b_m$ של L עם מקדמים E . נסמן $K'=K(b_1, \dots, b_m)$

$E'=E(b_1, \dots, b_m)$ אזי $E'=K'E$. יהי δ של K , נסמן δ' את המתקן

הימאני של E' המונח מתחת δ . אזי

$$1 = \psi_\delta(y) = e(\delta'/\delta) \psi_{\delta'}(y)$$

ולכן $e(\delta'/\delta)=1$. מכאן נרד $e(\delta'/\delta) > 1$, כלומר δ' מסעל

מעל K (זאת δ' אי ספיקולי מעל K).

נוכל אפוא להניח, בלי הפסדת הכלליות E הוא הרחבה ספיקולית סופית

של K . יהי δ של K , אזי מעבר לפסוק שלטא של L/K נוכל להניח E

L הוא הרחבה שלטא של K . אזי F הוא הרחבה שלטא סופית של E

המסומן (3) כדמוצ פפ נקבל ככל אחד מהתקרים δ

$$|I(\delta)| = [F_\delta : F_p], \quad e(\delta/p) > 1$$

קיים אפוא $\delta \in I(\delta)$ שאינו גזומה

אם $b \in L$ אזי $\bar{b} = b$. כמו כן $\overline{\bar{b}} = b$, לכן נגדיר $I(8)$.

לכן $b = \bar{b}$. נניח שיש $a \in E$ המקומה a אינו.

עם שאנו כל אחד של F המקומה, סתירה.

משפט 103: יהי F/L הרחבה של שדה פונקציות E/K . נניח ש F

אלגנטי ספירלי מעל E . אזי יש F כן מספר סופי של מחלקים ראשוניים

ש הם מספרים מעל E או שאינם ספירליים מעל E .

הוכחה: נניח את המשפט גלשה שלוקים

א. נניח ש F הוא הרחבה גלשה סופית של E .

במקרה זה קיים $z \in F$ כך ש $F = E(z)$. נסמן S את קולצ'ה

של המחלקים הראשוניים $\mathfrak{p}$ של F ש $\sigma \in G(F/E)$ $\neq 1$ כך ש

$0 < \nu_{\mathfrak{p}}(\sigma z - z)$ או σ סדר $(\sigma z^{-1} - z^{-1})$. גורם S היא קולצ'ה סופית

יהי σ מחלק ראשוני של E שהוא מספר מעל E או שאינו ספירלי מעל

E . נראה ש σ שייך ל S . ואכן, כפי שראינו באובמה (מה דפ

קיים $I(\sigma)$ אשר σ שונה מהזהות. אחת משני האחרים z או z^{-1}

שייך ל $\mathfrak{p}$. נניח למשל $z \in \mathfrak{p}$. אזי $\overline{\sigma z} = \bar{z}$, ולכן

$0 < \nu_{\mathfrak{p}}(\sigma z - z)$, כלומר σ שייך ל S .

ד. נניח ש F הוא הרחבה ספירלית סופית של E .

נסמן $\hat{F}$ את סגור גלואה של F מעל E . אזי יש $\hat{F}$ יח מספר
 סופי של מחלקים ראשוניים שהם מספרים או אי ספרקליים מעל E . נחזיקם
 $\hat{F}$ ומן לנו קבוצה סופית המכילה את כל המחלקים הראשוניים של F שהם
 מספרים או אי ספרקליים מעל E .

ז. נניח זוגה E F היא הרחבה אלגברית ספרקלית לשהיא E .
 נסמן $E' = LE$. אזי F/E' היא הרחבה ספרקלית סופית, אם
 מחלק ראשוני של F מסתל או אי-ספרקלי מעל E , אזי לפי למה דפ הוא
 מסתל או אי-ספרקלי כבר מעל E' . לכן מספר המחלקים האלו סופי

53. הוכח שדה ומתחמים

היה F/L הרכבה של שדה הפונקציות E/K אם ואם F/L הוא נאמן

מתקבל מ E/K על ידי הוכחת שדה ומתחמים אם $F = LE$ נאמן

בסעיף 43 שמתקיים זה אם L ספרינלי מעל K אזי כל התחלקיות הראשוניות

של F אינן מסתכסות וספרינליות מעל E

משפט 113: היה F/L הרכבה שדה ומתחמים של שדה הפונקציות E/K אם

L היא הרכבה ספרינלית סופית של K אזי לכל מתקן α של E/K מתקיים

$$\deg_E \alpha = \deg_F \alpha$$

הוכחה: משפט 63 נודע שמספיק להוכיח ש $[L:K] = [F:E]$ ואכן

קיים איבר $b \in L$ כך ש $L = K(b)$ יהי $f \in K[X]$ הפולינום המינימלי של

b אזי f נשאר אי מינימלי מעל E ואכן, אלו היה $f(x)$ מתקין

מעל E קלוקה $f(x) = g(x)h(x)$ הן מתחמים g ו h שיטות E

ול $\bar{K}$ ולכן אם K כן שפרוק היכ להיות טריקיטלי. הואיל ו $F = E(b)$

אז מתקיים ש $[F:E] = \deg f = [L:K]$ ו

הוכחנו למעשה קמפט 113 ש $\lambda = 1$. כאשר כללי יותר נגן (חוביות):

משפט: יהיה שדה הפונקציות F/L מתקבל משדה הפונקציות E/K על ידי הוכחת

שדה ומתחמים. אזי $\lambda_{F/E}$ הוא חזקה של ראשון של K מתקיים $\lambda_{F/E} \neq 1$

אם ורק אם L מופרד (נאריה) מ E מעל K

משפט 123: נניח ששדה המספרים F/L מתקבל משדה המספרים E/K

על ידי הרחבה שדה המקומים. נניח עוד ש L אלגברי ספרקלי מעל K .

יהי σ מהלך ראשוני של F ויהי ρ מהלך הראשוני של E היוצא מתחת

$$\sigma. \quad \rho = L E_{\rho} \quad \text{אזי}$$

הוכחה: כדור e $LE_{\sigma} \subseteq F_{\sigma}$. עלינו להוכיח רק את ההכללה ההפוכה, וזאת

נו נכלל גם להניח, בלי השללה גבולית ש L הוא הרחבה סופית של K .

קרא אנוני $a \in L$ כך ש $L = K(a)$. יהי $\hat{L}$ סגור אלווה של L/K ויהי

σ' מהלך ראשוני של $\hat{F} = \hat{L}E$ היוצא מעל σ . יהי צורה $\bar{z} \in F_{\sigma}$ בעצרת משפט הקרוק הולש נכלל ונחר $\bar{z}$ מילכ

$\bar{z}$ השיוך $\bar{z} \in O_{\sigma}$ כך של האלדוקים הולחוזים $\bar{z}$ מעל K ובעיני O_{σ} .

צורה $F = E(a)$ וכן קיימים $x_0, \dots, x_{n-1} \in E$ כך ש

$$(1) \quad z = x_0 + x_1 a + \dots + x_{n-1} a^{n-1}$$

(היה n ש $n = [L:K] = [F:E]$, [כ] הוכחת משפט 113). יהיו $\sigma_1, \dots, \sigma_n$

של האוטומורפיזמים של F מעל E אזי

$$(2) \quad \sigma_i z = x_0 + x_1 (\sigma_i a) + \dots + x_{n-1} (\sigma_i a)^{n-1} \quad i = 1, \dots, n$$

אם נתייחס ל (2) כשל מדובר משוואות ליניאריות בקי, ע

$$x_k = \frac{\begin{vmatrix} 1 & qa & (\sigma_1 a)^{k-2} & \sigma_1 z & (\sigma_1 a)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \sigma_n a & (\sigma_n a)^{k-2} & \sigma_n z & (\sigma_n a)^{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \sigma_1 a & (\sigma_1 a)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \sigma_n a & (\sigma_n a)^{n-1} \end{vmatrix}} \quad k = 0, \dots, n-1$$

ומכאן, הוא הוא-צדדיות של האיברים $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ והוא שונה מאדם

כי σ ספרינלי מעל K , יור על K , זהו איבר של $\hat{L}$ המונה

הוא קומפוזיציה ליניארית של $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ שכל אחד מהם σ_i $\in \hat{L}$.

כלומר קיימים $c_1, \dots, c_n \in \hat{L}$ כך ש

$$\sigma = c_1(\sigma_1) + \dots + c_n(\sigma_n)$$

לכן $\sigma \in \mathcal{O}_\theta$, אולם $\sigma \in E$ ולכן $\sigma \in \mathcal{O}_p$ וכן N (ו) נקל אפוא

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 + \bar{\sigma}_1 \bar{\alpha} + \dots + \bar{\sigma}_{n-1} \bar{\alpha}^{n-1} \in E_p \cdot L$$

||

הערה: אם K שדה משותף ויהי E שדה פונקציות מעליו, יהי L

הרחבה סופית של K . הוכח ש $F = LE$ הוא שדה פונקציות מעל L . במיוחד

הוכח ש L סגור אלסברית במק F .

הערה: יהי F/K שדה פונקציות, הוכח שכל יצי הרחבה סופית של K שדה המקצחים

אפשר להניח לשדה פונקציות F'/K גדל מעל K מעלה n .

63. שמי וחסד בהרחבה שזה המקצחים.

יחיד L ו E שמי והחזקת של שזה A . נחית שכל m אחרים

$m_1, \dots, m_r$ של L אינם תלויים לינאריות מעל A נשארם אי תלויים לינאריות

מעל E . וסבון פשוט מראה שאם כל A אחרים $x_1, \dots, x_r$ של E שונים

תלויים לינאריות מעל A נשארים אי תלויים לינאריות מעל L . במקרה זה נאמר

ש L ו E מופרדים לינאריות מעל A . אם $L = K(a)$ היא הרחבה אלסברית

והפולינום הוא פריק של a מעל A נשאר אי פריק גם מעל E ואז

L ו E מופרדים לינאריות מעל A . בהוכחה מספיק לראות שאם

E הוא שזה פונקציות מעל A ו L הרחבה ספיריטלית סופית של A אזי

הנאי קלעיל אכן מתקיים ולכן L מופרד לינאריות מעל E מעל A . עקבה

אחרונה זו נשארת קצונה גם אם L מורחב להיות הרחבה אלסברית ספיריטלית

אינה בהכרח סופית.

נחית דוגה ש F/L הוא שזה פונקציות והתקבל על ידי הרחבה שזה המקצחים

שזה הפונקציות E/K , ונחית ש L הוא הרחבה אלסברית ספיריטלית של A .

יהי α מתקן של E/K . אזי

$$L_E(\alpha) = \{x \in E \mid (x) + \alpha \geq 0\}$$

הוא מרחב וקטורי מעל K ממדו מסומן $\dim_E \alpha$ ו

$$L_F(\alpha) = \{z \in F \mid (z) + \alpha \geq 0\}$$

הוא מרחב וקטורי מעל L מממד $\dim_F \alpha$. דבר זה $L_E(\alpha) \subseteq L_F(\alpha)$.
 יתר על כן, אם $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ הם אבות של $L_E(\alpha)$ שאינם תלויים לינארית
 מעל K אזי $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ הם אבות של $L_F(\alpha)$ שאינם תלויים לינארית מעל
 L . לכן $\dim_E \alpha \leq \dim_F \alpha$. דנו על זה דבר זה $L \cdot L_E(\alpha) \subseteq L_F(\alpha)$.
 אם נניח אם הגבלה ההפוכה תקףל משפחה יוצרים של $L_E(\alpha)$ מעל K יוצרת
 את $L_F(\alpha)$ מעל L ולכן $\dim_E \alpha \geq \dim_F \alpha$.
 ונקבל שיון בין הממדים ואכן:

$$L_F(\alpha) \subseteq L \cdot L_E(\alpha) \quad \text{למה 133 א}.$$

$$\dim_E \alpha = \dim_F \alpha \quad (b)$$

הוכחה: יהי $z \in L_F(\alpha)$ זרמי להוכיח ש $z \in L \cdot L_E(\alpha)$. נחול במקרה

ש L הוא גרסה של K שכל איבריה סופית על K . יהי $\alpha \in L$ נוסטאורינגר e .

$L = K(\alpha)$ וזאת $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ כל אבות $g(E/E)$. נזכור ש L יהי

במחנה איסומורפיזם את אבות $g(L/K)$. מהנחה נודע e

$$(1) \quad (z) + \alpha \geq 0$$

יהי σ מילק ראשוני של F/L ויהי p החלק הראשוני של E שממנו

ישר $\sigma \in g(F/E)$ מקיים $\sigma(\alpha) = \sigma(\sigma^{-1} \sigma / p) \sigma_p(\alpha) = \sigma_{\sigma^{-1} \sigma}(\alpha)$ ולכן

$$\sigma_\sigma(\sigma z) + \sigma_\sigma(\alpha) = \sigma_{\sigma^{-1} \sigma}(z) + \sigma_{\sigma^{-1} \sigma}(\alpha) \geq 0$$

$$e \quad (z) + \alpha \geq 0 \quad 1 \quad \sigma z \in L_F(\alpha)$$

זרמה, נגזר, ונגזר מנגזר

$$(2) \quad z = z_0 + z_1 a + \dots + z_{n-1} a^{n-1}$$

כאשר $z_i \in E$: כמו בחברת המסל 123 נגזר מנגזר סקטורים $c_{Rj} \in L$ כך

$$z_R = c_{R1}(\sigma_1 z) + \dots + c_{Rn}(\sigma_n z) \quad R=0, \dots, n-1$$

לכן $z_R \in E \cap L_F(\alpha) = L_E(\alpha)$. נ (2) נגזר מנגזר $z \in L_E(\alpha) \cdot L$

$$\dim_E \alpha = \dim_F \alpha$$

זרמה נגזר L הוא הנתונה ספרטורים K ויהי $\hat{L}$

סגור סלולר L/K ו $\hat{F} = \hat{L}E$, אזי $\hat{F}$ הוא שדה פונקציות מנגזר

$\hat{L}$ (יהיה מנגזר קזמור 81) ומתקיים, לפי הנסקה הקודמת

$$\dim_E \alpha \leq \dim_F \alpha = \dim_{\hat{F}} \alpha = \dim_E \alpha$$

לכן $\dim_E \alpha = \dim_F \alpha$. אז $\dim_E \alpha = \dim_L L \cdot L_E(\alpha)$ (מנגזר)

ומכאן (המקרה) $L \cdot L_E(\alpha) \subseteq L_F(\alpha)$ וכן $L \cdot L_E(\alpha) = L_F(\alpha)$

קל לראות ש (מ) נכון גם להרחבה אלסטריות ספרטורים מנגזר

ולכן גם (2) נכון במקרה זה.

מסל 143 : יהי F/L שדה פונקציות מתקבל על ידי הרחבה שדה מתקנים

מנגזר הפונקציות E/K . נגזר L הוא הרחבה אלסטריות ספרטורים אזי

$$g_E = g_F$$

נסתפק בחברת המתקנה שבו L הרחבה ספרטורים סופית

הנתונה : נבחר מתוך E/K כך ש

$$\deg_E \alpha > \max \{ 2g_E - 2, 2g_F - 2 \}$$

אם $\deg_E \alpha = \deg_F \alpha$ וכן $\deg_F \alpha$ מקיים את א'

השיון הנ"ל. המשפט הימני - יורן נדרש

$$\dim_E \alpha = \deg_E \alpha + 1 - g_E$$

$$\dim_F \alpha = \deg_F \alpha + 1 - g_F$$

||

השיון $g_E = g_F$ נדרש אפוא זוגי מלמעלה ב-3.

הוכחה: השלם את הוכחת המשפט לעקבה שבו L היא היתרון האפקטורי ספריקליטי

לשדה K על ידי שכלול את L ו-3 לעקבה זה (ימצא חסר הוכחת המשפט

$$[E:K] = [F:L] \quad \text{ב-6 ונדרש}$$

כאן כללי יותר אפשר להוכיח

משפט: יהיו F/L היתרון שבה המקדמים של שדה פונקציות E/K ו- K

$$g_E \leq g_{F/K} \leq g_F \quad \text{אם } \lambda_{F/K} > 1 \quad \text{וכן אם } g_F \leq g_E$$