

פרק 2 - משפט רימן-רוך

2.1. מחלקים

יהי F/K שדה פונקציות. מחלק ראשוני של F/K הוא מחלקת שקילות

של אברים של F/K . אם p הוא מחלק ראשוני של F/K אזי מסמן p

את p כמספר את אבריו a במקומות ופולח את אבריו F $\{ \infty, u, \dots, \bar{K} \}$.
המחלק של p , $\deg p$ הוא המעלה של p , $\deg p$ הוא המעלה של p , $\deg p$ הוא המעלה של p .

שדה המספרים הממליים מסומן K_p . והוא יהיה הרחבה סופית של K . מסמן p

הצרכה הממליה p הממליה p $F^x = \mathbb{Z}$.

האברים של החבורה החבורה הממליה p על ידי המחלקים הראשוניים

של F/K יקראו מחלקים של F/K . כל מחלק α של F/K נמן אופן

לשם באופן יחיד $\alpha = \sum p_i$ כאשר p_i חזקה של כל המחלקים

הראשוניים של F/K ו α_p הם מספרים שלמים אשר במעל כלם אפס. מצדד

$\alpha_p = \nu_p(\alpha)$. מחלק האפס מסמן 0 . הפונקציה ν_p היא אדיטור

מצדד סדר חלקי על חבורה המחלקים על ידי

$$\forall p \quad \alpha \leq \beta \Leftrightarrow \nu_p(\alpha) \leq \nu_p(\beta)$$

המחלק של מחלק α מצדד על ידי

$$\deg \alpha = \sum p_i \nu_p(\alpha) \deg p_i$$

זהו מספר שלם. ההצגה $\deg: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}$ היא הומומורפיזם הומו

על הסדר החלקי. ציצינו $\mathcal{D}_0$ הוא חבורה כל המחלקים הממליים

יהי S קבוצה של מחלקים ראשוניים של F/K ויהי α מחלק

של F/K מסוג

$$L(\alpha, S) = \{x \in F \mid v_p(x) + v_p(\alpha) \geq 0 \quad \forall p \in S\}$$

יהי $L(\alpha, S)$ שדה חיתוך וקטורי מעל K . יהי β מחלק מסוג ראשוני על K .

$$L(\alpha, S) \subseteq L(\beta, S) \quad \text{אם} \quad \alpha \leq \beta \quad \text{אם} \quad \text{אם}$$

$$L(\alpha, S_2) \subseteq L(\alpha, S_1) \quad \text{אם} \quad S_1 \subseteq S_2 \quad \text{אם} \quad \text{אם}$$

(2) $L(\alpha, S) = L(\beta, S)$ אם ורק אם $v_p(\alpha - \beta) = 0$ לכל $p \in S$. (הוכחה)

אם S היא קבוצה של מחלקים ראשוניים של F/K , הקבוצה $\mathbb{Z}$ של מספרים שלמים

מחלק של F/K מסוג

$$\alpha_0 = \sum_{p \in S} v_p(\alpha) p$$

למה 2.1: יהי S קבוצה סופית של מחלקים ראשוניים של F/K ויהי α, β

שני מחלקים כך $\alpha \leq \beta$. אם

$$\dim_K \frac{L(\beta, S)}{L(\alpha, S)} = \deg \beta_0 - \deg \alpha_0$$

$$\leq \deg \beta - \deg \alpha$$

הוכחה: נניח (2) נכונה לכל α ונניח $\alpha = \alpha_0$ ו $\beta = \beta_0$. יהי

כן, מספיק להוכיח את הנוסחה עבור $\beta = \alpha + p$ כאשר $p \in S$.

(1) $\dim_K \frac{L(\alpha + p, S)}{L(\alpha, S)} = \deg p$ על ידי הוכחה באינדוקציה

ואכן, לפי משפט הקרוי קרייז, $u \in F$ כך ש

$$\forall q \in S \quad v_q(u) = -v_q(\alpha + p)$$

יהיו $x_1, \dots, x_n$ איברים ב O_p אינם תלויים (יטוריות) מ α

מובילי p . לפי משפט הקרוי קרייז, $y_i \in F$ עבור $i=1, \dots, n$ כך ש

$$v_p(y_i - x_i) > 0$$

$$\forall q \in S, q \neq p \quad v_q(y_i) \geq 0$$

עבור מכל i מתקיימים $v_p(y_i) \geq 0$ ו $\bar{x}_i = \bar{y}_i$, כאשר $\bar{x}_i$ - מסמן

כצורת מובילי p . נסמן $z_i = uy_i$. אז $q \in S$: $v_q(z_i) = v_q(y_i)$

$$v_q(z_i) + v_q(\alpha + p) = v_q(u) + v_q(y_i) + v_q(\alpha + p) \geq 0$$

לכן $z_i \in L(\alpha + p, S)$. מאידך, $z_1, \dots, z_n$ אינם תלויים (יטוריות) מ α

מובילי $L(\alpha, S)$. נניח $a_1, \dots, a_n \in K$ כך ש $\sum_{i=1}^n a_i z_i \in L(\alpha, S)$

$$v_p(\sum a_i z_i) + v_p(\alpha) \geq 0 \quad \text{לכן} \quad v_p(\sum a_i y_i) \geq 1$$

$$\sum a_i \bar{x}_i = 0 \quad \text{לכן} \quad a_1 = \dots = a_n = 0$$

מכאן חסר מקבליהם שכל יתכן של u קטן או שווה ל α מכל $u \in F$

כדי להוכיח את זה יש צורך להוכיח ש $z_1, \dots, z_n \in L(\alpha + p, S)$

אינם תלויים (יטוריות) מ α מובילי $L(\alpha, S)$ ונציג $y_i = u^{-1} z_i$

אז $y_i \in O_p$ עבור $i=1, \dots, n$ ו $\bar{y}_i = \bar{x}_i$, ולכן $y_i \in L(\alpha + p, S)$

אינם תלויים (יטוריות) מ α

2. $L(\alpha)$ המרחב

יהי α מחלק של שדה הפונקציות F/K נוס

$$L(\alpha) = \{ x \in F \mid v_p(x) + v_p(\alpha) \geq 0 \quad \forall p \}$$

אם $L(\alpha) = L(\alpha, S)$ כאשר S היא קבוצה של המחלקים הראשוניים. (כפי שקבל)

ע $L(\alpha)$ הוא מרחב וקטורי מעל K ו $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow L(\alpha) \subseteq L(\beta)$

מחלקי 4 מקבלים שם $\alpha < 0$ אם $L(\alpha) = 0$ ואם $L(0) = K$

למה > 2: יהי α מחלק של שדה הפונקציות F/K ואם $L(\alpha)$ אינו מרחב

אם $\dim \alpha > 0$ ו $\alpha \leq \beta$ הוא מחלק נוסף אז

$$(1) \quad \dim \beta - \dim \alpha \leq \deg \beta - \deg \alpha$$

הפונקציה $\dim \alpha - \deg \alpha$ של מחלקים היא אפוא פונקציה יורדת

הוכחה: נוסח $S >$ את קבוצה של המחלקים הראשוניים המופיעים ממש $\alpha >$

אם $\beta >$ אז

$$L(\alpha) = L(\beta) \cap L(\alpha, S)$$

$L(\beta, S)$

$L(\beta) + L(\alpha, S)$

$$\frac{L(\beta)}{L(\alpha)} \cong \frac{L(\beta) + L(\alpha, S)}{L(\alpha, S)} \subseteq \frac{L(\beta, S)}{L(\alpha, S)}$$

$L(\beta)$

$L(\alpha, S)$

לכן, אם $1 >$

$L(\alpha)$

$$(2) \quad \dim_K \frac{L(\beta)}{L(\alpha)} \leq \deg \beta - \deg \alpha$$

נניח שמה מחלק של α' כך $\alpha' \leq \beta$ ואם $L(\alpha') = 0$ ו $\alpha' >$

לפי (2) $\dim L(\beta) \leq \deg \beta - \deg \alpha' < \infty$ (אם מחלקים α' ו α אז $\dim L(\beta) < \deg \beta$)

אם כן $\dim L(\beta) < \deg \beta$ ו $\dim L(\beta) < \deg \beta$ ו $\dim L(\beta) < \deg \beta$

3.7. המרחקים הראשיים.

נסתכל בה נראים לכל אחד שונה מאפס של F מחלק של F/K . כזו נקראת

נראית נכונה קצת

למה 3.7. אם $x \in F^*$ אזי יש רק מספר סופי של מחלקים ראשיים של F/K

$$v_p(x) \neq 0$$

הוכחה. אם $x \in K$ אזי $v_p(x) = 0$ לכל p . נניח אפוא ש x איננו בקו

מחלק K . יהיו $p_1, \dots, p_n$ מחלקים ראשיים שונים של F/K כך ש $v_{p_i}(x) > 0$.

$$b = \sum_{i=1}^n v_{p_i}(x) p_i \quad | \quad S = \{p_1, \dots, p_n\}$$

למה 2.7

$$\dim_K \frac{L(b, S)}{L(0, S)} = \deg b = \sum_{i=1}^n v_{p_i}(x) \deg p_i$$

אם נניח ש $L(b, S)$ אינו צולה על $[F:K(x)]$ נקבל ש $n \leq [F:K(x)]$ ולכן

למה 2.7

יהיו אפוא $y_1, \dots, y_r$ אנדים של $L(b, S)$ אינם תלויים לינארית מעל K

מחלקו $L(0, S)$. עליה להוכיח שהם אינם תלויים לינארית מעל $K(x)$. ואכן

אם הם היו תלויים לינארית היו קיימים פולינומים $f_j \in K[x]$ שלא כלם אפס כך ש

$$\sum_{j=1}^r f_j(x) y_j = 0 \quad \text{אם} \quad f_j(x) \text{ אפשר לרשם בצורה} \quad f_j(x) = a_j + x g_j(x) \quad \text{כאשר}$$

$a_j \in K$ ו $g_j \in K[x]$ ואפשר להניח שלא כל a_j שווה לאפס. ואכן

מקבלים כי $\sum_{j=1}^R a_j y_j = -x \sum_{j=1}^R g_j(x) y_j$

$$\sum_{j=1}^R a_j y_j = -x \sum_{j=1}^R g_j(x) y_j$$

עבור $i=1, \dots, n$

$$v_{p_i} \left(\sum_{j=1}^R a_j y_j \right) \geq v_{p_i}(x) + \min_j \{ v_{p_i}(g_j(x)) + v_{p_i}(y_j) \} \geq 0$$

$$\text{לכן } \sum_{j=1}^R a_j y_j \in L(0, S) \text{ עבור } i=1, \dots, n$$

$$a_1 = \dots = a_R = 0$$

העקבות למטה $\exists$ נוסף להגדלים x ו- F^* שלם מהמקור, (x)

$$x \in \underbrace{C_p}_{\text{מחלק}} \text{ ו- } x \in \underbrace{K_p}_{\text{מחלק}}, \quad x \in \underbrace{C_p}_{\text{מחלק}} \text{ ו- } (x)_\infty \text{ ו- } (x)_0$$

ההמשכה, $\int$ ו- $\int$ ו- $\int$

$$(x)_0 = \sum_{v_p(x) > 0} v_p(x) p$$

$$(x)_\infty = - \sum_{v_p(x) < 0} v_p(x) p$$

$$(x) = (x)_0 - (x)_\infty = \sum_p v_p(x) p$$

(המשכה) $x \in K^x$ אם ורק אם $(x)=0$ ו- $(x)_\infty \geq 0$ ו- $(x)_0 \geq 0$ ו- $\int$ ו- $\int$

$x, y \in F^x$ ו- $\int$ ו- $\int$

$$(xy) = (x) + (y) \quad (x^{-1}) = -(x) \quad (x')_0 = (x)_\infty$$

הקשרים אלו נובעים באופן ישיר מהמשפטים הקודמים, ומהערה 2 בסעיף 2.

2. P הוא פולינום ב x מעל F ו $x \mapsto P(x)$ הוא איזומורפיזם של F^* למרחב F שציינו.

היא K^* . המרחב F/P נקראת חבורת החיתוך המחזורית של F/K .

ובסעיף 3. C כל האינדקסים הנזכרים נחלקים ל C (אחרת, נקבעת האם C זוגי או אי-זוגי).

$$1 \rightarrow K^* \rightarrow F^* \rightarrow C \rightarrow 0$$

נשים לב ש C הוא חבורת חיתוך, ולכן C הוא חבורת חיתוך של F^* ו C הוא חבורת חיתוך של F^* .

$$\deg(x)_0 \leq [F:K(x)], \quad \deg(x)_\infty \leq [F:K(x)]$$

כדי להוכיח את המשפט, נשתמש באי-שוויון זה.

למה 4: יהי $x \in F^*$ ונניח ש x אינו K -רציונלי, כלומר x אינו K -רציונלי.

$$y^m + f_1(x)y^{m-1} + \dots + f_m(x) = 0$$

כאשר $f_i \in K[x]$ ו P מחלק את f_i על F/K . אם $\nu_P(x) > 0$ אז

$$\nu_P(y) \geq 0$$

$$m \nu_P(y) \geq \min_{1 \leq i \leq m} \{ \nu_P(f_i(x)) + (m-i) \nu_P(y) \} \geq j \nu_P(y)$$

לכן $\nu_P(y) \geq 0$ לכל $1 \leq j \leq m$.

לכן $x \in F^*$ אינו K -רציונלי.

$$\deg(x)_0 = \deg(x)_\infty = [F:K(x)]$$

למה 5: נניח $n = [F:K(x)]$ ו $y_1, \dots, y_n$ אינן F -רציונליות.

אלגוריתם מעל $K(x)$. גל ושלוליות נוסל להניח שה y -ים שלמים
מעל $K[x]$. לפי כמה קי נוסל למצא אפוא γ סגור γ e

$$\gamma(x)_\infty + (y_j) \geq 0 \quad j=1, \dots, n$$

לכן, אם $0 \leq i \leq t$ שלמים אזי

$$(t+1)(x)_\infty + (x^i y_j) \geq 0$$

לכן $x^i y_j \in L((t+1)(x)_\infty)$. גל לראות שהאלגוריתם $x^i y_j$ אינם תלויים ליטוריות

מעל K . מספרים הוא $n(t+1)$. לכן, לפי כמה $2 \geq$

$$(2) \quad n(t+1) \leq \dim ((t+1)(x)_\infty) \leq (t+1) \deg(x)_\infty + 1$$

$$n \frac{t+1}{t+1} \leq \deg(x)_\infty + \frac{1}{t+1} \quad \Leftarrow$$

אי שיוון זה נכון לכל t (שהם t e γ אינו גלוי $t >$). לכן $n \leq \deg(x)_\infty$

כי מצאם אי השיוון גלוי נקל e $n = \deg(x)_\infty$.

תוצאה 5: אם $x \in F^x$ אזי $\deg(x) = 0$.

מחלטה 15 נקד שהסדרה הנכס מצי'קד

$$1 \rightarrow K^x \rightarrow F^x \rightarrow \mathfrak{D}_0 \rightarrow \mathfrak{E}_0 \rightarrow 0$$

כאשר $\mathfrak{D}_0$ ו $\mathfrak{E}_0$ הן חבורות הממלוקים ממעלה אכס ומחבורת מחלוקות

המחלוקים ממעלה אכס.

יחד γ לכן, אנו מקבלים שלכל המחלוקים של F/K וסיכים לאותה

המחלקה יש אומה המצוי, וכן נוכל להוכיח את משפט המחלקה במשפט אחד
המחלקה בה.

הנני מניח: $x \in F^x$ אם x הוא איבר לא קרוי, ואם x איבר q כן
כל m איבר מחלק

$$(3) \quad \dim((x^m)_\infty) - \deg((x^m)_\infty) \geq -q$$

הוכחה: נניח השוויון (2) מתקבל במהלך ההוכחה נקודת

$$(t+1) \deg(x)_\infty \leq \dim((x^{t+1})_\infty)$$

עבור סדר קרוי t , אם t אינו m נקודת

$$\dim((x^m)_\infty) - \deg((x^m)_\infty) \geq \deg(x^{t-j})_\infty$$

לכל $j \leq m$, x אינו מחלק x^j נקודת אי שוויון נכונה לכל $j \leq m$

אם x אינו מחלק x^j נקודת אי שוויון (3) לכל m איבר

הוכחה: נניח $x \in F^x$ אם x הוא מחלק F/K ואם $x \in F^x$ אינו מחלק

$x \mapsto x^2$ מראה איסוריות $L(x)$ $L(x+(z))$ הם שונים

$\dim x = \dim x+(z)$ הוכחה נכונה שוויון זה אינו מתקבל מחלקה מחלקה

42. בעל תימן

הסעיף זה נשען על התוצאה של 41. כדי להוכיח את המשפט הבא, נניח

בעל $g > 0$ (בעל תימן): יהי $x \in F$ אגד לא קרוס ויהי g המספר השלם המזערי

ל x ו $1/g$ היותו

$$1-g = \min_m \dim(x^m)_\infty - \deg(x^m)_\infty$$

אם a מתון, אז

$$(14) \quad \dim a - \deg a \geq 1-g$$

הוכחה: נבחר $a = b - \varepsilon$ כאשר $\varepsilon > 0$ ו b מתון. אז

$$a \leq b \quad \text{לכן} \quad \dim a \leq \dim b$$

$$(15) \quad \dim a - \deg a \geq \dim b - \deg b$$

לכן m של a מתון

$$-m(x)_\infty - b \leq m(x)_\infty$$

לכן m של a מתון

$$\dim(m(x)_\infty - b) - \deg(m(x)_\infty - b) \geq \dim(m(x)_\infty) - \deg(m(x)_\infty) \geq 1-g$$

לכן m של a מתון

$$\dim(m(x)_\infty - b) \geq m \deg(x)_\infty - \deg b + 1 - g > 0$$

לכן קיים $L(m(x)_\infty - b) \geq 1$ וזהו המספר המזערי

$$(z) + m(x)_\infty - b \geq 0$$

$$b + (z^{-1}) \leq m(x)_\infty$$

←

$$(16) \quad \dim(b+(z^{-1})) + \deg(b+(z^{-1})) \geq \dim(m(x)_\infty) - \deg(m(x)_\infty) \geq 1-g$$

זאת, וההצטרף $y \mapsto yz$ מיווה איזומורפיזם $L(b) \xrightarrow{\gamma} L(b+(z^{-1}))$

לכן $\dim b = \dim(b+(z^{-1}))$, $\deg b = \deg(b+(z^{-1}))$ (השוויון האחרון נובע

באופן אחר בסעיף (3)). אבל ימין ב (16) שיה אפילו לא כל שאלה ב (15) יחז

לדברים שני מי השוויון האלו אה (14)

המספר g המופיע במשפט כיוון נקרא הגזס (genus) של עצה

הפונקציות F/K . ממשפט נקבע ש $1-g$ הוא ההסס הנתון של כל הכלואים

$\dim \alpha - \deg \alpha$, כאשר α עובר כל המחלקים של F/K . לכן g

אינו תלוי $x > 0$ והוא מיווה תפוט שחורה של עצה הפונקציות.

אם נבחר $\alpha = 0$ במשפט כיוון נקבל ש $g \geq 0$.

הסיומים הבאים יוקדשו לתקיות הכלואי האין שלילי

$$\dim \alpha - \deg \alpha - 1 + g$$

הצגה משיגה רצון שלן רמן אה משל כיוון-דוק.

67. אבלי

השאלה היא: צורה ועולה, האם נכחי לאחר שלחצום את משפט הקרוי: $\mathbb{N}$
 אכן מתקן, האם q של F/K נכון, אכן q של F . האם קיים $x \in F$ כך ש
 $0 < \psi_p(x - a_p)$ של p . נשים לב לכך שאין השוואה הזו ואין השוואה $\psi_p(a_p)$
 נכחי ש $\psi_p(x) < 0$. הואיל ואין השוואה האחרון יכול להתקיים רק עבור מספר
 סופי של p -ים. אכן מתקבלים שתנאי הכרחי להשוואה תולידה לשאלה שהלכנו הוא
 ש $\psi_p(a_p)$ עבור כל p . תנאי זה נשמש בחישובים להשערה הקטנה.

אבל של F/K הוא סטנדרטי α מקבוצה כל המתקנים הראשוניים של F/K
 למען F ; הערך של α במהלך האומדן p יסומן α_p , ונזכר ש $\psi_p(a_p)$
 עבור כל p . (ההשערה הנשאלת של אצל חתמים α_p לקבל צרכים $\hat{F}_p$
 האצל שהשערה כאן מקרא עם "חלוקה מתבט" (repartition).

מסמן את קבוצת כל האבליים A . אפשר להפך את A לאלמנטים של F
 דעו שההשערה הנכונה: יהיו $\alpha, \beta \in A$ ו $x \in F$

$$(\alpha + \beta)_p = \alpha_p + \beta_p, \quad (\alpha \beta)_p = \alpha_p \beta_p, \quad (x \alpha)_p = x \cdot \alpha_p$$

אם האחר $x \in F$ אפשר לזהות עם האצל שצרכו בכל p שיהיה x עצמו. האם
 נזה אפשר לראות את F מתחברת של A . אכן, יקראו עם אבליים ראשוניים

נתייחס את ההשערה של ψ_p ל A על ידי

$$\psi_p(\alpha) = \psi_p(\alpha_p)$$

לפונקציה המיוחסת ψ_p יהיו אותם התכונות כמו לסטנדרטיה המקורית:

$$\xi_p = \begin{cases} x & p \in S \\ 0 & p \notin S \end{cases}$$

התאמה $\beta \in \Lambda(b)$ אם $L(a, S)$ היא הומומורפיזם ושרט'נה היא

נקח, $b \in F$ ונקח $\beta \in \Lambda(b)$ ומקיים

$$v_p(b - \beta_p) \geq -v_p(a) \quad \forall p \in S$$

אם $b \in L(b, S)$ ו $\beta \in \Lambda(b)$ אז $\beta \in \Lambda(a)$ וההתאמה β היא β .

הוכחנו אפוא את האיזומורפיזם

$$\frac{L(b, S)}{L(a, S)} \cong \frac{\Lambda(b)}{\Lambda(a)}$$

משמע נכח שגודל $\Lambda(a) > 1$.

$$(\dim a - \deg a) - (\dim b - \deg b) \geq 0$$

כאשר $\beta \in \Lambda(b)$ ונקבל

$$\dim a - \deg a = \dim b - \deg b + \dim \frac{\Lambda(b) + F}{\Lambda(a) + F}$$

$$(\dim a - \deg a) - (\dim b - \deg b) = \dim_K \frac{\Lambda(b) + F}{\Lambda(a) + F}$$

הוכחנו: $\beta \in \Lambda(b)$ וההתאמה β היא β .

$$\Lambda(a) + F = (\Lambda(a) + F) \cap \Lambda(b)$$

$$\Lambda(a) + \Lambda(b) = (\Lambda(a) + F) \cap \Lambda(b)$$

$$L(a) = \Lambda(a) \cap L(b)$$

אם $\lambda(b) + F$ ו $\lambda(b)$ הם תת-מרחבים של $\lambda(a) + F$, ו $\lambda(a) + F$ הוא תת-מרחב של $\lambda(a) + L(b)$, אז

$\dim \frac{\lambda(b)+F}{\lambda(a)+F} = \dim \frac{\lambda(b)}{\lambda(a)+L(b)}$

$$\dim \frac{\lambda(b)+F}{\lambda(a)+F} = \dim \frac{\lambda(b)}{\lambda(a)+L(b)}$$

$$= \dim \frac{\lambda(b)}{\lambda(a)} - \dim \frac{\lambda(a)+L(b)}{\lambda(a)}$$

$$= \dim \frac{\lambda(b)}{\lambda(a)} - \dim \frac{L(b)}{L(a)}$$

$$= (\deg b - \deg a) - (\dim b - \dim a)$$

||

$$\dim a - \deg a + g - 1$$

אם $\lambda(a) + F$ ו $\lambda(b)$ הם תת-מרחבים של $\lambda(a) + F$, ו $\lambda(a) + F$ הוא תת-מרחב של $\lambda(a) + L(b)$, אז

כאשר $\lambda(a) + F$ ו $\lambda(b)$ הם תת-מרחבים של $\lambda(a) + F$, ו $\lambda(a) + F$ הוא תת-מרחב של $\lambda(a) + L(b)$, אז

$$\max\{a, b\} = \sum_P \max\{v_P(a), v_P(b)\} P$$

$$\min\{a, b\} = \sum_P \min\{v_P(a), v_P(b)\} P$$

אם $\lambda(a) + F$ ו $\lambda(b)$ הם תת-מרחבים של $\lambda(a) + F$, ו $\lambda(a) + F$ הוא תת-מרחב של $\lambda(a) + L(b)$, אז

$a, b \in \mathbb{Z}$, אז $\max\{a, b\} = \sum_P \max\{v_P(a), v_P(b)\} P$, ו $\min\{a, b\} = \sum_P \min\{v_P(a), v_P(b)\} P$.

$$\lambda(a) = \sum_P v_P(a) P$$

$$\lambda(a) = \{a \in A \mid (a) + a \geq 0\}$$

$$\lambda(a) \wedge \lambda(b) = \lambda(\min(a, b))$$

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

7.2. דיפרנציאלים.

למה ≥ 10 היא סדרה קבועה של מעלה רימן-כירק. כדי לקבל את

הסדרה השנייה של המעלה נעזרים בדיפרנציאל F/K על ההצטרף לטובות- K

על A וזמן K המאפשר על גוף מרחק מהצורה $\Lambda(\alpha) + F$, כאשר

α הוא מחלק של F/K . α הוא מחלק של F/K אם α הוא מחלק של F/K .

הדיפרנציאלים ω המאפשרים על $\Lambda(\alpha) + F$ יסומן $D(\alpha)$ זה

יהיה מרחק וקטורי מעל K האינסופי למרחק הדיפרנציאל $A/(\Lambda(\alpha) + F)$

מחלק $\delta(\alpha)$ יהיה שווה לפחות $\dim_K A/(\Lambda(\alpha) + F)$. נראה ≥ 10 את

מקבילים אנחנו את הסדרה השנייה של המעלה

למה ≥ 11 : אם α הוא מחלק של F/K אזי

$$\dim \alpha = \deg \alpha + 1 - g + \delta(\alpha)$$

הסדרה השלישית של המעלה רימן-כירק תכונה את $\delta(\alpha)$ במחלק של מחלק

כדי לקבל סדרה זו נעזרים באם ω_1 מחלק $\Lambda(\alpha_1) + F$ ו- ω_2 מחלק $\Lambda(\alpha_2) + F$

מחלק $\Lambda(\alpha_1) + F$ אזי $\omega_1 + \omega_2$ הוא מחלק לטובות A של

לזמן K המאפשר על $\Lambda(\alpha_1) \cap \Lambda(\alpha_2) = \Lambda(\min(\alpha_1, \alpha_2))$ זמן

$\omega_1 + \omega_2$ הוא דיפרנציאל. אם $\omega \in D(\alpha)$ ו- $x \in F$ אז

ההצטרף ωx A לזמן K המאפשר על α זה

$\alpha \in A$

ע. א. א. א. א.

$x, y \in F$

$$a \leq b \Rightarrow \Omega(a) \geq \Omega(b)$$

$$\Omega(\min(a, b)) = \Omega(a) + \Omega(b)$$

$$\Omega(\max(a, b)) = \Omega(a) \cap \Omega(b)$$

$$\Omega(\max(a_1, \dots, a_n)) = \Omega(a_1) \vee \dots \vee \Omega(a_n)$$

$$\Omega(\max(\alpha, \beta)) = \Omega(\alpha) \cup \Omega(\beta)$$

$$x \in L(K) \text{ and } \omega \in \mathcal{O}(b) \Rightarrow x \omega \in \mathcal{O}(b)$$

לכן אסור להוציא את הציבור ליהנות מהחורג וקטרוני מזה

$$D(a) \geq D(b) \quad \text{if} \quad a \leq b \quad \text{for} \quad \text{all } a$$

שאלה 12: נתון F/K שדה F הוא $\mathbb{Q}$ ו- K הוא $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
 א. מצא את כל האגונים של F/K .
 ב. מצא את כל האגונים של K/F .

$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$

$\omega = x\omega_0$ $\gamma \in F$ ω ω

$\omega \in D(b)$ $\Rightarrow \omega_0 \in D(b_0)$

(7) $\deg s_r < \deg(b+b_0) + 3 - 3g$

(2) $\delta(x) = -\deg x - 1 + 0$

$$f(x) + b - \gamma \leq \alpha \quad \text{for } x \in L(b - \alpha) \quad \text{and } \gamma \leq \alpha$$

Se $\omega \in D(\omega)$ então $x \mapsto x\omega$ é linear. $x\omega \in D((x)+b) \subseteq D(\omega)$

$x_0 \mapsto x_0 \omega_0$

$V_0 > \int_{\text{ionization}} D(\alpha) |f| L(b_0 - \alpha) d\alpha$

2. YD11 12) NI (1) N 1¹¹⁵

$$\dim V + \dim V_0 = \dim (b - \alpha) + \dim (b_0 - \alpha),$$

- 30 -

$$\begin{aligned} & \deg(b-\alpha) + 1 - g + \deg(b_0-\alpha) + 1 - g \\ &= \deg(b+b_0) + 2 - 2g - 2\deg \alpha \\ &> -\deg \alpha - 1 + g = \delta(\alpha) = \dim_k D(\alpha) \end{aligned}$$

על כן F מכיל את x ו- x_0 כי $V_b \cap V \neq \emptyset$

כלומר $\omega = x^{-1}x_0\omega_0$ וכן $x_0\omega_0 = x\omega$

הכיוון: $\delta(0) = g$ הוא הנכון
 $D(\alpha) \cap D(b) = D(\max(\alpha, b))$ הוא הנכון

משפט 13: לכל $\omega \neq 0$ קיים מתחם יחיד (ω) כך ש- ω מתחלק

$(\omega) = \max_{\omega \in \Omega(\alpha)} \alpha$ אם $(\omega) \geq \alpha$ אז $\Lambda(\alpha)$ הוא וריק אחרת $(\omega) < \alpha$

הוכחה: יהי α מתחם ב- F/K כך ש- $\omega \in D(\alpha)$ אם $x \in L(\alpha)$ אז

$(x) + \alpha \geq 0$ ו- $x\omega \in D(\alpha) + \alpha \subseteq D(0)$ לכן ההעתקה $x \mapsto x\omega$ מהווה

$\dim \alpha \leq \delta(0) = g$ מכיון ש- $D(0) \cap L(\alpha) = L(\alpha)$ נכון
 נראה $\parallel$ מזה

(1) $\deg \alpha \leq \dim \alpha - 1 + g \leq 2g - 1$

אם b הוא מתחם מסתבר כי $\omega \in D(b)$ אז

(2) $\omega \in D(\alpha) \cap D(b) = D(\max(\alpha, b))$
 $\Lambda(\max(\alpha, b)) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(b)$ כי

אם נניח שקיים מתחם γ מעלה מרבית כך ש- $\omega \in D((\omega))$ אז נניח

אם $\omega \in D(\alpha)$ אז וריק אחרת $(\omega) < \alpha$ היחידות של (ω) נכנסת אל היא (2)

$$(x\omega) = (x) + (\omega)$$

אם $x \in F^*$ אז 14

מבטא 14 ומחטט 12 נרצ סאסל כל המהלכים מובנה (ω) מהם מהלך

מהלכים אחר שתינו המהלך הקדמי ונסימן W כל אבר שלה יקרא

מהלך קדמי

87. מעט כיתון-דוק

המעט α הוא הסכום השלילי והסופי של מעט כיתון-דוק

מעט 157: יהי F/K סדר פונקציות, יהי W מרחב קוואנטי, אזי לכל מרחב α

$$\delta(\alpha) = \dim(W - \alpha) \quad (1)$$

$$\dim \alpha = \deg \alpha + 1 - g + \dim(W - \alpha) \quad (2)$$

הוכחה: יהי $W = (w)$ כאשר w הוא דיפרנציאל טונה מאפס, אזי

$$x \in L((w) - \alpha) \iff (x) + (w) - \alpha \geq 0 \iff (xw) \geq \alpha \iff xw \in D(\alpha)$$

כמו כן, לכל איבר $\gamma \in D(\alpha)$ יש הנזרה w עבור $x \in F$, (כי מעט $\gamma \geq 0$), לכן

$$D(\alpha) \xrightarrow{\text{ההעתקה}} w \mapsto x \text{ מרחב איזומורפיס ל-} L(W - \alpha) \text{ על } D(\alpha)$$

עוצמה זו מותנה לנו את (2) .

חלק, γ של המעט נוכח n (א) ומלמה (1) .

כדי לספר את יציאות השמות של מעט כיתון-דוק נוכחיות, אנו המעט הכול

מעט 167: יהי F/K סדר פונקציות

$$\deg 0 = 0 \quad , \quad \dim 0 = 1 \quad (1)$$

$$\deg(x) = 0 \quad , \quad \dim(x) = 1 \quad \text{אם } x \in F^* \quad (2)$$

$$\deg W = 2g - 2 \quad , \quad \dim W = g \quad \text{אם } W \text{ הוא מרחב קוואנטי אזי} \quad (3)$$

$$\dim \alpha = 0 \iff \deg \alpha < 0 \quad (4)$$

$$\dim \alpha = 0 \iff \deg \alpha = 0 \quad \text{אם } \alpha \text{ אינו מ'ל' } (5)$$

$$\dim \alpha = \deg \alpha + 1 - g \iff \deg \alpha > 2g - 2 \quad (6)$$

$$\dim \alpha = g-1 \iff \deg \alpha = 2g-2 \quad (5)$$

הוכחה: הוכחת (16) ו (17) מושגות בהמשך. כפי להוכיח את (18) נזכיר קודם

$$\alpha = 0 \text{ (משפט רימן-רוך) ונקבל מ (16) } 1 = 0 + 1 - g + \dim W \quad \text{לכן } \dim W = g$$

$$\text{אם נזכיר שגם } \alpha = W \text{ (משפט רימן-רוך) נקבל}$$

$$g = \deg W + 1 - g + 1$$

$$\text{לכן } \deg W = 2g-2 \quad \text{וכאשר הוכחנו את (18)}$$

$$\text{אם } \dim \alpha > 0 \text{ ויש קיים } x \in F^x \text{ כן } (x) + \alpha \geq 0 \quad \text{לכן } \deg \alpha \geq 0$$

$$\text{וכאשר הוכחנו (3) אם ניקח לכן } \deg \alpha = 0 \text{ ויש } (x) + \alpha = 0 \quad \text{וכאשר הוכחנו (19)}$$

$$\text{אם } \deg \alpha > 2g-2 \text{ ויש } \deg(W-\alpha) < 0 \text{ ולכן } \dim(W-\alpha) = 0 \quad \text{לפי (3)}$$

$$\text{לכן } \dim \alpha = \deg \alpha + 1 - g \quad \text{לפי משפט רימן-רוך}$$

$$\text{אם } \deg \alpha = 2g-2 \text{ ויש } \deg(W-\alpha) = 0 \quad \text{לכן } W - \alpha = (x) \text{ וזהו}$$

$$\text{מחלק ראשי ו } \alpha \text{ הוא אולי אולי מחלק קטן}$$

נזכיר כי המשפט המשפט 15 לעיל $\dim \alpha$ הוא מספר קטן כי גדול מכל

$$\text{אם } \dim(W-\alpha) \text{ אינו ידוע. דבר סביר להניח כי יש לו מספר מסוים } \deg \alpha > 0$$

$$\text{אם } \deg \alpha > 2g-2 \text{ דבר כזה ממשית עולה וזה } \dim \alpha = \deg \alpha + 1 - g \quad \text{לפי (1)}$$

$$\text{(1) דאן נניח שיש מספר מסוים } \dim \alpha \text{ וזהו מספר מסוים } \deg \alpha$$

נזכיר

הוכחה: הוכחת שאם g' הוא מספר ו W' הוא מחלק כן עלול α מחלק

$$\dim \alpha = \deg \alpha + 1 - g + \dim(W' - \alpha)$$

$$\text{אם } g' = g \text{ ו } W' = W \text{ וזהו}$$

אם $b \neq 0$ ו $\deg b \geq 0$ אז $\deg(a+b) = \deg b$

$$\dim \alpha \leq \dim(\alpha + b) \leq \dim \alpha + \deg b$$

$$\dim \alpha \leq \max(0, \deg \alpha + 1) \quad (*)$$

$$\dim \alpha \leq \deg \alpha \quad \text{אם } \deg \alpha \geq 0 \quad \text{אם } \deg \alpha < 0$$

$$\deg \alpha = 0$$

$$\dim \alpha = 1$$

$$\alpha = \text{div}(a)$$

$$\deg \alpha = \deg a$$

אם $\deg \alpha < 0$ אז $\dim \alpha = 0$ ו $\alpha = 0$ ו $\deg \alpha = -\infty$

אם $\alpha = \sum_{i=1}^n m_i P_i$ אז $\deg \alpha = \sum_{i=1}^n m_i \deg P_i$ ו $\dim \alpha = n$

$$\dim \alpha = \sum_{i=1}^n m_i \deg P_i \quad \text{אם } \deg \alpha \geq 0$$

$$[F:K(x)] = \sum_{i=1}^n m_i \deg P_i$$

אם S קבוצה סופית של נקודות על F/K אז $\dim \alpha = \sum_{P \in S} m_P$

אם $\alpha = \sum_{P \in S} m_P P$ אז $\deg \alpha = \sum_{P \in S} m_P \deg P$

$$\dim \alpha = \sum_{P \in S} m_P \quad \text{אם } \deg \alpha \geq 0$$

9. געט הייזיק הייזיק.

געדענקט זיך נאך א שטודע פאר א שטודע

געט: מ'זאגט א שטודע פאר א שטודע

אין א שטודע פאר א שטודע

אין א שטודע פאר א שטודע

אין א שטודע

אין א שטודע: מ'זאגט א שטודע

$$m \deg q > 2g - 2 + \sum_{p \in S} m_p \deg p$$

אין א שטודע פאר א שטודע

אין א שטודע פאר א שטודע

$$\xi_p = \begin{cases} x_p & p \in S \\ 0 & \text{אנדערש} \end{cases}$$

אין א שטודע פאר א שטודע

אין א שטודע פאר א שטודע

אין א שטודע פאר א שטודע

אין א שטודע