

פונקציות אלגבריות של מסגרת אחד

הרצאות באוניברסיטת תל אביב

נתנו על ידי משה ירדן

במחצית ראשונה של השלש

פרק א: שדות פונקציות והערבות

א. שדות פונקציות של משתנה אחד

יהי K שדה. F תת-שדה של K יקרא שדה פונקציות אלגבריות

מעל K אם F מצר סופית מעל K ואם F אינו אלגברי מעל K .

אנו נצלם את המושג $\dim_K F = 1$, כלומר קיים $\alpha \in F$ אשר

α יקרא בסיס טרנסצנדנטית של F/K

שהוא טרנסצנדנטי מעל K כך ש- F הוועדה אלגברית סופית של $K(\alpha)$. אם

y ויהי אשר מסל של F שהיא טרנסצנדנטי מעל K אזי מתקיים קשר

מובנה $f(x, y) = 0$ כאשר $f \in K[x, y]$ הוא פולינום. שונה מאפס

אשר שם x ואם y מופיעים ויכולו המשוואה $f(x, y) = 0$ נקרא שם x אלגברי מעל $K(y)$

לכן אם y הוא בסיס טרנסצנדנטיות של F/K . F/K יקרא גלגול שדה פונקציות.

אם כל אחד F שהם אלגבריים מעל K מהווה שדה, והתקרא שדה הקבוצים

של F/K . אם נניח $K' = K$, כלומר e א סגור אלגבריות $> =$

א. 2. חבורות סבורות:

חבורה חבורית Γ יתכן עם יחס קטן $<$ ותהיה חבורה סבורה אם

א. לכל α, β, γ מתקיים בדיוק אחד מהיחסים הבאים: $\alpha < \beta$ או $\alpha = \beta$ או $\beta < \alpha$.

ב. אם $\alpha < \beta$ ו $\beta < \gamma$ אזי $\alpha < \gamma$.

ג. אם $\alpha < \beta$ אזי $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

הקבוצה $\Gamma_+ = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma > 0\}$ היא אגודה (חבורה למחצה) ו Γ נהנה להצגה

כאובד זר $\Gamma_+ \cup \{0\} \cup \Gamma_- = \Gamma$, אייך, אם Γ היא חבורה

חלופית חבורית ו Δ היא תת אגודה של Γ כך ש $\Delta \cup \{0\} = \Gamma_-$ אזי

ההצגה $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \in \Delta$ הופכת את Γ לחבורה סבורה.

הצגה: הוכח שאם Γ היא חבורה סבורה אזי ההצגה $\alpha \mapsto \alpha$ (n)

מספר טבעי) היא מונוטונית על Γ לתוך $\mathbb{Z}$.

בדמיון לחבורות סבורות הן $\mathbb{Z}$ (השלמים), $\mathbb{R}$ (הממשיים) ו $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ עם

הסדר הלכסיקוגרפי.

הצגה: תת חבורה Δ של חבורה סבורה Γ מכונה קבוצה אם

$\delta \leq \gamma \leq \epsilon$, $\gamma \in \Gamma$ ו $\delta \in \Delta$ אזי $\epsilon \in \Delta$.

הוכח סמנטיה של ההצגה $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + \Delta < \beta + \Delta$ ו $\alpha \notin \Delta$

הוכח את Γ/Δ לחבורה סבורה.

הצגה: הוכח ש $\mathbb{Z}$ היא תת חבורה קבוצה של $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

3. הערכות, אגרים, ומשני הערכות.

נסמן ν את קבוצת האגרים השונים מאפס על שדה K .

הערכה על שדה F , ואלו הערכות ν מ F^* על חבורה סבורה Γ

(והקראת חבורה הערכים) כך שהקיימים התנאים הבאים:

$$\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b) \quad 1.$$

$$\nu(a+b) \geq \min \{ \nu(a), \nu(b) \} \quad 2.$$

3. ν אינה טריביואלית, כלומר קיים $a \in F^*$ כך ש $\nu(a) \neq 0$.

נוסיף עתה ∞ אל המינימום ∞ ביוזם עם ההערכות הבאות:

$$\infty + \infty = \alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty \quad 1.$$

$$\alpha \in \Gamma \quad \text{לכל} \quad \alpha < \infty \quad 2.$$

אם נכתיב עתה את ν לכל F על ידי שטחיות $\nu(0) = \infty$ ונקבל ש ν

עדין מקיימת את התנאים (א), (ב), (ג).

השמות הבאות מכונות נקל מהדדיות קליל.

$$\nu(1) = 0 \quad \text{ו} \quad \nu(a) = \nu(-a) \quad \text{לכל} \quad a \in F \quad 3.$$

$$\text{אם} \quad \nu(a) < \nu(b) \quad \text{אז} \quad \nu(a+b) = \nu(a) \quad 4.$$

$$\text{אם} \quad i \neq j \quad \text{לכל} \quad \nu(a_i) \neq \nu(a_j) \quad \text{אז} \quad \nu\left(\sum_{i=1}^m a_i\right) \geq \min_{1 \leq i \leq m} \{ \nu(a_i) \} \quad 1.$$

יש לנו שיוון נוסחה.

$$\text{אם} \quad \sum_{i=1}^m a_i = 0 \quad \text{אז} \quad \text{קיימים} \quad i \neq j \quad \text{כך ש} \quad \nu(a_i) = \nu(a_j) \quad 2.$$

הערכות ה p -אגרים ν_p על $\mathbb{Q}$

נקבעה $\{ a \in F \mid \nu(a) \geq 0 \}$ נקראת מושג הערכה על F

היחסים ψ_1 ו ψ_2 של שדה F על החבורות הסדורות Γ_1 ו Γ_2

הקבוצה שקולות לו לזו, אם קיים איזומורפיזם שומר סדר ϕ של Γ_1

על Γ_2 כך שהזדמנות והזדה קומוטטיביות

$$\begin{array}{ccc} F^x & \xrightarrow{\psi_1} & \Gamma_1 \\ \psi_2 \downarrow & \searrow \phi & \\ & \Gamma_2 & \end{array}$$

לפניו אתו מקבלים ש $\phi(a)\psi_1(a)$ אם זרז אם $\phi(a)\psi_2(a)$.

תרגיל 1: א) הוכח שהמשפחה האמיתית המספיק לכן ψ_1 שקולה ל ψ_2 .

ב) הוכח שיש היסקיות של היחסות הוא יכולים, שימשו ולתוצאות.

ג) חשבו היחסות של אגודת שקולים שנים זה (זה).

ד) הוכח שיש ק ו q הם משפחות דפוסיות שונים זה מזה אזי ק אינה שקולה ל ψ_q .

1)

3

1/1

17

17

12

29

12. 1

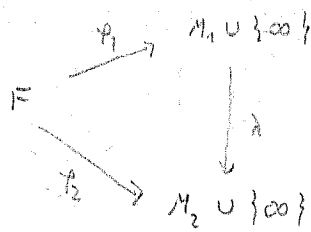
1

244

4

1

בן שהיא שונה ובלתי ניתנת לזיהוי



(אם $\lambda(\infty) = \infty$ אז λ הוא זהות)

החץ הירוקה של F הוא זהות מאחר ש F הוא $\emptyset$ כלומר $a \in F^*$

אם $a \in \emptyset$ או $a^{-1} \in \emptyset$

במקרה $\emptyset \neq \emptyset$ נסתכן q את קבוצת האגפים הלא הפיכים של $\emptyset$.

אם q היא איזומורפיזם של $\emptyset$ נאמר, אם $a \in q$ ו $a^{-1} \in \emptyset$ אז $a \in q$

אם הפיך q $\emptyset$ ולכן $a \in q$ נאמר, אם $a, b \in q$ ו $a^{-1} \in \emptyset$ אז $a \in q$

נניח להיפך $a \in \emptyset$ ולכן $a^{-1} \in q$ אז $a^{-1} + b = b(1 + a^{-1}b^{-1}) \in q$ ולכן $a \in q$

$a \in \emptyset$ חייב להיות הפיך q ולכן יחד עם q הוא יוצר את כל החוג

נסתכן u את אסל של האגפים הפיכים של $\emptyset$ נעזיר תכונה מקורית

u על ידי שכל אחד au של חבורה חסומה הפסלית F^*/u נאמר

אם $a' \neq 0$ ו $a' + b' = c'$ $\Leftrightarrow ab' = c'$ יתקבל

$\Gamma = \{a' \in \Gamma \mid a \in \emptyset\}$ ו $\Gamma_+ = \{a' \in \Gamma \mid a \in \emptyset\}$ והפירוק $\Gamma = -\Gamma_+ \cup \{0\} \cup \Gamma_+$

הפך לנו את Γ לחבורה חסומה. ההצגה $\Gamma \rightarrow F$ היא ההצגה Γ

יצי $\psi(a) = a'$ ו $\psi(0) = \infty$ נוגע לנו היציבה של F בתכונה חסומה

א. 4. הגדרות של שדה פונקציות רציונליות.

יהי $F = K(t)$ שדה הפונקציות הרציונליות במשתנה t מעל השדה K . קסדיל

זה נקבע את כל הגדרות של F שהן טריגוניאליות על K , כלומר המקומות

$0 = v(a)$ לכל $a \in K$. אם φ הוא האחד הממנים להצרכה v כמו אזי

הצמצום של φ ל- K הוא איזומורפיזם. כלומר הצמצום הרציונלי נתן להיחל אבטא

ש K מוכלל בטור M על φ ו- $\varphi(a) = a$ לכל $a \in K$. נבחין בין שני

מקרים

מקרה א': $\varphi(t) = t \neq \infty$. במקרה זה מוכלל מושג הפולינומים $K[t]$ כתחום ההצרכה

של φ . נסמן φ את האידאל המרכזי של 0 אזי $K[t]_{(0)}$ הוא

איזומורפיזם של $K[t]$ שאינו איזומורפיזם (הוכח!). הוא מוצר אפוא של

יבו פולינום אי פריק $p(t)$ (זכור ש $K[t]$ הוא חוג בעל פריקות חזק עריכית)

כל אבר $u(t)$ של F נמך להצרכה בעזרה

$$(1) \quad u(t) = p(t)^\alpha \frac{f(t)}{g(t)}$$

כאשר α הוא מספר שלם ו $f(t), g(t)$ הם פולינומים זרים ל- $p(t)$

הנצלה זו נובעת

$$(2) \quad \varphi(u(t)) = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ \frac{f(\tau)}{g(\tau)} & \alpha = 0 \\ \infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

למפר, אם $p(t)$ הוא פולינום אי פריק $> K[t]$ ו τ הוא אבר

5. הרחבה של אגריג

יהי F שדה, ψ אגריג, E הרחבה של F , ψ הרחבה של F .

אם ψ הרחבה של F , אז ψ הרחבה של F .
 נסמל ψ הרחבה של F על ידי ψ הרחבה של F .

למה 2 (Chevalley): יהי ψ הרחבה של F על ידי ψ הרחבה של F .

אם ψ הרחבה של F , אז ψ הרחבה של F .

למה 3: יהי ψ הרחבה של F על ידי ψ הרחבה של F .
 נסמל ψ הרחבה של F על ידי ψ הרחבה של F .

למה 4: יהי ψ הרחבה של F על ידי ψ הרחבה של F .

$$\mathcal{O}_p = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathcal{O}, b \in \mathcal{O} \setminus p \right\}$$

הרחבה המקומית של $\mathcal{O}$ היא $\mathcal{O}_p$.
 נסמל $\mathcal{O}_p$ הרחבה של $\mathcal{O}$ על ידי $\mathcal{O}_p$ הרחבה של $\mathcal{O}$.

$$\varphi\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}$$

הרחבה $\mathcal{O}_p$ היא הרחבה של $\mathcal{O}$ על ידי $\mathcal{O}_p$ הרחבה של $\mathcal{O}$.

נכון אפוא להיות, כל הרחבה של $\mathcal{O}$ היא הרחבה של $\mathcal{O}$.

הרחבה המקומית של $\mathcal{O}$ היא הרחבה של $\mathcal{O}$.

הרחבה $\mathcal{O}_p$ היא הרחבה של $\mathcal{O}$ על ידי $\mathcal{O}_p$ הרחבה של $\mathcal{O}$.

כן אנו קיבלנו $m > n$ סדרות וולריות $a_i, b_j \in P$ כך a

$$(1) \quad 1 = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$$

$$(2) \quad 1 = b_0 + b_1 x^{-1} + \dots + b_n x^{-n}$$

נוכל לבחור את m ו- n כך שיהיו מספרים טבעיים השווים במלואם

האנדר $1 - a_0$ הישיר $\in \mathcal{O}$ ולכן, אם נעביר את a_0 לאגף השמאל (1)

ונכפיל $(1 - a_0)^{-1}$ נקבל משוואה הולגרה

$$(3) \quad 1 = c_1 x + \dots + c_m x^m \quad c_i \in P$$

באופן דומה נקבל מ- (2) משוואה הולגרה

$$(4) \quad 1 = d_1 x^{-1} + \dots + d_n x^{-n} \quad d_i \in P$$

כלי העלאת הולגרות נותן ש חלק מ- a נכפיל את (4) x^m ונצטרף

ל- (3) נקבל משוואה הולגרה (3) מעולה יותר קטנה, כנראה למספריות של m

סדרתם הנכונה אפוא

נניח למשל ש $[x]_{\mathcal{O}} \cdot K$ הנו אידאל אחיד. אזי, לפי הלמה של צוקרן, קיים

$\gamma \in [x]_{\mathcal{O}}$ אידאל מרכזי $\mathcal{O}$ היקול את P . והמתוך של $\mathcal{O}$ עם $\mathcal{O}$ שיה

א P ולכן נוכל לסמן את $\mathcal{O} = \varphi(K)$ $\gamma \in [x]_{\mathcal{O}} / \mathcal{O}$ אם נסמן $\bar{x} = x + \mathcal{O}$

נקבל שההיקף $[x]_{\mathcal{O}} / \mathcal{O} \rightarrow [x]_{\mathcal{O}} \cdot \varphi$ מרחיבה את φ ו- $[x]_{\mathcal{O}} / \mathcal{O}$ הוא שדה

נסמן $\bar{x} = \varphi(x)$ ונקבל ש $[x]_{\mathcal{O}} / \mathcal{O} = K[\bar{x}]$. לכן $\bar{x}$ אלגברי מעל K

כלי העלאת הולגרות נוכל אפוא להניח ש $\bar{x} \in K$

משפט 3: יהי F שדה ויהי σ תה מוג של F . יהי φ הומומורפיזם

של σ לתוך שדה סגור אלגברות M . אזי נהיה להרחיב את φ להומומורפיזם

של F לתוך M או לאתר של F לתוך $\overline{M}$. כפרט, כל אחר של M

שדה של F לתוך $\overline{M}$ נהיה להרחיב את φ לתוך $\overline{M}$.

הוכחה: נתבונן בשל (σ_i, φ_i) שבהם σ_i הוגה מוג של F

המקור את σ ו φ_i הוגה הומומורפיזם של σ_i לתוך M המרחיב את φ

נבחר סדר חלקי על האסל σ_i יזי $(\sigma_i, \varphi_i) \leq (\sigma_j, \varphi_j)$ אם $\sigma_i \in \sigma_j$ ו

φ_j מרחיב את φ_i . לפי הלמה של צורן קיים באסל אחר מרכזי (σ', φ') אם $\sigma' = \sigma$ אזי $\varphi' = \varphi$ הוגה הומומורפיזם. אחרת

משפט 4: σ' הוגה מוג הרחבה של F . ואכן, יהי $x \in F$ אזי, לפי

הלמה של Chevalley נהיה להרחיב את φ ל $\sigma[x]$ או ל $\sigma[x']$

אין $\sigma' \in \sigma$ או $\sigma' \in \sigma$. אם נמשיך נבחר $\sigma[x] = \sigma$ לכל

$\sigma' \in F - \sigma$ נקבל σ הוגה אחר של F לתוך $\overline{M}$ המרחיב את φ .

הערה 4: אם F/K הוגה שדה פונקציות ו t הוגה אחר של F טרנסצנדנטי

מעל K אזי קיימת הרחבה σ של K/K כך $\sigma(t) \in \sigma$.

הוכחה: נבחר הומומורפיזם $K \rightarrow K[t]$ מעל K על ידי שילוח t

ל t באסל. נרחיב הומומורפיזם זה לאתר של F . ההרחבה σ המבוקשת

לאחר זה נקיים $\sigma(t) \in \sigma$

א.6. הערכות של שדה פונקציות אלגבריות.

נסת' זה מוכיח שכל הערכות של שדה פונקציות אלגבריות F/K הן דיסקרטיות.

למה 5: יהי $\mathcal{U}$ הערכה של שדה F , יהי E תת שדה כך ש F/E

$$\text{הכחשה סופית. אזי } (UF^x : UE^x) \leq [F:E]$$

הוכחה: יהיו $x_1, \dots, x_m$ אגפים של F^x כך ש $\mathcal{U}(x_1), \dots, \mathcal{U}(x_m)$ אינן

מתלקות מנות של F^x מוצגות UE^x . אזי $x_1, \dots, x_m$ אינם תלויים לינארית

מעל E . ואכן, אלו היו קיימים $a_1, \dots, a_m \in E$ כך ש $\sum_{i=1}^m a_i x_i = 0$

ולא כל $\sum_{i=1}^m a_i x_i = 0$, אזי נובל להניח קודם כל שבאם מונח האפס אז היו קיימים $(\neq)$

כך ש $\mathcal{U}(a_i) + \mathcal{U}(x_i) = \mathcal{U}(a_j) + \mathcal{U}(x_j)$, כסגירה לכן $\mathcal{U}(x_i) = \mathcal{U}(x_j)$ אינן

$$\parallel \text{מתלקות מנות מוצגות } UE^x$$

הערה 7: תכונה גבוהה סדורה Γ תכונה ארכימדית אם לכל $0 < \alpha \in \Gamma$

ולכל $\beta \in \Gamma$ קיים מספר שלם n כך ש $\beta > n\alpha$.

לדוגמה $\mathbb{Z}$ ו $\mathbb{R}$ הן תכונות ארכימדיות. $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ אינה ארכימדית.

למה 6: תכונה סדורה Γ איזומורפית ל $\mathbb{Z}$ אם ורק אם Γ ארכימדית וקיים

זה אשר תלוי המעצרי.

הוכחה: נסמן δ את האחד התלוי המעצרי. יהי δ אחד מסל של Γ

אזי קיים n שלם כך ש $\delta < n\delta$ (14). לא כל ה- n ים מקיימים את (14).

כי אלו היו הדרגה כך היינו מקבלים ש $\delta - \delta(n-1) < \delta$ כל n שלם, כסגירה למטה.

נוכל לבחור δ מספיק קטן, כך שיהיה $\delta < \epsilon$, ולכן $\delta < \epsilon$.

אם $\delta < \epsilon$, אז $\delta < \epsilon$ ונכון.

אם $\delta < \epsilon$, אז $\delta < \epsilon$ ונכון.

קבלנו כי $\Gamma = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ הוא תת-קבוצה של $\mathbb{R}$.

אז Γ הוא תת-קבוצה של $\mathbb{R}$.

לכן Γ הוא תת-קבוצה של $\mathbb{R}$.

אם Γ הוא תת-קבוצה של $\mathbb{R}$.

אם Γ הוא תת-קבוצה של $\mathbb{R}$.

אם Γ הוא תת-קבוצה של $\mathbb{R}$.

אם Γ הוא תת-קבוצה של $\mathbb{R}$.

אם Γ הוא תת-קבוצה של $\mathbb{R}$.

אם Γ הוא תת-קבוצה של $\mathbb{R}$.

אם Γ הוא תת-קבוצה של $\mathbb{R}$.

אם Γ הוא תת-קבוצה של $\mathbb{R}$.

אם Γ הוא תת-קבוצה של $\mathbb{R}$.

אם Γ הוא תת-קבוצה של $\mathbb{R}$.

אם Γ הוא תת-קבוצה של $\mathbb{R}$.

אז המעלה של אתר

יהי φ אתר של שדה פונקציות F/K . אתו נניח אתר ψ קרוצ

על K . יהי σ מוג והצורה של ψ יהי m האינדקס המרכזי שלו. אזי

מ/ס הוא שדה המקיף את K . הוא יקרא שדה השאינו של ψ ויסומן K_ψ .

משפט 9: K_ψ הוא הכתב אלגברות סופיות של K . יתכן φ כן, אם t

היא כסיס F/K אזי $[K_\psi:K] \leq [F:K(t)]$.

משפט 10: יהי תוצאה של הלמה הבאה:

למה 9': יהי F/E היכולה של שדה יהי φ אתר של F נסמן $\bar{E}$

1 $\bar{E}$ את שדה השאינו של F ו E להתאמה אזי $[\bar{E}:E] \leq [F:E]$

הוכחה: יהיו $x_1, \dots, x_n$ אגרים של F כך ψ סופי עליהם וכן ψ

$\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)$ אינם גלויים (ינאכיות מעל $\bar{E}$). יהיו $a_1, \dots, a_n \in F$ כך ψ

$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ אם לא כל a_i הם שווים לאפס אזי נוכל לעצור

שהם $\neq 0$ נניח $a_1 \neq 0$ נאמן $\varphi(a_1 a_1^{-1}) \neq 0$ אם נחלק את המשוואה a_1^{-1}

ונכפיל את ψ עליה נקבל $\varphi(a_1 a_1^{-1}) \varphi(x_1) + \dots + \varphi(a_n a_1^{-1}) \varphi(x_n) = 0$ שיהיה $\varphi(x_1) + \varphi(a_2 a_1^{-1}) \varphi(x_2) + \dots + \varphi(a_n a_1^{-1}) \varphi(x_n) = 0$ שיהיה

בצורה משפט 8 נוכל להגדיר את המעלה של ψ כמעלה ההכרחי

$\deg \psi = [K_\psi:K]$ אם φ הוא אתר של F/K המקיף ψ אזי $\bar{K}_\psi \cong_K \bar{K}_\varphi$

ו/כן $\deg(\psi') = \deg(\psi)$

אם α גלוי של הערכה

ארכימדיות

משפט 10: יהי F שדה ויהיו $v_1, \dots, v_n$ הערכות של F גלויות חסתי הערכה

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ >0, אם $\alpha_i \neq \alpha_j$ לכל $i \neq j$ אזי קיים $x \in F$ כך ש

$$v_i(x) > 0 \text{ ו } v_j(x) < 0 \text{ לכל } 2 \leq i \leq n$$

הוכחה: (כאמרו, צ"ח) $n=2$ במקרה $n=2$ נניח אפילו את נכונות

המשפט עבור $n-1$ ונניח n

ראשית נבחר $y \in F$ כך ש

$$v_i(y) < 0 \text{ , } v_j(y) > 0 \text{ , } i=2, \dots, n-1$$

אזי, $\alpha_1 \neq \alpha_n$, לכן קיים $z \in F$ כך ש

$$v_1(z) < 0 \text{ , } v_n(z) > 0 \text{ ,}$$

נבחר עתה m גדול מספיק עבורו כך שגם $m \leq i \leq n$ ואז $v_i(z) < 0$ אזי

ארכימדיות

$$v_1(y) < v_1(z^m) \text{ , } v_i(z^m) < v_i(y) \text{ , } i=2, \dots, n \text{ , } x = y + z^m \text{ , } y, z \in F$$

אם הנכונות הערכה של $v_1, \dots, v_n$ אין ארכימדיות אזי אפשר להחליש

את הנחות המשפט ולדרוש רק, ש $\alpha_i \neq \alpha_j$ לכל $i \neq j$ כדי להוכיח

שדה F עליו להוכיח את הלמה הקודם

למה 11: יהי F שדה ויהיו v, v' הערכות של F גלויות חסתי הערכה

θ, θ' >0, נניח ש $\theta' \leq \theta$ וסדרות הערכה של v ו v'

אין ארכימדיות אזי $\theta' = \theta$

הוכחה: נניח בשלילה שקיים $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ כזה ש $u(a) < 0$ ו $u(a) > 0$.

יהי $b \in F^*$ כך ש $u(b) < 0$. מאינדיקציות של $(F^*)^*$ נובע שקיים n סדסי כך ש

$$(1) \quad u(a^{-n}b) = n \cdot (-u(a)) + u(b) > 0$$

מאידך, נניח ש $u(a^{-n}b) < 0$ נסמן $c = a^{-n}b$. אזי $c \neq 0$.

אכן $c \neq 0$, לכן $u(c) < 0$, כסמיכה ל (1).

בהנחה שהצורות הגורמת של $u_1, \dots, u_n$ משפט 10.1 נכח לא יקראו להלן.

אם תנאי המשפט אולם אם למצק את תוצאתו - נובל להוכיח שקיים $x \in F$ כך ש

$$u_i(x) < 0 \quad \text{ו} \quad u_j(x) < 0 \quad \text{ל} \quad 1 \leq j \leq n$$

ואכן, נבחר קוצים $x_i \in F$ כך ש

$$u_i(x_i) < 0, \quad u_j(x_i) < 0, \quad i=1, \dots, n$$

שנית נבחר $y \in F$ כך ש $u_1(y) < 0$. אם נבחר מ מספיק גדול ונסמן

$$x = x_1 + y$$

נבי לזכור את הצורה החדשה ביותר של המשפט נוכח שזה למעשה

למעשה $u_1, \dots, u_n$ יקראו הצורות לא שקילות של שדה F גדולות

הצורות הצורות האינדיקציות $u_1, \dots, u_n$ הם אברים בחבורת ההצורות המגדלות

ל/5 קיים $x \in F$ כך ש

$$u_i(x-1) > p_i, \quad u_j(x) > p_j, \quad i=1, \dots, n$$

הוכחה: קיים $y \in F$ כך ש-

$$v_i(y) > 0, \quad v_i(y) < 0 \quad i = 2, \dots, n$$

נסמן $x = (1+y^m)^{-1}$ כאשר m מספיק גדול. אזי

$$v_i(x-1) = m v_i(y) - v_i(1+y^m) > p_i,$$

$$v_i(x) = -v_i(1+y^m) = -m v_i(y) > p_i \quad i = 2, \dots, n$$

אנו נאמר שכל צב הדיכנות $v_1, \dots, v_n$ של שדה F אינה גלוייה, אם

לכל $a_1, \dots, a_n \in F$ ולכל $p_1, \dots, p_n$ גדולות הדיכנות והמאזנות קיים $x \in F$

$$v_i(x - a_i) > p_i \quad i = 1, \dots, n$$

למה 13: אם $v_1, \dots, v_n$ הדיכנות או שקולות של שדה F גדולות

הדיכנות הדיכנות ארכימדיים אזי $\{v_1, \dots, v_n\}$ אינה גלוייה.

הוכחה: יהיו $a_1, \dots, a_n$ ארכימדי של F ויהיו $p_1, \dots, p_n$ ארכימדי של הדיכנות

הדיכנות והמאזנות. נסמן

$$p'_i = p_i - \min_{1 \leq j \leq n} v_i(a_j)$$

לפי למה 12 קיים עבור כל i אבר $x_i \in F$ כך ש-

$$v_i(x_i - 1) > p'_i, \quad v_j(x_i) > p'_j \quad \text{for } j \neq i$$

נסמן $x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ ונקבל ש-

$$v_i(x - a_i) > p_i$$

לנסות נוכח את

משפט 14 (משפט אי הנגות של הערכיות): יהיו $u_1, \dots, u_m$ הצרכות לא

סקולות של שדה F בזוגות הצרכות ארכימדיים. יהיו $a_1, \dots, a_m \in F$

יהיו $p_1, \dots, p_m$ הצרכות הוורידה הארכימדיים. אזי קיים $x \in F$ כך ש

$$u_i(x - a_i) = p_i, \quad i = 1, \dots, m$$

הוכחה: לפי למדנו כי קיים $y \in F$ כך ש

$$u_i(y - a_i) > p_i, \quad i = 1, \dots, m$$

נבחר $b_i \in F$ כך ש $u_i(b_i) = p_i$ אזי, לפי למדנו כי קיים $z \in F$ כך ש

$$u_i(z - b_i) > p_i$$

1)

אזי $x = y + z$ יקיים את הנדרש.

משפט 8 ומשפט 14 אנו מקבלים

הוצאה 15: אם $u_1, \dots, u_m$ הן הצרכות לא סקולות של שדה פונקציות F/K

$a_1, \dots, a_m$ הם איברים של F ו $p_1, \dots, p_m$ הם מספרים שלמים אזי קיים

$$x \in F \text{ כך ש } u_i(x - a_i) = p_i, \quad i = 1, \dots, m$$

הוכחה 16: לכל שדה פונקציות F/K יש אינסוף איברים לא סקולרים.

הוכחה: נניח בשלילה שקיימים רק מספר סופי של איברים לא סקולרים. יהיו

$u_1, \dots, u_m$ הצרכות הוורידה הארכימדיים. קיים $x \in F$ כך ש $u_i(x) > 0, \quad i = 1, \dots, m$.

אזי $\sigma(x-1) = \sigma(x)$ זיך $\sigma(x-1) = \sigma(x)$ און $\sigma(x-1) = \sigma(x)$ און $\sigma(x-1) = \sigma(x)$

אם $x-1$ איז א פרימאל, דאן $\sigma(x-1) = x-1$ און $\sigma(x) = x$ און $\sigma(x-1) = \sigma(x)$

און $\sigma(x) = x$ און $\sigma(x-1) = \sigma(x)$ און $\sigma(x-1) = \sigma(x)$

ברעזל: א) וועט איר זען אז $\sigma(x) = x$ און $\sigma(x-1) = \sigma(x)$

ב) וועט איר זען אז $\sigma(x) = x$ און $\sigma(x-1) = \sigma(x)$