6. אינטגרלים קוויים

הגדרה: שדה משמר זה טוררי
\[ \nabla U(x,y) = F(x,y) \]
ewhere \( U(x,y) \) הוא שדה וקטור. ריצף החומרים \( D \) ואם כבלי פוטנציאל סקלרית ריצפים \( U(x,y) \) לכל \( F(x,y) \).

המשיים 1: אינטגרל שאינו תלוי במסלול

\[ \int_{AB} Pdx + Qdy \]

ההגדרה: \( F \) השדה משמר פוטנציאלי של \( U \) ש硗

המשיים 2: אם השדה \( F \) משמר אזי

\[ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \]

המכסה: \( F \) שדה משמר אם ורק אם

\[ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} = P = \frac{\partial U}{\partial y} = Q \]

המהדר: הינו שדה משמר קיים פונקציה פוטנציאלי \( U \).

המשיים 3: \( \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \)

המשיים: \( F \) שדה משמר אם ורק אם

\[ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \]
\[ F(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j \]

If the vector field \( F \) is defined and continuous in the domain \( D \), then
\[ \oint_{L} F \cdot dr = 0 \]

for all closed paths \( L \) in the domain \( D \).

**Example 8:**
Consider the path integral
\[ \int_{C} \left( x^2 e^y + x \ln(y+1) \right) dx + \left( \frac{1}{3} x^2 y e^y + \frac{x^2}{2(y+1)} \right) dy \]

where \( C \) is the path from \( (0,0) \) to \( (1,1) \) and back to \( (0,0) \).

We have
\[ \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 y e^y + \frac{x}{y+1} = \frac{\partial Q}{\partial x} \]

**Solution:**
\[ I_1 = \int_{0}^{1} x^5 dx = \frac{1}{6} \]
\[ I_2 = \int_{0}^{1} \left( \frac{1}{3} x e^y + \frac{1}{2(y+1)} \right) dy = \left[ \frac{1}{6} e^y + \frac{1}{2} \ln(y+1) \right]_{0}^{1} = \frac{e}{6} + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{6} \]

Therefore,
\[ I = I_1 + I_2 = \frac{e}{6} + \frac{1}{2} \ln 2 \]
דוגמה 9: "אינטגרל" "מעט" משמר

\[ \int_{e}^{\infty} \left( \frac{e^{y}}{x^2} + 2xy + y \right) dx + \left( x^2 - \frac{e^{y}}{x} - 1 \right) dy \]

(1,0) \text{ - } \text{לato C1}

הינת הקטן העמודה \( x = e^y \)

פתרון:

\[ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{e^{y}}{x^2} + 2x + 1 \]
\[ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{e^{y}}{x^2} + 2x \]

נבדוק אם השדה משמר: \( \text{ולכן, \( \int_{e}^{\infty} \left( \frac{e^{y}}{x^2} + 2xy + y \right) dx + \left( x^2 - \frac{e^{y}}{x} - 1 + x \right) dy - xdy \)} \]

נתון את הת르נייל \( \text{וכך נקבל את האינטגרל המשמר שדה משמר.} \)

עידור 2: השתיים \( \text{ברראים ברז'רנול הדרפרגניאלי שłuל נבר ב感謝 מסלול המocumented משני קים שישם} \)

(1,0) \( \text{השתתגר את C2 ואת המתחבר את C1} \)

\[ \int_{1}^{e} \frac{1}{x} = -1 \]

לכל \( \text{ולכן}, \( dy = 0 \quad y = 0 \quad (e,0) \text{ - } (1,0) \)

לכל \( \text{ולכן}, \( dx = 0 \quad x = e \quad (e,1) \text{ - } (e,0) \)

\[ \int_{e}^{1} (e^2 - \frac{e^{y}}{e} - 1 + e) dy = e^2 - \frac{e^{y}}{e} - y + ey \]

נתון את \( \text{האינטגרלים ונקבל} \)

\[ e^2 : \text{השיטה הסופית היא} \int_{x=e^t}^{1} e^y dy = e - 1 \]

דוגמה 10: "השיטות האינטגרלי" לוסף את \( \text{האינטגרלים} \)

\( I = \int_{L} (2x + 3y) dx + (3x - 2y) dy \)

 рассматירה \( \text{שהפונקציה \( P \) \( Q \) \( U \) \( g \) \( V \) \( h \) \( f \) \( k \) \( m \) \( n \) \( o \) \( p \) \( q \) \( r \) \( s \) \( t \) \( u \) \( v \) \( w \) \( x \) \( y \) \( z \) \)}

езультטים פונקציה הפונקציות: \( \text{שהפונקציה \( P \) \( Q \) \( U \) \( g \) \( V \) \( h \) \( f \) \( k \) \( m \) \( n \) \( o \) \( p \) \( q \) \( r \) \( s \) \( t \) \( u \) \( v \) \( w \) \( x \) \( y \) \( z \) \)}

\( \frac{P}{Q} = 2x + 3y \quad Q(x,y) = 3x - 2y \)

ויינו: \( \frac{\partial P}{\partial y} = 3 \quad \text{ולכן, \( \frac{\partial Q}{\partial x} \)} \)

הפונקציה \( \text{מקימי \( U(x,y) \)} \)

\[ \int_{L} P(x,y) dx = \int_{L} (2x + 3y) dx = \frac{2x^2}{2} + 3yx + g(y) \]

معنى של \( \text{מקימי \( U(x,y) \)} \)

\[ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) = 3x - 2y = 3x + g'(y) \]

 khăn \( \text{מקימי \( U(x,y) \)} \)

\[ U(x,y) = x^2 + 3yx - y^2 + c \]

וזא: \( I = U(1,3) - U(0,0) = 1 + 9 - 9 = 1 \)
נראה שבכל מסלול אחר התוצאה תהיה זהה. למשל נקח את העקום:

\[ y = f(x) = x^2 + 2x \]
\[ L = \{(t, t^2 + 2t) \mid 0 \leq t \leq 1\} \]

\[ x'(t) = 1, \quad y'(t) = 2t + 3 \implies x(t) = t, \quad y(t) = t^2 + 2t \]

אז

\[ I = \int_L (2x + 3y)dx + (3x - 2y)dy = \int_0^1 (2t + 3(t^2 + 2t))dt + (3t - 2(t^2 + 2t))(2t + 2)dt = \]
\[ = \int_0^1 (2t + 3t^2 + 6t)dt + (-4t^3 - 6t^2 - 2t)dt \]
\[ = \int_0^1 (-4t^3 - 3t^2 + 6t)dt = \left[ -\frac{4t^4}{4} - \frac{3t^3}{3} + \frac{6t^2}{2} \right]_0^1 = 1 \]

משפט גרין

נראת את ההקשר בין אינטגרל קווי במישור לאינטגרל כפלי. יהי תחום פורק \( D \) ש chatte עקום פתוח הולך למקוטעין \( L \) עם כיוון חיובי. יהי \( P \) ו- \( Q \) אינטגרלים מ- \( D \),_DOCUMENT_2\, ו- \( \frac{\partial Q}{\partial x} \) ייצוג \( P \) ו- \( \frac{\partial P}{\partial y} \) ייצוג \( Q \) כך ש:

\[ \oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \]

דוגמה 11: חשב את:

\[ \iint_D \left( xy^2 + e^{\sin x} + y \right) dx + yx^2 dy \]

(2) משטת התלות הבנייתית היא \( I = -\iint_D dxdy \) המסופת נרמי \( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy - (2xy + 1) = -1 \)

חישוב המשטח המסוופי:\ \( \Gamma \) תחום כ handleError: \( D \) תחום כ handleError: \( \gamma \) חゾי החובית.
שלב ראשון: התחום \( D \) הוא המתחם הנמצא בין הקווים \( x = a, y = b, y = y_1(x), y = y_2(x) \).

שלב שני: אם נבצע פעולה דומה עבור תחום חצי מלבן מהסוג שני נקבל:

\[
\oint_{L} Pdx + Qdy = \int_{L} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy
\]

הערה: \( \oint \) הוא השדה \( F \) בocus המקיים את טורי משפט גרין או יראני A פעלול את התחום לכל ההתחומים.
דוגמاة 12

א. אם תנאי המשטף יאינן מתוקיים הפונקציות הפועלות המשמשות נוגבל תלוצרות לא נוגעים לביניהם הנחיה הבאה.

$$ L: x^2 + y^2 = R^2 \quad F = \frac{-y}{x^2 + y^2} + i \frac{x}{x^2 + y^2} $$

המיניסטים \( P \) ו- \( Q \) איים לפרש את מתמטות הסדר (גאומטריה המתקדמת) ולהבין את האינטגרל בפיזור מישר:

$$ 0 \leq t \leq 2\pi \quad x = R \cos t \quad y = R \sin t $$

עניב הגרף של הפונקציה עד

$$ \int P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_0^{2\pi} \left( \frac{R \sin t R \sin t}{R^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} + \frac{R \cos t R \cos t}{R^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} \right) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi $$

אם נסתה להשמית המשטח וריב פונקציה זו נקבל:

$$ Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0 $$

ב. אם זוהי הקודמות של המשפט ולהתוסך התווחים:

$$ L : (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 1 \quad F = \frac{-y}{x^2 + y^2} + i \frac{x}{x^2 + y^2} $$

אנו הפונקציות \( P \) ו- \( Q \) ריצוף מתמטות ההסוס על יدى כי היא משמשת את האינטגרל של המுונק חסום.

$$ \int_0^{2\pi} \left( \frac{R \sin t R \sin t}{R^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} + \frac{R \cos t R \cos t}{R^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} \right) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi $$

כ. נוכל לשנות את התוסכים באומרgementdots כי סומן את האינטגרלים חסמי התווחים:

$$ D \quad L $$

נסומן \( L \) את התווחים של şש שמח פונקציה \( F \) הג. \( D \) את התווחים של şש פונקציה \( F \) הג. \( D \)

ואם נוכל להשיטם במשペット יריי כי ל秊ש את האינטגרלים:

$$ D - D $$

אם נבחד את התווחים

"
\[ \oint_{C} \left( Q + P \right) dy = \int_{L} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx + \int_{D} \left( \frac{y^2 - x^2}{\left( x^2 + y^2 \right)^2} - \frac{y^2 - x^2}{\left( x^2 + y^2 \right)^2} \right) dxdy = 0 \]

כמובן:

\[ \oint_{C} \left( Q + P \right) dy = \int_{C} \left( P dx + Q dy \right) - \oint_{C_{1}} P dx + Q dy = 0 \]

את האינטגרל 결חה ישירות באמצעות השיטה הפרמטרית:

\[ x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \]

\[ \int_{C_{1}} P dx + Q dy = \frac{2\pi}{a^2} \left( \frac{a \cos t}{a^2} - a \sin t \right) + \left( \frac{a \cos t}{a^2} \right) dt = \frac{2\pi}{a^2} \left( \frac{a^2 \cos t}{a^2} - a \sin t \right) + \left[ \frac{a \cos t}{a^2} \right]_{0}^{2\pi} = 2\pi \]

דוגמה 14

נתון שדה כוח וקטורי

\[ F(x, y) = (x^2 + y^2)i + (x - 2y + 1)j \]

B(1,-1) A(0,0) la�ודדה על ידי הפרבולות

\[ x = y^2 \]

לאורף הפרבולה

\[ W = \oint_{L} P dx + Q dy = \int_{L} \left( x^2 + y^2 \right) dx + \left( x - 2y + 1 \right) dy = \]

\[ y = t \quad dy = dt \quad x = t^2 \quad dx = 2tdt \quad (x(t), y(t)) = (t^2, t) \quad -1 \leq t \leq 0 \]

\[ = \int_{0}^{1} \left( t^2 + t^2 \right) 2tdt + \int_{0}^{-1} \left( t^2 - 2t + 1 \right) dt = \left[ \frac{2t^6}{6} + \frac{2t^4}{4} \right]_{0}^{1} + \left[ t^3 - \frac{2t^2}{2} + t \right]_{0}^{-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 1 - 1 = -1.5 \]

ב. השטחmos במשטח גרין כדי לחשב את העבודה המתבצעת בתנועת החלקינまって לאורך מסלול הסגור

\[ y = -x^2 - 1 \quad x = y^2 \]

נוד כי המומר חצי המשולש חצי הפרבולה על ידי הפרבולה

\[ y = -x^2 - 1 \quad x = y^2 \]

\[ W = \oint_{L} \left( x^2 + y^2 \right) dx + \left( x - 2y + 1 \right) dy = \oint_{D} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{D} (1 - 2y) dxdy = \frac{1}{3} \int_{x}^{e} (1 - 2y) dydx = \frac{19}{30} \]

מבחן 31.1.2011 מועד א' שאלה 5ב.

חשב את

\[ \int_{L} \left( 2x - 1 \right) y^3 e^x dx + 3x^2 y^2 e^x dy \]

משתר载体

\[ L = \left\{ x(t) = 1 + \sin^2 (2\pi t^2), \quad y(t) = t, \quad 1 \leq t \leq 3 \right\} \]

A. הווה הקטע L. ב. הווה המשולש \((x - 9)^2 + (y - 7)^2 = 9\) דוגניขาועך.

פתרון:

\[ Q(x, y) = 3x^2 y^2 e^x \quad P(x, y) = (2x - 1)y^3 e^x \]

A. הפונקציות ה意义上的 מספריות ועומדים על משטח רציף רימוג של כל \( x \neq 0 \).
\[ Q_x = 3 \cdot 2xy^2 e^{-\frac{1}{x}} + 3x^2 y^2 e^{-\frac{1}{x}} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = 6xy^2 e^{-\frac{1}{x}} - 3y^2 e^{-\frac{1}{x}} = (6xy^2 - 3y^2)e^{-\frac{1}{x}} \]

\[ P_y = (2x - 1)y^3 e^{-\frac{1}{x}} = 3(2x - 1)y^3 e^{-\frac{1}{x}} = (6xy^2 - 3y^2)e^{-\frac{1}{x}} \]

For all \( x \neq 0 \)

Choose a domain \( D \) that is the positive half-plane \((x, y) \geq 0\). The field \( F = (Q, P) \) is defined in \( D \) with partial derivatives continuous. Therefore, for all points in \( D \)

\[ F \text{ is conservative on } D. \]

We check that the path \( L \) is contained in the domain \( D \).

For example, choose a straight line between the points \( A(1,1) \) and \( B(1,3) \).

\[ \int_L (2x - 1)y^3 e^{-\frac{1}{x}} dx + 3x^2 y^2 e^{-\frac{1}{x}} dy = \int_3 3t^2 edt = d[3^3 - 1] = 26e \]

\[ U(x, y) = \text{the result of the potential} \]

\[ U_y = Q(x, y) = 3x^2 y^2 e^{-\frac{1}{x}} \]

\[ U(x, y) = \int_y Q dx = \frac{1}{3} 3x^2 y^3 e^{-\frac{1}{x}} + g(x) = x^2 y^3 e^{-\frac{1}{x}} + g(x) \]

\[ U_x = 2xy^3 e^{-\frac{1}{x}} - x^2 y^2 e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} + g'(x) = (2x - 1)y^3 e^{-\frac{1}{x}} + g'(x) = P(x, y) = (2x - 1)y^3 e^{-\frac{1}{x}} \]

\[ g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = c : \text{for all} \]

\[ U(x, y) = x^2 y^4 e^{-\frac{1}{x}} + C \]

\[ U(1,3) - U(1,1) = 27e - e = 26e \]

Therefore, \( \rho = (9,7) \) is a Hopf flow of the field \( E \) at \((0,0)\).
דוגמה

נתון השדה הוקטורי

\[ \mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{4x - y}{4x^2 + y^2}, \frac{x + 4y}{4x^2 + y^2} \right) \]

משוב את \( L \)

\[ \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \]

I. \( (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1 \)

II. \( (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 100 \)

פתרון

I. קיימת נקודת סינגולריות ב \((0,0)\) שיאינה בתחום החסום על \( L \) ואחרים בתחוםزاد השדה משמר: \( P = \frac{4x - y}{4(x^2 + y^2)}, Q = \frac{x + 4y}{4(x^2 + y^2)} \)

\[ P_x = -\frac{(x^2 + y^2) - 2y(4x - y)}{4(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 + y^2 - 8yx}{4(x^2 + y^2)^2} \]
\[ Q_y = \frac{(x^2 + y^2) - 2x(x + 4y)}{4(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 + y^2 - 8yx}{4(x^2 + y^2)^2} \]

\[ \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \]

ככל מקום: כנראה. למטרות נ_iters וכנל נởi השדה משמר: \( \frac{4x - y}{4(x^2 + y^2)} = \frac{x + 4y}{4(x^2 + y^2)} \)

II. כיון שהשדה משמר \( C \): \( x^2 + y^2 = 1 \) - \( C \)

אשר טמון בה - \( L \)

\[ \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \]

ככל מקום: משמר

\[ x = \cos t, \quad y = \sin t \]

\[ \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{4 \cos t - \sin t}{4(\cos^2 t + \sin^2 t)} - \frac{\cos t + 4 \sin t}{4(\cos^2 t + \sin^2 t)} (\cos t) \right\} dt \]

\[ \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left\{ (-4 \cos t \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t + 4 \sin t \cos t) dt \right\} = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} \]