

תרמודינאמיקה – תרגיל מספר 1

נגזרת ודיפרנציאל

1. משוואת המצב של גז אידיאלי הנה: $P V = n R T$

כאשר: P – הלחץ, V – הנפח, n – מספר המולים, T – הטמפרטורה ו R – קבוע הגזים. בהנחה שמספר המולים קבוע,

א. מהו הדיפרנציאל השלם של V כאשר n קבוע. (הנחייה: רשמו קודם את הפונקציה של V , ואז מצאו את הדיפרנציאל).

ב. מהו הדיפרנציאל השלם כאשר מתאפשר שינוי במספר המולים?

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \right]$$

ג. השתמשו בהגדרת הנגזרת החלקית

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{ובקשר:}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

בכדי להוכיח כי עבור פונקציה "טובה" מתקיים:

הערה: תקף לפונקציה ממשית עם נגזרות שניות רציפות

2. משקולת בעלת מסה m תלויה על קפיץ וחופשית לנוע בכל הכיוונים (x, y, z) . האנרגיה הפוטנציאלית שלה נתונה ע"י:

$$E = \frac{1}{2} k [z - (z_0)^2 + (y - y_0)^2 + (x - x_0)^2] + m$$

כאשר k הוא קבוע הקפיץ.

א. מהו הדיפרנציאל של האנרגיה?

ב. האם הוא שלם?

ג. הסבירו מדוע או לחילופין הסבירו מה המשמעות של כך.

$$3. \quad \left(P + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = R \quad \text{משוואת הגזים של ואן דר-ואלס ניתנת ע"י השוויון}$$

כאשר a ו b הינם קבועים, ו T הם הפרמטרים החופשיים.

א. מהו הדיפרנציאל של P ?

ב. האם הוא שלם?

4. נגזרות חלקיות וגדלים תרמודינמיים :

א. הוכיחו, ע"י גזירה מפורשת, כי עבור גז אידיאלי ($PV=nRT$) מתקיים הקשר הכללי שהוכח בכיתה (למספר מולים קבוע):

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1$$

ב. עבור גז ון-דר-וואלאס $\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = R$ מהו $\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T$? (חשבו תחילה מהי הדרך הנוחה ביותר למצוא זאת).

ג. רשמו את הדיפרנציאל השלם של הנפח (המצומצם) עבור גז ון-דר-וואלאס.

5. עבור הפונקציה $Z(x_1, x_2) = 2x_1^2 x_2 + x_1$, המשתנים x_1 ו- x_2 הינם פונקציות של y_1

ו- y_2 :

$$x_1 = 3y_1 y_2 \quad \text{ו-} \quad x_2 = 4y_1 + y_2^2$$

הראו שמתקיים כלל השרשרת:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y_1}\right)_{y_2} = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)_{x_2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)_{y_2} + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)_{x_1} \left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right)_{y_2}$$

6. הוכיחו את הנוסחה הכללית לנגזרת של חזקה:

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

השתמשו בהגדרת הנגזרת:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

ובנוסחת הבינום של ניוטון:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}$$