

**מבחן בקורס תרמודינמיקה סטטיסטית (351.3209)**

פרופ' חיים דימנט

יש לענות על שלוש שאלות מתוך הארבע.

מותר שימוש בכל חומר עזר.

אין צורך לרשום מחדש דברים שנרשמו כבר בספר, במחברת הכתה, בתרגילים או בפתרונותיהם.

כל התוצאות צריכות להיות מבוטאות באמצעות נתוני השאלה בלבד.

משך המבחן שלוש שעות.

1. מולקולות נספחות אל משטח בעל  $M$  אתרי ספיחה. כל אתר יכול להיות מאוכלס על-ידי מולקולה אחת לכל היותר. מולקולה ספוחה איננה יכולה לזוז או להסתובב, אך יכולה לבצע ויברציה בתדירות  $\omega$ . למולקולות טמפרטורה  $T$  ופוטנציאל כימי  $\mu$ .

א. חשבו את פונקציית החלוקה הגרנד-קנונית. (11 נק)

ב. חשבו את מספר החלקיקים הממוצע  $N$ . (11 נק)

ג. חשבו את הפוטנציאל הכימי כפונקציה של הטמפרטורה  $T$  ודרגת הספיחה  $\theta = N/M$ . (11 נק)

2. חלקיק בעל מסה  $\mu$  נע בטבעת ברדיוס  $R$ . האנרגיה שלו ניתנת על-ידי  $H = \frac{L_z^2}{2\mu R^2}$ , כאשר  $L_z$  הוא

התנע הזוויתי שלו בניצב למישור הטבעת. המערכת נמצאת במגע עם אמבט חום בטמפרטורה  $T$ .

א. בהנחה שהחלקיק קלאסי, חשבו את האנרגיה הממוצעת שלו. (6 נק)

כשמתייחסים אל החלקיק כקוונטי, הערכים העצמיים של האנרגיה שלו הם:

$$E_m = \frac{\hbar^2}{2\mu R^2} m^2, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ב. כתבו ביטוי מדויק עבור פונקציית החלוקה הקוונטית. (6 נק)

ג. חשבו את פונקציית החלוקה הקוונטית בגבול של טמפרטורות גבוהות. (8 נק)

ד. חשבו את האנרגיה הממוצעת של החלקיק בגבול של טמפרטורות גבוהות והשוו לתוצאת סעיף א'. (6 נק)

ה. חשבו את האנטרופיה בגבול של טמפרטורות גבוהות. (7 נק)

3. נתון גז אידיאלי של בוזונים בעלי ספין 1.

א. כתבו ביטוי אינטגרלי מדויק עבור האנרגיה הפנימית כפונקציה של הטמפרטורה, הנפח והפוטנציאל הכימי. (11 נק)

ב. חשבו את האנרגיה הפנימית כפונקציה של הטמפרטורה והנפח, סמוך לנקודת ההתעבות. (11 נק)

ג. חשבו את האנרגיה הפנימית כפונקציה של הטמפרטורה ומספר החלקיקים סמוך לנקודת ההתעבות. (11 נק)

עזר:  $\int_0^\infty dx \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \zeta(5/2) = 1.783$        $\int_0^\infty dx \frac{x^{1/2}}{e^x - 1} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \zeta(3/2) \approx 2.315$

4. נתונה שרשרת חד-ממדית המורכבת מ- $N$  קשרים קשיחים באורך  $a$  כל אחד. כל קשר יכול להיות או בכיוון  $(+x)$  או בכיוון  $(-x)$ . עבור קונפיגורציה נתונה, המרחק בין קצות השרשרת ניתן אפוא על-ידי  $X = (N_+ - N_-)a$ , כאשר  $N_+$  הוא מספר הקשרים הפונים לכיוון  $(+x)$ , ו- $N_-$  הוא מספר הקשרים הפונים לכיוון  $(-x)$ . מתקיים כמובן  $N = N_+ + N_-$ .

א. כתבו ביטוי עבור מספר המצבים של השרשרת כפונקציה של  $N$  ו- $X$ . (10 נק)

ב. חשבו את האנטרופיה של השרשרת כפונקציה של  $N$  ו- $X$ . הניחו כי  $N, N_+, N_-$  כולם מספרים גדולים. (15 נק)

ג. בהנחה שהשרשרת במגע עם אמבט חום בטמפרטורה  $T$ , חשבו את האנרגיה החופשית שלה כפונקציה של  $N$  ו- $X$ . (רמז: שימו לב כי לשרשרת אין כל אנרגיה). (8 נק)

ד. **בונוס**: הראו כי בגבול של  $X$  קטן,  $|X| \ll Na$ , האנרגיה החופשית היא

$$A \approx \frac{1}{2} \frac{k_B T}{Na^2} X^2 + \text{const}$$

כלומר, כמו של אוסצילטור אפקטיבי. (10 נק)

עזר:  $\ln(1+y) \stackrel{y \ll 1}{\approx} y - \frac{y^2}{2}$

**בהצלחה!**