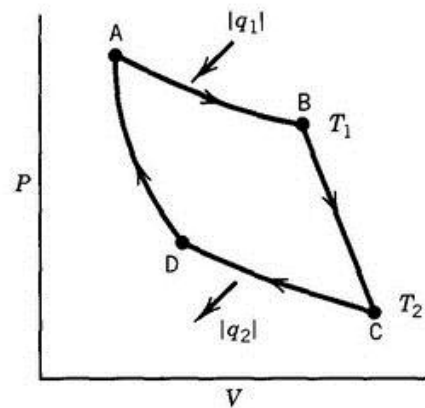
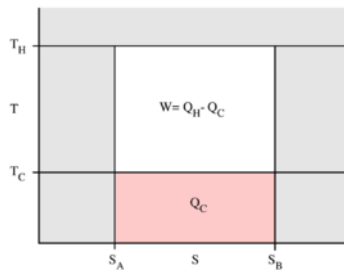


## תרגול 7 – מעגל קרנו

### מנועי חום מכונת קרנו:

מנוע חום הינו מנוע שמשמש בחום כד"י לבצע עבודה מכאנית, כל זה בתהליך ציקלי. מכונת קרנו משתמשת בגז אידאלי להתפשטות ולדחיסה. המכונה עובדת באופן הפיך ולכן מפיקה עבודה מקסימלית (אם תזכרו הראנו שבתהליך התפשטות הנעשה בתהליך הפיך אנו מקבלים שטח מאקסימלי מתחת לגרף זאת אומרת שעבודה בערכה המוחלט היא מאקסימלית). אנו בעצם משקיעים חום לייצור גרדיאנט טמפרטורה, במטרה לקבל עבודה.



### 4 השלבים הציקליים של המכונה:

- א. התפשטות איזותרמית הפיכה ממצב A עד B, בטמפ'  $T_h$  מנפח  $V_1$  לנפח  $V_2$ . בתהליך זה המערכת עושה עבודה  $w_1$  על הסביבה וחום נספג במערכת  $q_1$ .
- ב. התפשטות אדיאבטית הפיכה ממצב B למצב C. בתהליך זה הגז מתפשט מנפח  $V_2$  לנפח  $V_3$  תוך ירידת הטמפרטורה מ-  $T_h$  ל-  $T_c$  כך שהמערכת עושה עבודה  $w_2$  על הסביבה.
- ג. דחיסה איזותרמית הפיכה מ-C ל-D, בטמפ'  $T_c$  מנפח  $V_3$  לנפח  $V_4$ . בתהליך הזה המערכת פולטת חום  $q_2$  לסביבה ועליה נעשית עבודה  $w_3$ .
- ד. דחיסה אדיאבטית הפיכה מ-D ל-A. בתהליך זה הגז נדחס מנפח  $V_4$  לנפח  $V_1$  תוך עליה בטמפרטורה מ-  $T_c$  ל-  $T_h$  ונעשית עליו עבודה  $w_4$ .

סה"כ מסלול סגור שמתחיל ומסתיים באותה הנקודה ולכן:

$$\Delta U = 0$$

$$-\Delta w = \Delta Q_1 + \Delta Q_2$$

$$\Delta w = R(T_c - T_h) \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -R(T_h - T_c) \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) < 0$$

$$\Delta Q_{tot} = R(T_h - T_c) \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) > 0$$

מכיוון ש-  $V_2 > V_1$  ו-  $T_c < T_h$  אנו מקבלים  $\Delta w < 0$  זאת אומרת שהעבודה הכללית היא עבודה שהמערכת מבצעת על הסביבה. העבודה המופקת תלויה ביחס הטמפרטורות וביחס הנפחים.

**ניצולת מכונת קרנו:**

$$\eta = \frac{-\Delta w_{tot}}{\Delta Q_1} = 1 - \frac{T_c}{T_h}$$

יש לשים לב שלקחנו את מינוס העבודה שהמערכת עשתה שכן אנו מעוניינים בעבודה שהופקה לעומת החום שהושקע. ככל שההפרש בין  $T_c$  ל-  $T_h$  גדול יותר הניצולת גבוהה יותר והעבודה המופקת גדולה יותר.

### מכונת קירור ("מזגן") / משאבת חום:

במכונה זו אנו משקיעים עבודה ומעבירים חום (נגד גרדיאנט הטמפרטורה) ממאגר קר למאגר חם. 4 השלבים של מכונת קירור הם:

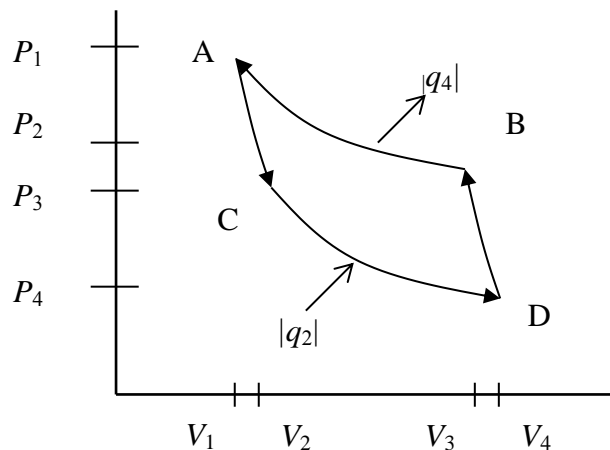
א. התפשטות אדיאבטית הפיכה ממצב A עד D, בתהליך זה הגז מתפשט מנפח  $V_1$  לנפח  $V_4$  תוך ירידת הטמפרטורה מ-  $T_h$  ל-  $T_c$  כך שהמערכת עושה עבודה  $w_1$  על הסביבה.

ב. התפשטות איזותרמית ממצב D למצב C, בטמפרטורה  $T_c$  מנפח  $V_4$  לנפח  $V_3$ . בתהליך זה המערכת עושה עבודה  $w_2$  על הסביבה וחום נספג במערכת  $q_2$ .

ג. דחיסה אדיאבטית מ- C ל- B. בתהליך זה הגז נדחס מנפח  $V_3$  לנפח  $V_2$  תוך עליה בטמפרטורה מ-  $T_c$  ל-  $T_h$  ונעשית עליו עבודה  $w_3$ .

ד. דחיסה איזותרמית מ- B ל- A, בטמפרטורה  $T_h$  מנפח  $V_2$  לנפח  $V_1$ . בתהליך הזה המערכת פולטת חום  $q_4$  לסביבה ועליה נעשית עבודה  $w_4$ .

לצייר את השרטוט ההפוך למכונת קירור – להפוך את החצים:



$$\Delta U = 0$$

$$\Delta w_{tot} = -\Delta w_{carnot} = R(T_h - T_c) \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) > 0$$

$$\Delta Q = -\Delta Q_{carnot} = -R(T_h - T_c) \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) < 0$$

כאן משקיעים עבודה במערכת, ונשאר חום. העבודה היא מינוס העבודה המקבלת ממעגל קרנו.

**האפקטיביות של מנוע המשמש לקירור:**

$$\varepsilon = \frac{\Delta q_2}{\Delta w} = \frac{T_c}{T_h - T_c}$$

אפקטיביות זו יכולה להיות גדולה או קטנה מאחד. האפקטיביות גדלה ככל שהפרש הטמפרטורות בין הפנים לסביבה קטן, והיא הולכת וקטנה ככל שהפרש הטמפרטורות גדל. מסקנה חשובה היא כי נצילות הקירור שואפת לאפס כאשר מתקרבים לאפס המוחלט – כלומר אפשר להתקרב אליו, אך בגלל ירידת נצילות הקירור לאפס, לא ניתן לקרר עד לאפס המוחלט ממש.

וכאשר המנוע משמש לחימום כגון מזגן מחמם האפקטיביות היא:

$$\varepsilon = \frac{q_4}{-\Delta w} = \frac{T_h}{T_h - T_c}$$

גודל זה גדול מאחד – מאחר שהמערכת אינה הופכת את העבודה לחום, אלא משתמשת בעבודה כדי להעביר חום, ומתווספת לחום שהועבר מהמאגר הקר. מזגנים רבים יכולים גם לחמם, ולמרות שכלכלית אין זה משתלם להתקין מזגן לצורך חימום, אם מזגן כבר קיים, זה אכן משתלם יותר כלכלית להשתמש בו לחימום, ולא בתנור חימום שהופך אנרגיה חשמלית ישירות לחום.

**שאלה 1:**

"בעבודה" הכוונה היא לכמה חום הועבר בתהליך (שכן העבודה שהושקעה נתונה ואנו מחפשים את כמות החום שנכנס):

$$w = 1KW \times hr. = 1000 \frac{J}{s} 3600s = 3.6 \cdot 10^6 J$$

$$T_c = 263.15K$$

$$T_h = 308.15K$$

$$\frac{q_2}{w} = \frac{T_c}{T_h - T_c}$$

$$q_2 = w \frac{T_c}{T_h - T_c} = 3.6 \cdot 10^6 J \left( \frac{263.15K}{308.15K - 263.15K} \right) \approx 2.1 \cdot 10^7 J$$

**שאלה 2:**

נזכר בהגדרה נוספת של ניצולת מכונת קרנו:

$$\Delta U = 0 \Rightarrow -w = q_1 + q_2$$

$$\eta = \frac{-w}{q_1} = \frac{q_1 + q_2}{q_1} = 1 + \frac{q_2}{q_1}$$

המכונה כפי שמתאר הממציא פועלת בניצולת:

$$q_2 = -40KJ$$

$$q_1 = 105KJ$$

$$\eta = 1 + \frac{-40KJ}{105KJ} = 0.62$$

ואולם אנו יודעים כי הניצולת המירבית של המכונה:

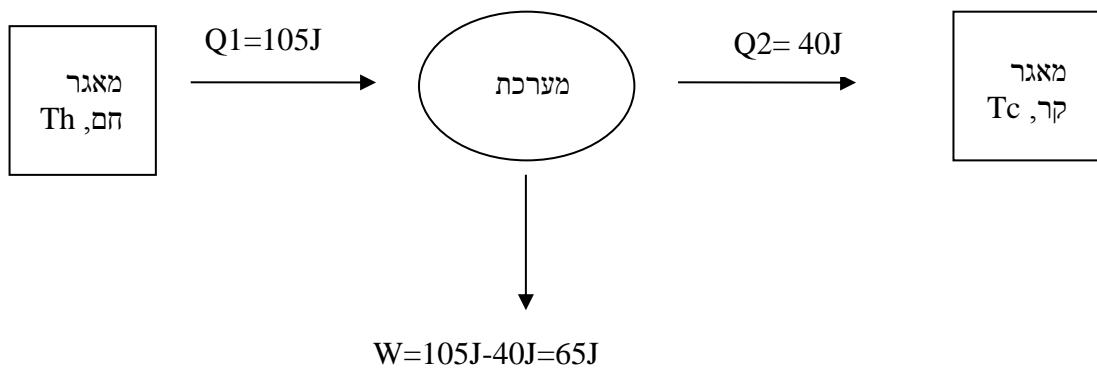
$$T_c = 200K$$

$$T_h = 400K$$

$$\eta_c = 1 - \frac{200K}{400K} = 0.5$$

הניצולת בפועל נמוכה יותר ולכן ההשקעה אינה מומלצת.

ולסיכום השאלה:



**שאלה 3:**

$$w = 200W$$

$$q_2 = 700W$$

$$T_c = 253.15K$$

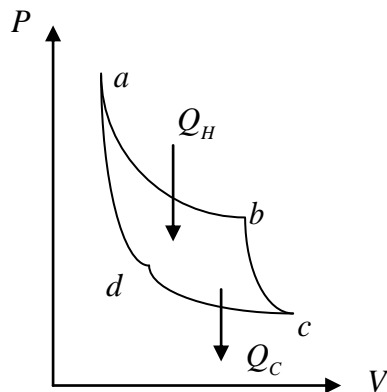
$$T_h = ?$$

$$\frac{q_2}{-w} = \varepsilon_{eff.} = 0.75\varepsilon_C = 0.75 \frac{T_c}{T_c - T_h}$$

$$T_c - T_h = 0.75 \frac{-w}{q_2} T_c$$

$$T_h = T_c + 0.75 \frac{w}{q_2} T_c = 253.15 \left( 1 + \frac{200W}{700W} \right) = 307K$$

אם תעלה טמפרטורת החוץ על  $34^\circ C$  לא יוכל המנוע לקיים טמפרטורה של  $20^\circ C$  בתוך המקרה.

**שאלה 4**

א. הדיאגרמה נראית כך:

ב.

$$Q_H = +500J$$

$$W = mgy = (15kg)(9.80m/sec^2)(2.00m) = 294J$$

$$\frac{-W}{Q_H} = \frac{T_H - T_C}{T_H} \Rightarrow \frac{294J}{500J} = \frac{773K - T_C}{773K} \Rightarrow 0.588 * 773K = 773K - T_C$$

$$\Rightarrow T_C = 318K = 45^\circ C$$

ג.

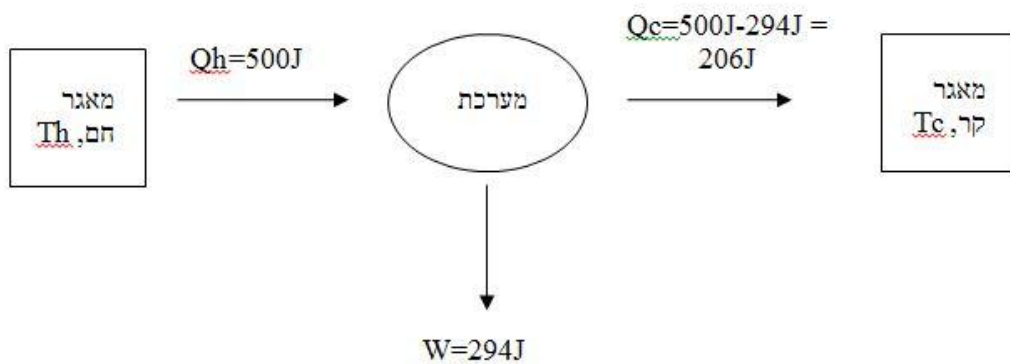
$$\eta = \frac{-W}{Q_H} = \frac{294J}{500J} = 58.8\%$$

ד. החום שעובר מהמערכת אל המאגר הקר:  $Q_C = -206J$ , ולכן כמות החום המתבזבז הוא  $206J$ .

ה. מהשרטוט רואים שבמצב  $a$  יש את הלחץ המקסימאלי, ולכן:

$$P_a = \frac{nRT_H}{V_a} = \frac{2\text{mol} * 8.314 \left[ \frac{\text{L} * 10^3 * \text{Pa}}{\text{K} * \text{mol}} \right] 773\text{K}}{5.0\text{L}} = 2.57 * 10^6 \text{Pa}$$

**ולסיכום השאלה:**



$$P(\bar{V} - b) = RT, U = \frac{3}{2}nRT$$

$$\eta = \eta_c$$

נחשב את יעילותו של מנוע חום הפועל על מול אחד של הגז הלא-אידיאלי שתואר.

א. התפשטות איזותרמית ב  $T_h$  מ  $V_1$  ל  $V_2$ :

$$\Delta U_{AB} = 0 \Rightarrow Q_{AB} = -W_{AB} = -\int_{V_1}^{V_2} -PdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT_h}{V-b} = RT_h \ln\left(\frac{V_2-b}{V_1-b}\right)$$

ב. התפשטות אדיאבטית מ  $T_h$  ל  $T_c$  ומ  $V_2$  ל  $V_3$ .

$$Q_{BC} = 0$$

$$W_{BC} = \Delta U_{BC} = \frac{3}{2}R(T_c - T_h) = -\frac{3}{2}R\Delta T$$

ג. דחיסה איזותרמית ב  $T_c$  מ  $V_3$  ל  $V_4$ :

$$\Delta U_{CD} = 0 \Rightarrow Q_{CD} = -W_{CD} = -\int_{V_3}^{V_4} -PdV = \int_{V_3}^{V_4} \frac{RT_c}{V-b} = RT_c \ln\left(\frac{V_4-b}{V_3-b}\right)$$

ד. דחיסה אדיאבטית מ  $T_c$  ל  $T_h$  ומ  $V_4$  ל  $V_1$ .

$$Q_{DA} = 0$$

$$W_{DA} = \Delta U_{DA} = \frac{3}{2}R(T_h - T_c) = \frac{3}{2}R\Delta T$$

לסיכום:

$$W_{tot.} = -RT_h \ln\left(\frac{V_2-b}{V_1-b}\right) - \frac{3}{2}R\Delta T - RT_c \ln\left(\frac{V_4-b}{V_3-b}\right) + \frac{3}{2}R\Delta T$$

$$\eta = \frac{-W_{tot.}}{Q_{AB}} = \frac{RT_h \ln\left(\frac{V_2-b}{V_1-b}\right) + RT_c \ln\left(\frac{V_4-b}{V_3-b}\right)}{RT_h \ln\left(\frac{V_2-b}{V_1-b}\right)}$$

על מנת לפשט ביטוי זה יש למצוא קשר בין  $T$  ל  $V$  עבור תהליך אדיאבטי עם הגז הלא-אידיאלי:

$$Q = 0 \Rightarrow dU = dW$$

$$\frac{3}{2}RdT = -PdV = -\frac{RT}{V-b}dV$$

לדוגמה, עבור הקטע BC:

$$\frac{3}{2} \int_{T_h}^{T_c} \frac{dT}{T} = - \int_{V_2}^{V_3} \frac{dV}{V-b}$$

$$\frac{3}{2} \ln\left(\frac{T_c}{T_h}\right) = \ln\left(\frac{V_2-b}{V_3-b}\right) \Rightarrow \left(\frac{T_c}{T_h}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{V_2-b}{V_3-b}$$

ועבור הקטע DA:

$$\left(\frac{T_h}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{V_4-b}{V_1-b}$$



$$\frac{V_4 - b}{V_1 - b} = \frac{V_3 - b}{V_2 - b} \Rightarrow \frac{V_4 - b}{V_3 - b} = \frac{V_1 - b}{V_2 - b}$$

$$W_{tot.} = -RT_h \ln \left( \frac{V_2 - b}{V_1 - b} \right) - RT_c \ln \left( \frac{V_4 - b}{V_3 - b} \right)$$

$$= R\Delta T \ln \left( \frac{V_1 - b}{V_2 - b} \right)$$

$$\eta = \frac{-W_{tot.}}{Q_{AB}} = \frac{-R\Delta T \ln \left( \frac{V_1 - b}{V_2 - b} \right)}{RT_h \ln \left( \frac{V_2 - b}{V_1 - b} \right)} = \frac{\Delta T}{T_h} = \eta_c$$

**שאלה 6:**

החלוקה לפי השלבים של מעגל קרנו:

א. התפשטות איזותרמית במקרה הזה  $\Delta U = 0$ :

$$q = -w = nRT_h \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) = 3 \text{mole} \cdot 8.31 \frac{\text{J}}{\text{molK}} \cdot 500\text{K} \ln \left( \frac{10}{2} \right) = 20\text{KJ}$$

$$w = -20\text{KJ}$$

ב. התפשטות אדיאבטית  $q=0$ :

$$\Delta U = w = nC_v \Delta T = 3 \text{mole} \cdot 12.5 \frac{\text{J}}{\text{molK}} (300 - 500)\text{K} = -7.5\text{KJ}$$

ג. דחיסה איזותרמית במקרה הזה  $\Delta U = 0$ :

$$q = -w = nRT_c \ln \left( \frac{V_4}{V_3} \right)$$

Since points 1 & 4 and 2 & 3 lie on adiabatic curves:

$$T_c V_4^{\gamma-1} = T_h V_1^{\gamma-1}$$

$$T_c V_3^{\gamma-1} = T_h V_2^{\gamma-1}$$

$$\left( \frac{V_4}{V_3} \right)^{\gamma-1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$$

$$\frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1}{V_2}$$

$$q = -w = nRT_c \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right) = 3 \text{mole} \cdot 8.31 \frac{\text{J}}{\text{molK}} \cdot 300\text{K} \ln \left( \frac{2}{10} \right) = -12\text{KJ}$$

$$w = 12\text{KJ}$$

ד. דחיסה אדיאבטית  $q=0$ :

$$\Delta U = w = nC_v \Delta T = 3 \text{mole} \cdot 12.5 \frac{\text{J}}{\text{molK}} (500 - 300)\text{K} = 7.5\text{KJ}$$

$$\Delta U_{tot.} = 0 = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{3 \rightarrow 4} + \Delta U_{4 \rightarrow 1} \Rightarrow \Delta U_{2 \rightarrow 3} = -\Delta U_{4 \rightarrow 1}$$