תרמודינאמיקה-תרגול 1

הגדרת הפונקציה במשתנה אחד:

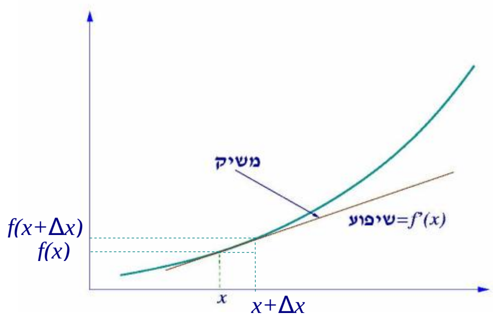
פונקציה היא התאמה בין איברי שתי קבוצות (בד"כ שתי קבוצות מספרים). מוגדרת לרוב ע"י : $f: A \rightarrow B$ כאשר A הוא תחום הפונקציה (קבוצת המקורות) ו-B הוא טווח הפונקציה (קבוצת התמונות), לכל מקור בתחום ישנה רק תמונה אחת בטווח. לדוגמה $f = f(x)$ מתאימה לכל x מספר אחד ויחיד $f(x)$.

הגדרת הנגזרת:

נגזרת של פונקציה במשתנה אחד בנקודה מסוימת שווה לשיפוע המשיק לגרף הפונקציה באותה נקודה (ראה ציור). הנגזרת משקפת את קצב ההשתנות של הפונקציה.

הגדרה מתמטית לנגזרת: תהי $f(x)$ פונקציה ממשית במשתנה אחד. הנגזרת בנקודה x מסומנת ב-$f'(x)$ וערכה מחושב לכל x לפי הגבול הבא, כאשר הוא קיים וסופי:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$$



נבחן לדוגמה את הנגזרת של x^2 עפ"י הגדרת הנגזרת:

$$f(x) = x^2$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\left(x+\Delta x\right)^2 - x^2}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\cancel{x^2} + 2x\Delta x + \Delta x^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{2x\cancel{\Delta x} + \Delta x^{\cancel{2}}}{\cancel{\Delta x}}\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[2x + \Delta x\right] = 2x$$

אנו מציבים את הגבול בשלב האחרון ומקבלים את הפתרון.

(הערה: ההוכחה הבאה ארוכה וטכנית – ניתן, ואולי כדאי, לדגל עליה עקב קוצר זמן)

נוכיח כעת נוסחא כללית לנגזרת של חזקה:

$$f(x) = x^n \qquad f'(x) = nx^{n-1}$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\left(x+\Delta x\right)^n - x^n}{\Delta x}\right]$$

עפ"י הבינום של ניוטון:

$$\left(x+y\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k y^{n-k}$$

$$\left(x+\Delta x\right)^n = \frac{n!}{0!(n-0)!}x^0\left(\Delta x\right)^n + \frac{n!}{1!(n-1)!}x^1\left(\Delta x\right)^{n-1} + \frac{n!}{2!(n-2)!}x^2\left(\Delta x\right)^{n-2} + \cdots$$

$$+\frac{n!}{(n-2)!(n-(n-2))!}x^{n-2}\left(\Delta x\right)^{n-(n-2)} + \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!}x^{n-1}\left(\Delta x\right)^{n-(n-1)} + \frac{n!}{n!(n-n)!}x^n\left(\Delta x\right)^{n-(n-0)}$$

$$= \frac{n!}{0!(n-0)!}x^0\left(\Delta x\right)^n + \frac{(n-1)!n}{1!(n-1)!}x^1\left(\Delta x\right)^{n-1} + \frac{(n-2)!(n-1)n}{2!(n-2)!}x^2\left(\Delta x\right)^{n-2} + \cdots$$

$$+\frac{(n-2)!(n-1)n}{(n-2)!2!}x^{n-2}\left(\Delta x\right)^2 + \frac{(n-1)!n}{(n-1)!1!}x^{n-1}\left(\Delta x\right) + \frac{n!}{n!0!}x^n\left(\Delta x\right)^0$$

$$= \left(\Delta x\right)^n + nx\left(\Delta x\right)^{n-1} + \frac{(n-1)n}{2}x^2\left(\Delta x\right)^{n-2} + \cdots + \frac{(n-1)n}{2}x^{n-2}\left(\Delta x\right)^2 + nx^{n-1}\left(\Delta x\right) + x^n$$

נציב בחזרה בנוסחת הנגזרת:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\left(\Delta x\right)^n + nx\left(\Delta x\right)^{n-1} + \frac{(n-1)n}{2}x^2\left(\Delta x\right)^{n-2} + \cdots + \frac{(n-1)n}{2}x^{n-2}\left(\Delta x\right)^2 + nx^{n-1}\left(\Delta x\right) + x^n - x^n}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\left(\Delta x\right)^{n-1} + nx\left(\Delta x\right)^{n-2} + \frac{(n-1)n}{2}x^2\left(\Delta x\right)^{n-3} + \cdots + \frac{(n-1)n}{2}x^{n-2}\left(\Delta x\right) + nx^{n-1}\right] = nx^{n-1}$$

וזו הנוסחא שכולנו מכירים. מ.ש.ל

את הפונקציות בהן נתקל בקורס ניתן לקרב ע"י טור טיילור סביב נקודה x_0 באופן הבא:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right)_{x_0}(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=$$

$$\underbrace{\underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}_{linear-approx.}+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2}_{parabolic-approx.}+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots$$

קרוב לינארי נקרא גם קרוב מסדר ראשון, קרוב פרבולי קרוב מסדר שני וכן הלאה.

נוכיח כעת ע"י הגדרת טור טיילור את נוסחאת נגזרת של מכפלת שתי פונקציות:

$$h(x)=f(x)g(x)$$

$$\frac{dh}{dx}=\frac{d(f\cdot g)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}$$

נעשה קירוב לטור טיילור סביב x ונזניח איברים ריבועיים ומעלה (כלומר במקום x נציב x+Δx ובמקום x_0 נציב x) , ניקח רק את הקרוב הלינארי שכן שאר האיברים ייפלו גם ככה כי הם תלויים בחזקות של Δx השואף לאפס:

$$\frac{d(f\cdot g)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x)+f'(x)\Delta x][g(x)+g'(x)\Delta x]-f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)g(x)+f(x)g'(x)\Delta x+g(x)f'(x)\Delta x+g'(x)f'(x)(\Delta x)^2-f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x)g'(x)+g(x)f'(x)]\Delta x+g'(x)f'(x)(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x)g'(x)+g(x)f'(x)]+g'(x)f'(x)\Delta x$$

$$=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

דיפרנציאל של פונקציה הוא השינוי שחל בפונקציה כתוצאה מתזוזה אינפיניטסימאלית במשתנים שלה. עבור פונקציות סקלריות במשתנה יחיד, מושג הדיפרנציאל שקול למושג הנגזרת, אולם כאשר עוברים לפונקציות של כמה משתנים, כפי שנראה בהמשך, הדיפרנציאל הוא הכללה של הנגזרת, ושונה ממושג הנגזרת החלקית שאותה גם כן נגדיר בהמשך.

דיפרנציאל חד ממדי:

$$df = f'(x_0)\cdot dx$$

חשוב מאוד לציין כי האינטגרל על מסלול סגור (מתחיל ומסתיים באותה הנקודה) של דיפרנציאל מתאפס שכן סה"כ אין שינוי ב f , הדרך אינה משנה!

<u>דוגמה</u>: כוח הכבידה הינו כוח משמר. הארנגיה הפוטנציאלית הכבידתית ($U=mgh$) תלויה רק ב m, ב g, וב h. אם נזיז חלקיק מ h_1 ל h_2 ובחזרה ל h_1, תהיה לו אותה אנרגייה פוטנציאלית כבידתית כמו בהתחלה, ללא תלות בערכו של h_2 או במסלול בו עבר, מ h_1 ל h_2 ובחזרה ל h_1.

<u>הגדרת הפונקציה בשני משתנים:</u>

פונקציה של שני משתנים היא התאמה בין איברי שתי קבוצות. המתאימה במקרה זה לכל זוג מספרים מספר אחד. במילים אחרות התחום הוא זוגות מספרים (או מישור) והטווח הוא קבוצת מספרים. $f = f(x,y)$ מתאימה לכל x,y מספר אחד ויחיד $f(x,y)$.

מכיוון שהפונקציה תלויה בשני משתנים ניתן לגזור אותה לפי כל אחד מהם. ומכאן בא המושג של נגזרת חלקית. אם נרצה לגזור את $f(x,y)$ לפי X נסמן:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

וזה נכון לגבי Y. קל לראות שבמקרה כזה כאשר גוזרים פונקציה רבת משתנים לפי משתנה אחד כל שאר המשתנים הם קבועים פרט לגורם הגזירה. במילים אחרות כשגוזרים את $f(x,y)$ לפי X, Y הוא קבוע ומתייחסים אליו כמספר.

מספר דוגמאות:

$$f(x,y)=x^2y$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2$$

$$f(x,y)=2x+4y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}=2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=8y$$

$$f(x,y)=x^y$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}$$
$$\ln f=y\ln x$$
$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial y}=\ln x \qquad (*)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\overset{(*)}{=}f\ln x=x^y\ln x$$

גם במקרה הזה ניתן לקרב את הפונקציה ע"י טור טיילור עם ההבדל היחיד שבמקרה של פונקציה במשתנה אחד זהו קרוב ע"י ישרים משיקים כאן הקירוב הוא ע"י משטחים משיקים:

$$f(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{m!n!}\left(\frac{\partial^m\partial^n}{\partial x^m\partial y^n}f(x,y)\right)_{x_0,y_0}(x-x_0)^m(y-y_0)^n$$

$$=\underbrace{f(x_0,y_0)+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0,y_0}(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_0,y_0}(y-y_0)\right]}_{linear-approx.}+\underbrace{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{x_0,y_0}(x-x_0)^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)(x-x_0)(y-y_0)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{x_0,y_0}(y-y_0)^2\right]}_{parabolic-approx.}+\ldots$$

במקרה של פונקציות רבות משתנים ניתן לדבר על דיפרנציאל שלם ודיפרנציאל חלקי.

הדיפרנציאל השלם של פונקציה בעלת שני משתנים הוא:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$$

כשאר $dx \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ מתאר תזוזה לינארית ב-X ו- $dy \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$ מתאר תזוזה לינארית ב-Y. כל אחת מהתזוזות האלו נקראת דיפרנציאל חלקי של הפונקציה.

דוגמא לדיפרנציאל שלם:

$$f(x,y) = y\cos x$$
$$df = (-y\sin x)\cdot dx + \cos x \cdot dy$$

גם כאן החוקים אינם שונים ואינטגרל על מסלול סגור של דיפרנציאל **שלם** מתאפס, אך יש לשים לב כי האינטגרל על מסלול סגור של דיפרנציאל חלקי **אינו** בהכרח מתאפס, שכן אם עשינו שינוי במסלול סגור על X אין זה אומר שב-Y חזרנו בדיוק לאותה הנקודה ולכן הפונקציה לא חוזרת לאותה הנקודה, ומכאן שהאינטגרל הסגור לא יתאפס. אם כן זה מקרי לחלוטין!

כיצד נוכל לדעת שיש לפנינו דיפרנציאל שלם או לא? זאת אפשר לוודא ע"י קריטריון אויילר לשלמות הדיפרנציאל, מתבסס על הקשר שיוכח בבית $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)$. ואיך זה עובד?

בהנתן דיפרנציאל $df = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ אם מתקיים ש-

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y$$

אזי זהו דיפרנציאל שלם!

דוגמא לדיפרנציאל שלם:

$$df = \underbrace{2y^3x}_{M}\cdot dx + \underbrace{3y^2x^2}_{N}\cdot dy$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6y^2x$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6y^2x$$

דוגמא למקרה בו קריטריון אוילר לא מתקיים:

$$df = \underbrace{2y^3x}_{M}\cdot dx + \underbrace{6y^2x^2}_{N}\cdot dy$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6y^2x$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = 12y^2x$$

כעת נכליל את כל המושגים לפונקציות רבות משתנים $f(x_{1,}, x_2, x_3, ..., x_i, ...x_n)$:

הנגזרת החלקית מוגדרת באופן הבא:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_i + \Delta x_i, ...x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_i, ...x_n)}{\Delta x_i}$$

והדיפרנציאל השלם מוגדר ע"י:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\{x_j : j \neq i\}} dx_i$$

לדוגמא:

$$f(x, y, z) = y\cos x + z^2$$
$$df = -y\sin x \cdot dx + \cos x \cdot dy + 2zdz$$

קיימים מספר קשרים בין הנגזרות החלקיות.

כדי לראות אותם ולהבינם נניח כי יש לנו פונקציה התלויה בשני משתנים: z=z(x,y)

נרשום את הדיפרנציאל השלם של הפונקציה:

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy$$

נניח כי Y קבוע (כלומר לא משתנה עם הפונקציה). במקרה כזה ניתן לראות כי הדיפרנציאל השלם שווה לדיפרנציאל החלקי לפי X:

$$dz_y = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx$$
$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y$$
$$\Rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y\right]^{-1}$$

וזהו הקשר הראשון.

נראה דוגמא לקשר זה:

$$z = x\ln y \Rightarrow x = z/\ln y$$
$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \ln y$$
$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = \frac{1}{\ln y} \Rightarrow \left[\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y\right]^{-1} = \ln y = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$$

נניח כעת כי Z קבוע:

$$dz = 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy \Big/ dy$$

$$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{dx}{dy}\right)_z + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{dx}{dy}\right)_z = -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \Big/ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{dx}{dy}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1$$

וזהו הקשר הציקלי.

דוגמא לקשר זה:

$$z = x^2 y \quad \Rightarrow x = \left(\frac{z}{y}\right)^{1/2} \quad \Rightarrow y = \frac{z}{x^2}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 2xy$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{1}{2} y^{-3/2} z^{1/2}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = 2xy\left(-\frac{1}{2}\right) y^{-3/2} z^{1/2} \frac{1}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{x}\left(\frac{z}{y}\right)^{1/2} = -\frac{1}{x} x = -1$$

כעת נניח כי $x = x(s,w)$ וכי $y = y(s,w)$ (כלומר פונקציות שתלויות בשני משתנים) אך לZ אין תלות מפורשת בS וW. לפי כלל השרשרת של נגזרות מתקיים:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_w = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)_w + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)_w$$

כעת, אם w=y ועושים גזירה תחת w קבוע זאת אומרת שזה תחת y קבוע ולכן הנגזרת שלו לפי s מתאפסת שכן הוא קבוע.

$$\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)_w = \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)_y = 0 \quad \text{since y is const there can be no change in } y$$
$$\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_y = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)_y$$

וזה ידוע ככלל השרשרת של נגזרות חלקיות.

דוגמא:

$$z = xy$$
$$x = s^2 + w^2$$
$$y = w$$
$$\Rightarrow z = s^2 w + w^3$$
$$\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_y = 2sw$$
$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = y = w \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)_y = 2s$$
$$\Rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_y = 2sw = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)_y$$

<u>פונקציית מצב:</u>

ההגדרה המתמטית לפונקציית מצב- פונקציה שיש לה דיפרנציאל שלם.

מבחינה פיזיקלית- הערך של פונקציית המצב תלוי אך ורק במצב המערכת, הכוונה היא שלא משנה מה יהיה המסלול שנעבור בו התוצאה הסופית תהיה זהה ותלויה רק במצב הסופי של המערכת. דוגמאות: אנרגיה פוטנציאלית כבידתית, משוואת הגז האידאלי...