<u>תרמודינמיקה – תרגיל 1</u>

נגזרת ודיפרנציאל

1. משוואת המצב של גז אידיאלי הינה: $PV = nRT$

כאשר: P – הלחץ, V – הנפח, n – מספר המולים, T – הטמפרטורה ו R - קבוע הגזים.

בהנחה שמספר המולים קבוע,

א. מהו הדיפרנציאל השלם של V כאשר n קבוע. (הנחייה: רשמו קודם את הפונקציה של V, ואז מצאו את הדיפרנציאל).

ב. מהו הדיפרנציאל השלם כאשר מתאפשר שינוי במספר המולים?

2. א. הוכיחו את הקשר $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (תקף לפונקציה ממשית עם נגזרות שניות רציפות).

הנחיה: השתמשו בהגדרת הנגזרת החלקית $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}\right]$

ובקשר $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

ב. השתמשו בהגדרת הנגזרת ובקירוב $\ln(1+y) \sim y$ עבור $y \ll 1$, על מנת למצוא את הנגזרת של $f=\ln x$.

ג. האם הדיפרנציאל $df=2xdy+yxdx$ שלם? הוכיחו.

ד. האם הדיפרנציאל $df=6yxdy+3y^2dx$ שלם? הוכיחו.

3. משקולת בעלת מסה m תלויה על קפיץ וחופשית לנוע בכיוונים x ו z–. האנרגיה הפוטנציאלית שלה נתונה ע"י:

$$E = \tfrac{1}{2}k[(z-z_0)^2 + (x-x_0)^2] + mgz$$

כאשר k הוא קבוע הקפיץ.

א. מהו הדיפרנציאל של האנרגיה?

ב. האם הוא שלם? הוכיחו.

ג. מהו הדיפרנציאל של האנרגיה אם מאפשרים לקפיץ לנוע גם בכיוון y?

ד. האם הדיפרנציאל יהיה שלם? הוכיוחו.

4. משוואת הגזים של ואן דר-ואלס ניתנת ע"י השוויון $\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT$.

כאשר a ו b הינם קבועים, ו v ו T הם הפרמטרים החופשיים.

א. מהו הדיפרנציאל של P?

ב. הראו שהוא שלם.

5. א. השתמשו בהגדרת הנגזרת על מנת להוכיח את כלל השרשרת עבור פונקציה של משתנה אחד :

$\frac{df\left(g(x)\right)}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$. רמז : השתמשו בשני פיתוחי טיילור.

ב. נתונה פונקציה : $z(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2$.

המשתנים x_1 ו- x_2 הינם פונקציות של y_1 ו- y_2 , כך ש-

$$x_1 = y_1^2$$

$$x_2 = 2y_1^2 y_2$$

הראו כי עבור הפונקציה הנתונה מתקיים כלל שרשרת :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y_1}\right)_{y_2} = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)_{x_2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)_{y_2} + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)_{x_1}\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right)_{y_2}$$

הנחיה :

1. הצבה וגזירה ישירה של z
2. גזירה לפי כלל שרשרת
3. השוואת התוצאות מ1 ו-2

6. נגזרות חלקיות וגדלים תרמודינמיים :

א. הוכיחו, ע״י גזירה מפורשת, כי עבור גז אידיאלי עם מספר מולים קבוע מתקיים הקשר שהוכח בכיתה :

$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1$.

ב. עבור גז ואן-דר-ואלס $\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT$ מהו $\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T$? ישנן שתי דרכים לפתור – חשב בשני הדרכים והשווה את התוצאות התקבלו.