

תרמודינמיקה – תרגיל מספר 1

נגזרת ודיפרנציאל

1. משוואת המצב של גז אידיאלי הינה: $PV = nRT$

כאשר: P – הלחץ, V – הנפח, n – מספר המולים, T – הטמפרטורה ו R – קבוע הגזים. בהנחה שמספר המולים קבוע,

א. מהו הדיפרנציאל השלם של V כאשר n קבוע. (הנחייה: רשמו קודם את הפונקציה של V , ואז מצאו את הדיפרנציאל).

ב. מהו הדיפרנציאל השלם כאשר מתאפשר שינוי במספר המולים?

2. א. הוכיחו את הקשר $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (תקף לפונקציה ממשית עם נגזרות שניות רציפות).
הנחייה: השתמשו בהגדרת הנגזרת החלקית $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \right]$

ובקשר $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$

ב. השתמשו בהגדרת הנגזרת ובקירוב $\ln(1+y) \sim y$ עבור $y \ll 1$, על מנת למצוא את הנגזרת של $f = \ln x$.

ג. האם הדיפרנציאל $df = x^2 dy + yx dx$ שלם? הוכיחו.

3. משקולת בעלת מסה m תלויה על קפיץ וחופשית לנוע בכל הכיוונים (x, y, z) . האנרגיה הפוטנציאלית שלה נתונה ע"י:

$$E = \frac{1}{2} k[(z - z_0)^2 + (y - y_0)^2 + (x - x_0)^2] + mgz$$

כאשר k הוא קבוע הקפיץ.

א. מהו הדיפרנציאל של האנרגיה?

ב. האם הוא שלם? הוכיחו.

4. משוואת הגזים של ואן דר-ואלס ניתנת ע"י השוויון $\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$

כאשר a ו b הינם קבועים, ו v ו T הם הפרמטרים החופשיים.

א. מהו הדיפרנציאל של P ?

ב. הראו שהוא שלם.

5. נגזרות חלקיות וגדלים תרמודינמיים :

א. הוכיחו, ע"י גזירה מפורשת, כי עבור גז אידיאלי עם מספר מולים קבוע מתקיים הקשר שהוכח בכיתה :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1$$

ב. עבור גז ואן-דר-ואלס $RT(v-b) = P + \frac{a}{v^2}$ מהו $\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T$? ישנן שתי דרכים לפתור – חשב בשני הדרכים והשווה את התוצאות התקבלו.

6. א. השתמשו בהגדרת הנגזרת על מנת להוכיח את כלל השרשרת עבור פונקציה של משתנה אחד :

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx} \quad \text{רמז: השתמשו בשני פיתוחי טיילור.}$$

ב. נתונה פונקציה : $z(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$.

המשתנים x_1 ו- x_2 הינם פונקציות של y_1 ו- y_2 , כך ש-

$$x_1 = 2y_1$$

$$x_2 = y_1 y_2$$

הראו כי עבור הפונקציה הנתונה מתקיים כלל שרשרת :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y_1}\right)_{y_2} = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)_{x_2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)_{y_2} + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)_{x_1} \left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right)_{y_2}$$

הנחיה :

1. הצבה וגזירה ישירה של z

2. גזירה לפי כלל שרשרת

3. השוואת התוצאות מ-1 ו-2