תרמודינאמיקה – פתרון תרגיל מספר 1

1. א. ע״י חלוקה ב P נקבל: $V=\frac{nRT}{P}$ והדיפרנציאל ע״פ הגדרה הינו

$$dV=\frac{\partial V}{\partial T}dT+\frac{\partial V}{\partial P}dP=\frac{nR}{P}dT-\frac{nRT}{P^2}dP$$

ב. כאשר n אינו קבוע, הדיפרנציאל חייב לכלול גם איבר שכולל את השינוי ב n, כלומר

$$dV=\frac{\partial V}{\partial T}dT+\frac{\partial V}{\partial P}dP+\frac{\partial V}{\partial n}dn=\frac{nR}{P}dT-\frac{nRT}{P^2}dP+\frac{RT}{P}dn$$

ג.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+\Delta x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\Delta x}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta x}\left[\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)}{\Delta y}-\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\right]\right\}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta x}\frac{1}{\Delta y}\left(f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)-\left(f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\right)\right)$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\left\{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\left(f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)\right)-\left(f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\right)\right]\right\}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\left\{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\right\}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y+\Delta y)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\Delta y}\right\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

2. א. הדיפרנציאל מחושב כך

$$dE=\frac{\partial E}{\partial x}dx+\frac{\partial E}{\partial y}dy+\frac{\partial E}{\partial z}dz=k(x-x_0)dx+k(y-y_0)dy+[k(z-z_0)+mg]dz$$

כאשר הנגזרות החלקיות מבוצעות כאשר שאר הפרמטרים קבועים.

ב. נבחר את זוג המשתנים x ו y, עבורם מקבלים

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial E}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}k(x-x_0)=0,\qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}k(y-y_0)=0\;\Rightarrow\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial E}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial y}$$

קלאודיה ורטש   אורלי קלטניק – אורנשטיין 206,   טלפון: 03-6407229.
e-mail: sztrumcl@post.tau.ac.il   kletenik@post.tau.ac.il

וכך מקבלים עבור כל זוג משתנים –

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial E}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial E}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial E}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial E}{\partial x}=0$$

כלומר לפי קריטריון אוילר הדיפרנציאל שלם.

ג. המשמעות היא ש E הינה פונקצית מצב, וכל פעם שהמשקולת תבקר בנקודה מסוימת, תהיה דה אותה אנרגיה פוטנציאלית.

3. א. כמו שפתרנו בשאלה 1. נפריד תחילה את P : $P=\frac{RT}{v-b}-\frac{a}{v^2}$

כעת נחשב את הדיפרנציאל $dP=\frac{\partial P}{\partial T}dT+\frac{\partial P}{\partial v}dv=\frac{R}{v-b}dT+\left[-\frac{RT}{(v-b)^2}+\frac{2a}{v^3}\right]dv$

ב. הוא שלם לפי קריטריון אוילר מכיוון ששני הנגזרות הכפולות שוות :

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial P}{\partial T}=\frac{\partial}{\partial v}\frac{R}{v-b}=-\frac{R}{(v-b)^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial P}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial T}\left[-\frac{RT}{(v-b)^2}+\frac{2a}{v^3}\right]=-\frac{R}{(v-b)^2}$$

4. א. עבור גז אידיאלי :

$$P=\frac{nRT}{V} \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T=-\frac{nRT}{V^2}, \quad V=\frac{nRT}{P} \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P=\frac{nR}{P}, \quad T=\frac{PV}{nR} \Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V=\frac{V}{nR}$$

נציב ונקבל : $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V=-\frac{nRT}{V}\frac{nR}{P^2}\frac{V}{nR}=-\frac{nRT}{PV}=-1$

ב. הראנו בכיתה כי $\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T=1/\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T$. יהיה לנו קל יותר לחשב את הנגזרת בצד ימין של המשוואה.

נפריד תחילה את P : $P=\frac{RT}{v-b}-\frac{a}{v^2}$ ואז ונגזור

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T=-\frac{RT}{(v-b)^2}+\frac{2a}{v^3} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T=\left[\frac{2a}{v^3}-\frac{RT}{(v-b)^2}\right]^{-1}$$

ג. הדיפרנציאל השלם הינו $dv=\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T dp+\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dT$

את $\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T$ חישבנו כבר בסעיף הקודם. נמצא כעת את $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P$ בדרך זהה :

קלאודיה ורטש אורלי קלטניק – אורנשטיין 206, טלפון: 03-6407229.
e-mail: sztrumcl@post.tau.ac.il kletenik@post.tau.ac.il

$$T = \left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v-b)/R \;\Rightarrow\; \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_P = \frac{-\frac{2a(v-b)}{v^3} + \left(P + \frac{a}{v^2}\right)}{R} = \frac{P - \frac{a}{v^2} + \frac{2ab}{v^3}}{R} \;\Rightarrow\; \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = \frac{R}{P - \frac{a}{v^2} + \frac{2ab}{v^3}}$$

הדיפרנציאל השלם אם כך הוא: $dv = \left[\frac{2a}{v^3} - \frac{RT}{(v-b)^2}\right]^{-1} dP + R\left(P - \frac{a}{v^2} + \frac{2ab}{v^3}\right)^{-1} dT$

5. נבצע את הגזירה של כל אחד מהאלמנטים בכלל השרשרת ונציב בו:

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = 3y_2, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial y_1} = 4, \qquad \frac{\partial z}{\partial x_1} = 4x_1x_2 + 1, \qquad \frac{\partial z}{\partial x_2} = 2x_1^{\,2}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y_1}\right)_{y_2} = (4x_1x_2 + 1)\cdot 3y_2 + 8x_1^2 = 36y_1y_2^{\,2}(4y_1 + y_2^2) + 3y_2 + 72y_1^{\,2}y_2^{\,2} = 216y_1^{\,2}y_2^{\,2} + 36y_1y_2^{\,4} + 3y_2$$

כעת נציב קודם את x_1 ואת x_2 ואז נבצע את הגזירה:

$$Z(x_1, x_2) = 2x_1^{\,2}x_2 + x_1 = 18y_1^{\,2}y_2^{\,2}(4y_1 + y_2^2) + 3y_1y_2$$

$$\partial z/\partial y_1 = 36y_1y_2^{\,2}(4y_1 + y_2^2) + 72y_1^{\,2}y_2^{\,2} + 3y_2 = 216y_1^{\,2}y_2^{\,2} + 36y_1y_2^{\,4} + 3y_2$$

קיבלנו תוצאה זהה.

קלאודיה ורטש   אורלי קלטניק – אורנשטיין 206,   טלפון: 03-6407229.
e-mail: sztrumcl@post.tau.ac.il   kletenik@post.tau.ac.il