

תרמודינאמיקה – תרגיל מספר 1

נגזרת ודיפרנציאל

1. משוואת המצב של גז אידיאלי הנה: $PV = nRT$

כאשר: P – הלחץ, V – הנפח, n – מספר המולים, T – הטמפרטורה ו R – קבוע הגזים. בהנחה שמספר המולים קבוע,

א. מהו הדיפרנציאל השלם של V כאשר n קבוע. (הנחייה: רשמו קודם את הפונקציה של V , ואז מצאו את הדיפרנציאל).

ב. מהו הדיפרנציאל השלם כאשר מתאפשר שינוי במספר המולים?

ג. השתמשו בהגדרת הנגזרת החלקית

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

בכדי להוכיח כי עבור פונקציה "טובה" מתקיים:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

רמז - צאו מן הקשר הבא:

2. משקולת בעלת מסה m תלויה על קפיץ וחופשית לנוע בכל הכיוונים (x, y, z) . האנרגיה הפוטנציאלית שלה נתונה ע"י:

$$E = \frac{1}{2} k [(z - z_0)^2 + (y - y_0)^2 + (x - x_0)^2] + mgz$$

כאשר k הוא קבוע הקפיץ.

א. מהו הדיפרנציאל של האנרגיה?

ב. האם הוא שלם?

ג. הסבירו מדוע או לחילופין הסבירו מה המשמעות של כך.

3. משוואת הגזים של ואן דר-ואלס ניתנת ע"י השוויון

$$\left(P + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT$$

כאשר a ו b הינם קבועים, ו v ו T הם הפרמטרים החופשיים.

א. מהו הדיפרנציאל של P ?

ב. האם הוא שלם?

4. נגזרות חלקיות וגדלים תרמודינמיים:

א. הוכיחו, ע"י גזירה מפורשת, כי עבור גז אידיאלי ($PV=nRT$) מתקיים הקשר הכללי שהוכח בכיתה

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = -1$$

(למספר מולים קבוע):

ב. עבור גז ון-דר-וואלס $RT = (v - b) \left(P + \frac{a}{v^2} \right)$ מהו $\left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T$? (חשבו תחילה מהי הדרך הנוחה ביותר למצוא זאת).

ג. רשמו את הדיפרנציאל השלם של הנפח (המצומצם) עבור גז ון-דר-וואלס.

5. עבור הפונקציה $Z(x_1, x_2) = 2x_1^2 x_2 + x_1$, המשתנים x_1 ו- x_2 הינם פונקציות של y_1 ו- y_2 :
 $x_1 = 3y_1 y_2$ ו- $x_2 = 4y_1 + y_2^2$. הראו שמתקיים כלל השרשרת :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y_1} \right)_{y_2} = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \right)_{x_2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1} \right)_{y_2} + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} \right)_{x_1} \left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1} \right)_{y_2}$$