מבוא לתורת המצב המוצק

פתרון תרגיל מס׳ 5

1. לפי מודל דרודה:
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=-e\vec{E}-\frac{\vec{p}}{\tau}$$

נכפול ב- $\vec{p}$:
$$\vec{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=-e\vec{E}\cdot\vec{p}-\frac{p^2}{\tau}$$

מאידך,
$$\vec{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{p^2}{2}$$

לכן, ובתוספת מיצוע על-פני כל האלקטרונים:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\frac{p^2}{2m}\right\rangle=-\frac{e\vec{E}}{m}\cdot\left\langle\vec{p}\right\rangle-\frac{\left\langle p^2\right\rangle}{m\tau}$$

אגף שמאל הוא קצב שינוי האנרגיה הממוצעת פר אלקטרון. אגף ימין מכיל את ההספק המושקע ע״י השדה החיצוני פר אלקטרון (האיבר הראשון) ואת ההספק פר אלקטרון האובד בהתנגשויות (חום).

במצב עמיד האנרגיה הממוצעת אינה משתנה, וההספק מן השדה החיצוני מאזן את ההספק האובד לחום, Q:
$$Q=\frac{\left\langle p^2\right\rangle}{m\tau}=-\frac{e\vec{E}}{m}\cdot\left\langle\vec{p}\right\rangle$$

צפיפות הזרם החשמלי היא
$$\vec{j}=-en\vec{v}=-en\left\langle\vec{p}\right\rangle/m$$

ולכן $Q=\frac{1}{n}\vec{j}\cdot\vec{E}$. זה הספק החום פר אלקטרון. פר יחידת נפח אנו מקבלים אפוא את חוק ג׳אול: $Qn=\vec{j}\cdot\vec{E}$.

2.

א. צפיפות המצבים במרחב $\vec{k}=(k_x,k_y)$ (עם פקטור 2 עבור הספין):
$$2\frac{L^2}{(2\pi)^2}\mathrm{d}^2k=\frac{2L^2}{(2\pi)^2}2\pi k\mathrm{d}k$$

הקשר בין k לאנרגיה ε:
$$\varepsilon=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$$

ולכן:
$$\frac{2L^2}{(2\pi)^2}2\pi k\mathrm{d}k=\frac{L^2}{\pi}\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\varepsilon}\,\frac{1}{2\hbar}\sqrt{\frac{2m}{\varepsilon}}\mathrm{d}\varepsilon=\frac{L^2m}{\pi\hbar^2}\mathrm{d}\varepsilon$$

מכאן:
$$D(\varepsilon)=\frac{L^2m}{\pi\hbar^2}$$

כלומר צפיפות המצבים של גז אלקטרונים דו-ממדי היא קבועה, אינה תלויה באנרגיה.

ב. בטמפרטורה 0 :

$$N=\int_0^{\varepsilon_\mathrm{F}} D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=\frac{L^2m}{\pi\hbar^2}\varepsilon_\mathrm{F}$$

ומכאן :

$$\varepsilon_\mathrm{F}=\frac{\pi\hbar^2}{m}\frac{N}{L^2}=\frac{\pi\hbar^2}{m}n$$

כלומר אנרגית פרמי של גז אלקטרונים דו-ממדי תלויה ליניארית בצפיפות.

ג. בטמפרטורה כלשהי :

$$N=\int_0^\infty D(\varepsilon)\,f(\varepsilon)=\frac{L^2m}{\pi\hbar^2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}\overset{x=\beta(\varepsilon-\mu)}{=}\frac{L^2m}{\pi\hbar^2\beta}\int_{-\beta\mu}^\infty\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}$$

$$=\frac{L^2m}{\pi\hbar^2\beta}\int_{-\beta\mu}^\infty\frac{e^{-x}\mathrm{d}x}{e^{-x}+1}=-\frac{L^2m}{\pi\hbar^2\beta}\ln(1+e^{-x})\Big|_{-\beta\mu}^{\infty}=\frac{L^2m}{\pi\hbar^2\beta}\ln(1+e^{\beta\mu})$$

מכאן :

$$\ln(1+e^{\beta\mu})=\beta\frac{\pi\hbar^2}{m}\frac{N}{L^2}=\beta\varepsilon_\mathrm{F}$$

ולכן :

$$\mu(T)=k_\mathrm{B}T\ln(e^{\beta\varepsilon_\mathrm{F}}-1)$$

ד. לעומת זאת, לפי פיתוח זומרפלד,

$$N=\int_0^\infty D(\varepsilon)\,f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=\int_0^\mu D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon+\sum_{n=1}^\infty a_n(k_\mathrm{B}T)^{2n}D^{(2n-1)}(\mu)$$

אבל במקרה הדו-ממדי $D(\varepsilon)$ אינה תלויה ב-ε, וכל האיברים מלבד הראשון מתאפסים.

האיבר הראשון נותן $N=\frac{L^2m}{\pi\hbar^2}\mu$, ומכאן ש- $\mu(T)\overset{?}{=}\varepsilon_\mathrm{F}$ לכל T!

תוצאה זו סותרת את החישוב המדויק של סעיף ג׳ ולכן שגויה. שתי התוצאות מתלכדות עבור $T=0$. אלא שפיתוח זומרפלד מניח אנליטיות ליד $T\to 0$, ותוצאת סעיף ג׳ <u>אינה</u> מקיימת הנחה זו. (בדקו למשל ש- $\partial\mu/\partial T\xrightarrow{T\to 0}\infty$.)