מבוא לתורת המצב המוצק

התפשטות גלים אלקטרומגנטיים במתכת (במסגרת תורת דרודה)

תורת דרודה מתייחסת אל אלקטרונים במתכת כאל גז קלסי (לא קוונטי) של חלקיקים טעונים שלילית, הנתונים בתוך "רקע" (השריג) טעון חיובית, והעוברים התנגשויות בקצב ממוצע של $1/\tau$. אנו מתעניינים בדינמיקה של שדות חשמליים ומגנטיים בפלסמה קלסית שכזו.

בהינתן התפלגות מרחבית של צפיפות מטען $\rho(\vec{r})$ ושל צפיפות זרם $\vec{j}(\vec{r})$, הדינמיקה של השדה החשמלי $\vec{E}$ והשדה המגנטי $\vec{B}$ מתוארת ע"י משוואות מקסוול (הכתובות כאן ביחידות cgs),

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E}=4\pi\rho \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{1}{c}\dot{\vec{B}} \\ \nabla\times\vec{B}=\dfrac{1}{c}\dot{\vec{E}}+\dfrac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases} \tag{1}$$

נניח כי האלקטרונים נעים בלי לשנות את צפיפותם, כך שהרקע החיובי מנטרל את מטענם בכל מקום, כלומר $\rho=0$.[1]

בנוסף, הבה נניח תחילה כי גם אין זרמים במערכת, $\vec{j}=0$, וזאת רק כדי להיזכר איך מתקבלת משוואת גלים אלקטרומגנטיים ממשוואות מקסוול. לוקחים curl של משוואה 1c. מחד, כתוצאה מהזהות הווקטורית $\nabla\times\nabla\times\vec{E}=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}$ וממשוואה 1a, מקבלים $\nabla\times\nabla\times\vec{E}=-\nabla^2\vec{E}$. מאידך, כשמציבים את משוואה 1d, מקבלים $\nabla\times\nabla\times\vec{E}=-(1/c^2)\ddot{\vec{E}}$. מהשוואת שתי התוצאות מתקבלת משוואת הגלים האלקטרומגנטיים בריק,

$$\rho=0,\ \vec{j}=0:\quad \nabla^2\vec{E}=\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{E}}, \tag{2}$$

עם מהירות התפשטות השווה למהירות האור c. הצבת פתרון גלי, $\vec{E}(\vec{r},t)=\tilde{\vec{E}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}$ (דהיינו טרנספורם פוריה של משוואה 2 במקום וזמן), נותנת $-k^2\tilde{\vec{E}}=(1/c^2)(-\omega^2)\tilde{\vec{E}}$, כלומר יחס נפיצה לינארי, $\omega(\vec{k})=c\,|\vec{k}|$, לפיו מהירות הפאזה ($v_\varphi=\omega/|\vec{k}|$) שווה למהירות החבורה ($\vec{v}_{\mathrm{g}}=\nabla_{\vec{k}}\omega$) שווה ל-c.

עתה נניח כי מתפתחים זרמים במערכת, $\vec{j}\neq 0$. חישוב זהה (לקיחת curl של משוואה 1c וכו') מניב את משוואת הגלים הבאה:

[1] הערה: אפשר לא להניח זאת ולטפל בדינמיקה של צפיפות המטען. נקבל אז גלים של צפיפות מטען. הקוונטיזציה שלהם נקראת "פלסמונים", בדיוק כפי שקוונטיזציה של הגלים האלקטרומגנטיים מובילה לפוטונים, וזו של גלים אלסטיים לפוננים. אולם כל זאת מצריך דיון נפרד.

$$\rho = 0,\ \vec{j} \neq 0: \quad \nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{E}} + \frac{4\pi}{c^2}\dot{\vec{j}}\ . \qquad (3)$$

נציב פתרון מתנודד בזמן, $\vec{E}(\vec{r},t) = \tilde{\vec{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ (דהיינו נבצע טרנספורם פוריה למשוואה 3 בזמן בלבד).

כל נקודה $\vec{r}$ במערכת חשה שדה AC $\tilde{\vec{E}}$, ונוצרת בה צפיפות זרם AC בשיעור $\tilde{\vec{j}} = \sigma(\omega)\tilde{\vec{E}}$, כאשר $\sigma(\omega)$ היא מוליכות ה-AC של גז האלקטרונים. בכתה מצאנו $\sigma(\omega) = \sigma_0/(1-i\omega\tau)$, כאשר σ_0 היא מוליכות ה-DC. משוואה 3 הופכת אפוא ל-

$$\nabla^2 \tilde{\vec{E}} = -\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\vec{E}} + \frac{4\pi}{c^2}(-i\omega)\sigma\tilde{\vec{E}} = -\frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + i\frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega}\right]\tilde{\vec{E}}\ . \qquad (4)$$

קיבלנו משוואת גלים אלקטרומגנטיים עם מהירות התפשטות תלוית-תדירות, $c' = c/n(\omega)$. מקדם השבירה $n(\omega)$ (או לחילופין המקדם הדיאלקטרי $\varepsilon(\omega)$) ניתנים ע״י

$$n^2(\omega) = \varepsilon(\omega) = 1 + i\frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega}\ . \qquad (5)$$

את הקשר בין k ל-ω (כלומר יחס הנפיצה) מוצאים ע״י הצבת $\tilde{\vec{E}}(\vec{r}) = \tilde{\tilde{\vec{E}}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ במשוואה 4 (דהיינו ביצוע טרנספורם פוריה גם במיקום). מקבלים

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + i\frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega}\right] = \frac{\omega^2}{c^2}n^2\ . \qquad (6)$$

כדי להבין את המשמעות של תוצאות אלה הבה נתמקד בתדירות גבוהה, $\omega \gg \tau^{-1}$. בגבול זה $\sigma(\omega) = \sigma_0/(1-i\omega\tau) \simeq -\sigma_0/(i\omega\tau)$, ו-

$$\omega \gg \tau^{-1}: \qquad k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{4\pi\sigma_0}{\omega^2\tau}\right) = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2}\right), \qquad (7)$$

כאשר הגדרנו את *תדירות הפלסמה*,

$$\omega_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{4\pi\sigma_0}{\tau}} = \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m}}\ . \qquad (8)$$

(בשוויון האחרון השתמשנו בנוסחת דרודה שפותחה בכתה, $\sigma_0 = ne^2\tau/m$.) כפי שנאמר בכתה, הזמן האופייני להתנגשויות של אלקטרונים במתכת הוא $\tau \sim 10^{-14}$ s, והמוליכות האופיינית של מתכת היא $\sigma_0 \sim 10^{17}\ \mathrm{s}^{-1}$. מכאן שהערכים האופייניים לתדירות הפלסמה במתכות הם $\omega_{\mathrm{p}} \sim 10^{16}\ \mathrm{s}^{-1}$. ערך זה גדול בהרבה מ-$\tau^{-1}$, ואנו יכולים אפוא לדון בתדירויות קטנות או גדולות מ-ω_{p} מבלי להפר את הנחת הקירוב $\omega \gg \tau^{-1}$.

עבור תדירויות קטנות מ- ω_{p} (ליתר דיוק $\tau^{-1} \ll \omega < \omega_{\mathrm{p}}$) אנו מקבלים ממשוואה 7 $k^2 < 0$, כלומר וקטור גל מדומה. משמעות הדבר היא שהגל אינו מתפשט אלא דועך במרחב. מאחר שהכנסנו גל בעל תדירות ממשית, אין דעיכה בזמן, כלומר אין בליעה. גל שכזה יוחזר אפוא מפני המתכת. זו הסיבה שמתכות אטומות ומחזירות היטב גלים אלקטרומגנטיים בתדירויות נמוכות מ- $\sim 10^{16}\ \mathrm{s}^{-1}$ (למשל אור נראה). אנו יכולים גם למצוא את עומק החדירה של הגל אל תוך המתכת במקרה זה. הוא ניתן ע״י אורך הדעיכה κ^{-1} המתקבל מערכו המדומה של וקטור הגל, $k = i\kappa$. ממשוואה 7 אנו מוצאים

$$\tau^{-1} \ll \omega < \omega_{\mathrm{p}}: \qquad \kappa \simeq \frac{1}{c}\sqrt{\omega_{\mathrm{p}}^2 - \omega^2}\ . \tag{8}$$

לתדירות גדולה מתדירות הפלסמה וקטור הגל ממשי וניתן ע״י משוואה 7, והגל מתפשט במרחב. אכן, עבור תדירויות בתחום העל-סגול מתכות הופכות שקופות לגלים אלקטרומגנטיים.

ההסבר האינטואיטיבי לתוצאות אלה נעוץ בזמן הסופי הדרוש לאלקטרונים להגיב לשדה החיצוני של הגל. זמן זה הוא מסדר גודל של $1/\omega_{\mathrm{p}}$. אם תדירות הגל קטנה מתדירות הפלסמה, האלקטרונים מספיקים להגיב במהלך זמן המחזור ונעים כך שהם מסככים את השדה של הגל. אם התדירות גדולה מתדירות הפלסמה, זמן המחזור קצר מדי, והשדה משתנה מהר יותר ממהירות תגובתם של האלקטרונים. האלקטרונים מפריעים אז רק מעט להתפשטות הגל. מאחר שהנחנו $\omega \gg \tau^{-1}$, לא מתרחשות כמעט כל התנגשויות במהלך זמן המחזור, וקצב תגובתם של האלקטרונים תלוי רק בצפיפותם ובאינרציה שלהם. זו הסיבה לכך שבמשוואה 8 אין תלות של תדירות הפלסמה ב- τ אלא רק ב-n וב-m.

לסיום – הערה מסקרנת.[2] נכתוב את יחס הנפיצה לגלים מתפשטים מתוך משוואה 7,

$$\omega > \omega_{\mathrm{p}}: \qquad \omega(\vec{k}) = \sqrt{c^2k^2 + \omega_{\mathrm{p}}^2}\ . \tag{9}$$

קל לראות שמהירות הפאזה של גלים אלה גדולה ממהירות האור!

$$\omega > \omega_{\mathrm{p}}: \qquad v_{\varphi} = \frac{\omega}{|\vec{k}\,|} = c\sqrt{1 + \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{c^2k^2}} > c\ . \tag{10}$$

האם משמעות הדבר שהתוצאות שלעיל אינן תקפות?! התשובה היא שלילית. המגבלה של מהירות האור מתייחסת למהירות העברת אינפורמציה, כלומר מהירותו של סיגנל המתקדם מנקודה אחת לשניה. זו ניתנת ע״י מהירות *החבורה*, ולא מהירות הפאזה. (קיימות דוגמאות נוספות למהירות פאזה העוברת את מהירות האור.) מהירות החבורה במקרה שלנו היא

$$\omega > \omega_{\mathrm{p}}: \qquad \vec{v}_{\mathrm{g}} = \nabla_{\vec{k}}\,\omega = \frac{c^2\,|\vec{k}\,|}{\sqrt{c^2k^2 + \omega_{\mathrm{p}}^2}}\hat{k} = \frac{c}{\sqrt{1 + \omega_{\mathrm{p}}^2/(c^2k^2)}}\hat{k}\,, \tag{11}$$

והיא תמיד קטנה ממהירות האור, כנדרש.

[2] הערה זו הובאה ע״י קלאודיה שטרום, סטודנטית בקורס לפני שנתיים.