21/3/2007

כימיה פיזיקלית 2 – פתרון תרגיל מספר 3

1. א. הטבלה מתארת את כל התוצאות האפשריות וניוונן.

רמות אנרגיה	ניוון
$3E_0$	1
$2E_0+E_1$	3
E_0+2E_1	3
$3E_1$	1
$2E_0+E_2$	3
$E_0+E_1+E_2$	**6**
$2E_1+E_2$	3
E_0+2E_2	3
E_1+2E_2	3
$3E_2$	1

ב. הרמה בעלת הניוון הגדול ביותר היא $E_0+E_1+E_2$.

ג. סך הניוונים הוא 27. זהו מספר הסידורים האפשריים של החלקיקים: מספר האופנים למקם כל חלקיק הוא 3 (באחת מרמות האנרגיה). ולכן ישנן 3X3X3=27 אפשרויות למקם את שלושת החלקיקים.

2. א. מטעמי סימטריה (אין הבדל בין ימין ושמאל) ההסתברות היא חצי.

ב. נפתור את האינטגרל עבור מצב עצמי $n=3$.

$$P(\tfrac{a}{3}<x<\tfrac{2a}{3})=\int_{a/3}^{2a/3}\Psi_3^*(x)\Psi_3(x)dx=\frac{2}{a}\int_{a/3}^{2a/3}\sin^2\left(\frac{3\pi x}{a}\right)dx=\frac{2}{a}\left[\frac{x}{2}-\frac{a}{12\pi}\sin\left(\frac{6\pi x}{a}\right)\right]_{a/3}^{2a/3}=$$

$$=\left[\frac{1}{3}-2\frac{\sin(4\pi)}{6\pi}\right]=\frac{1}{3}$$

ג. לפונקצית ההסתברות עבור מצב עצמי זה $P(x)=\frac{2}{a}\sin^2\frac{3\pi x}{a}$ ישנם שלושה ערכי מקסימום בתחום $(0<x<a)$. והם מתקבלים ב $x=a/6$, ב $x=a/2$ וב $x=5a/6$.(אפשר לקבל אותם ע"י השוואת נגזרת הפונקציה ל-0.)

3. הפרש אנרגיות במעבר מהרמה ה-4 ל-2 הוא

$$\Delta E=\left.\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\right|_{n=4}-\left.\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\right|_{n=2}=\frac{(16-4)\pi^2\hbar^2}{2ma^2}=\frac{6\pi^2\hbar^2}{ma^2}$$

כמו כן $\Delta E=\hbar\omega=2\pi\hbar f$, כלומר

$$a=\sqrt{\frac{6\pi\hbar}{2mf}}=\sqrt{\frac{3h}{2mf}}\approx\sqrt{\frac{3\cdot 6.626\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{2\cdot 9.11\cdot 10^{-31}\mathrm{Kg}\cdot 6.10^{14}\mathrm{s^{-1}}}}\approx 1.3\cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}=1.3\mathrm{nm}$$

אמיר חלבה – אורנשטיין 405, טלפון: 03-6408902.
e-mail: ehaleva@post.tau.ac.il

4. הפרש האנרגיות הוא

$$\Delta E = \left.\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\right|_{n=2} - \left.\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\right|_{n=1} = \frac{(4-1)\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \frac{3h^2}{8ma^2} \approx \frac{3\cdot(6.626\cdot10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s})^2}{8\cdot 9.11\cdot10^{-31}\,\mathrm{Kg}\cdot10^{-20}\,\mathrm{m}^2} \approx 1.8\cdot10^{-17}\,\mathrm{J}$$

אורך הגל של הפוטון הנפלט מתקבל מהקשר

$$\Delta E = hc/\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = hc/\Delta E \approx \frac{6.626\cdot10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}\cdot 3.0\cdot10^{8}\,\mathrm{m/s}}{1.8\cdot10^{-17}\,\mathrm{J}} \approx 1.1\cdot10^{-8}\,\mathrm{m{=}11nm} \ \in \ \lambda_{\mathrm{UV}}$$

5. אין צורך לפתור את הבעיה מחדש, כל מה שעלינו לעשות הוא להזיז את מערכת הקואורדינטות ב $-\frac{a}{2}$. הפונקציות העצמיות הן

$$\Psi_n(x) = \Psi_n^{\mathrm{orig}}(x-\tfrac{a}{2}) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi(x-\frac{a}{2})}{a} = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}-\frac{n\pi}{2}\right) =$$

$$\sqrt{\frac{2}{a}}\left(\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi}{2} - \cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} \pm\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a} & n\in\mathrm{even} \\ \pm\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{n\pi x}{a} & n\in\mathrm{odd} \end{cases}$$

הערכים העצמיים של הבעיה אינם תלויים בבחירת מערכת הקואורדינטות ולכן הם נשארים $\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$.

הערה, אין צורך להתייחס לפאזה של פונקציות הגל (לסימן + או -) מכיוון שהערך הפיזיקאלי המדיד הוא ההסתברות $P(x) = \left|\Psi^2(x)\right|$ והוא ממילא אינו תלוי בפאזה.

אמיר חלבה – אורנשטיין 405, טלפון: 03-6408902.
e-mail: ehaleva@post.tau.ac.il