

- 30% 1. נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם ארכי קשתות אי-שליליים.
- א. יהי (S,T) חתך $s-t$. נפחית קבוע מכל הקשתות הקדמיות בחתך ונוסיף את אותו הקבוע לכל הקשתות האחוריות בחתך. להוכיח שקבוצת המסלולים הקצרים בין s ל- t לא משתנה.
- ב. להשתמש בתכונה הנ"ל לבניית אלגוריתם לחישוב מק"ב בגרף מכוון חסר מעגלים. מה סיבוכיות האלגוריתם? רמז: אם האורכים אי-שליליים וקיים מסלול $s-t$ באורך אפס, אז זה מק"ב.
- ג. כנ"ל לגרף כללי. האם התוצאה היא אלגוריתם מוכר? האם האלגוריתמים בסעיף זה ובסעיף הקודם תקפים גם כשהגרף מכיל קשתות באורך שלילי? (לנמק את התשובה.)
- 30% 2. נתון גרף מכוון בו רוצים לפתור את בעיית הסירקולציה במחיר מינימלי. מחיר של מעגל הוא 0 אם סך אורכי הקשתות שלו בכיוון נתון שווה לסך האורכים בכיוון ההפוך. ע"י שינויים קלים במחירים ניתן להגיע לבעיה שקולה שבה אין מעגלי 0. נניח שהקלט מקיים תכונה זו. נתון פתרון דואלי.
- א. להוכיח שהקשתות בהן $v_j=0$ מגדירות יער (כאן מתעלמים מכיווני הקשתות).
- ב. להשתמש בתכונה של הסעיף הקודם ולתאר אלגוריתם הבודק ביעילות אם קיימת סירקולציה המקיימת את תנאי המשפט המשלים ביחס לפתרון הדואלי הנתון.
- ג. נניח שאלגוריתם מראה שאין סירקולציה כזאת. להראות שהאלגוריתם זיהה חתך חיובי.
- ד. לסכם את כל הנ"ל לאלגוריתם לפתרון בעיית הסירקולציה.
- 10% 3. לנסח ולהוכיח את משפט הופמן לסירקולציה.
- 10% 4. נתונה בעיית השמה על גרף דו-צדדי שלם עם קבוצות צמתים S ו- T . להוכיח שפתרון הבעיה מזווג לפחות לאחד הצמתים ב- S את הצומת ב- T שמחירו לצומת הנתון קטן ביותר. (רמז: להראות שאם זה לא המצב אז ניתן לשפר את הפתרון.)
- 10% 5. נתון גרף עם משקלים לקשתות וקנסות לצמתים. להראות איך מחשבים זוג שמביא למינימום את הסכום של משקל הקשתות בזיווג והקנסות של הצמתים שאינם בזיווג. (רמז: ניתן להמיר את הבעיה לבעיית זיווג רגילה.)
- 10% 6. נתון גרף G לא מכוון עם n צמתים ואורכי קשתות אי-שליליים. נבנה גרף H מעותק של הגרף המושרה ב- G ע"י הצמתים $\{1, \dots, n-1\}$, עותק של הגרף המושרה ב- G ע"י הצמתים $\{n, \dots, 2\}$, וקשתות באורך 0 המחברות ל- $i=2, \dots, n-1$ את שני העותקים של הצומת i . נחשב ב- H זוג מושלם במשקל קטן ביותר. מה משמעות הפתרון במונחי G ? להראות שדרישת האי-שליליות נחוצה.