TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב
RAYMOND AND BEVERLY SACKLER FACULTY OF EXACT SCIENCES
SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
הפקולטה למדעים מדויקים ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
בית הספר למדעי המתמטיקה

חבורות פרוסופיות

מערכי שעור

תשע"ט

נערך על ידי

דן הרן

עדכון אחרון: 26.1.2022

ספרות מומלצת

ככלל מספיק להעזר בסיכומי ההרצאות שילכו ויתפרסמו בהמשך לדף זה. אך מומלץ להציץ גם בספרים:

• L. Ribes, *Introduction to Profinite Groups and Galois Cohomology*, Queen's University, Queen's papers in pure and applied Mathematics 24, Kingston, 1970

• L. Ribes, P. Zalesskii, *Profinite Groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 40, Springer 2000, second editon: 2010

• M. Fried, M. Jarden, *Field Arithmetic* (3rd edition), Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 11, Springer 2008

1. מושגים בסיסיים בטופולוגיה

(פרק זה לא יועבר בהרצאה.)

הגדרה 1.1: **מרחב טופולוגי** $(X,\mathcal{T})$ הוא קבוצה X יחד עם משפחה $\mathcal{T}$ של תת־קבוצות של X המקיימת

(א) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

(ב) אם $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{T}$ אז גם $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$;

(ג) אם $U_1,\dots,U_n \in \mathcal{T}$ אז גם $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

אברי $\mathcal{T}$ נקראים **קבוצות פתוחות**. המשלימים שלהם ב־X נקראים **קבוצות סגורות**. המשפחה $\mathcal{T}$ נקראת **טופולוגיה** על X. ∎

דוגמה 1.2: (א) $X=\mathbb{R}$, $\mathcal{T}$ היא קבוצת כל האיחודים של רווחים פתוחים מהצורה (a,b) (גם איחוד ריק).

(ב) $X=\mathbb{R}^3$, $\mathcal{T}$ היא קבוצת כל האיחודים של כדורים פתוחים מהצורה $\{x\in\mathbb{R}^3 |\ ||x-a||<\varepsilon\}$ (גם איחוד ריק).

(ג) X קבוצה כלשהי, $\mathcal{T}$ משפחת כל התת קבוצות של X. אז $\mathcal{T}$ **הטופולוגיה הדיסקרטית**.

(ד) X קבוצה כלשהי, $\mathcal{T}=\mathcal{T}'\cup\{\emptyset\}$, באשר $\mathcal{T}'$ משפחת כל התת קבוצות של X בעלות משלים סופי.

(ה) יהי $(X,\mathcal{T})$ מרחב טופולוגי ותהי Y תת קבוצה של X. נסמן $\mathcal{S}=\{Y\cap U|\ U\in\mathcal{T}\}$. אז גם $(Y,\mathcal{S})$ מרחב טופולוגי. במקרה זה אומרים שהטופולוגיה על Y **מושרית** מהטופולוגיה על X. ∎

הגדרה 1.3: מרחב טופולוגי $(X,\mathcal{T})$ הוא

(א) מרחב **האוסדורף** אם לכל $x_1,x_2\in X$ שונות יש $U_1,U_2\in X$ כך ש־$x_1\in U_1,\ x_2\in U_2$ ו־$U_1\cap U_2=\emptyset$.

(ב) **קומפקטי** אם לכל משפחה $\{U_i\}_{i\in I}$ של קבוצות פתוחות ב־X, כך ש־$X=\bigcup_{i\in I}U_i$, יש $J\subseteq I$ סופית כך ש־$X=\bigcup_{i\in J}U_i$. באופן שקול, לכל משפחה $\{F_i\}_{i\in I}$ של קבוצות סגורות ב־X, אשר החיתוך של מספר סופי של אבריה אינו ריק, מתקיים $\bigcap_{i\in I}F_i\neq\emptyset$. ∎

משפט 1.4: *יהי X מרחב האוסדורף קומפקטי ותהי $Y\subseteq X$ תת מרחב (עם הטופולוגיה המושרית מ־X). אז Y האוסדורף והוא קומפקטי אם ורק אם Y סגורה ב־X.*

הגדרה 1.5: יהי $(X,\mathcal{T})$ מרחב טופולוגי. קבוצה $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{T}$ נקראת

(א) **בסיס של** $\mathcal{T}$, אם $\mathcal{T}$ היא משפחת האיחודים של אברי $\mathcal{S}$.

(ב) **תת־בסיס של** $\mathcal{T}$, אם משפחת החיתוכים הסופיים של אברי $\mathcal{S}$ היא בסיס של $\mathcal{T}$. ∎

בסיס (או תת־בסיס) של טופולוגיה קובע את הטופולוגיה.

הגדרה 1.6: תהי $\{(X_i,\mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ משפחה של מרחבים טופולוגיים. נגדיר **טופולוגיית המכפלה** (=**טופולוגיית טיכונוף**) $\mathcal{T}$ על $X=\prod_{i\in I}X_i$ על ידי הבסיס הבא

$$\mathcal{S}=\Big\{\prod_{i\in I}U_i |\ U_i\in\mathcal{T}_i \text{ לכל } i\in I,\ U_i=X_i \text{ כמעט לכל } i\in I\Big\}$$

אז $(X,\mathcal{T})$ מרחב טופולוגי. ∎

משפט 1.7 (טיכונוף): *יהיו $\{(X_i,\mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ מרחבי האוסדורף קומפקטיים. אז גם $\prod_{i\in I} X_i$ האוסדורף קומפקטי.*

הגדרה 1.8: יהיו $(X_1,\mathcal{T}_1),(X_2,\mathcal{T}_2)$ שני מרחב טופולוגיים. העתקה $f\colon X_1\to X_2$ היא **רציפה** אם $f^{-1}(U_2)\in\mathcal{T}_1$ לכל $U_2\in\mathcal{T}_2$. באופן שקול: יהיו $\mathcal{S}_1\subseteq\mathcal{T}_1,\mathcal{S}_2\subseteq\mathcal{T}_2$ בסיסים; אז לכל $x\in X_1$ ולכל $U_2\in\mathcal{S}_2$ שמכילה את $f(x)$ קיימת $U_1\in\mathcal{S}_1$ כך ש־$f(U_1)\subseteq U_2$. ∎

תרגיל 1.9: *תהי $f\colon X_1\to X_2$ העתקה רציפה של מרחבים טופולוגיים.*

(א) *אם $Y\subseteq X_1$ קומפקטית אז $f(Y)\subseteq X_2$ קומפקטית.*

(ב) *נניח ש־ X_1,X_2 מרחבי האוסדורף קומפקטיים. אם $Y\subseteq X_1$ סגורה אז $f(Y)\subseteq X_2$ סגורה.*

(ג) *נניח ש־ X_1,X_2 מרחבי האוסדורף קומפקטיים. אם f חד־חד־ערכית ועל, אז $f^{-1}\colon X_2\to X_1$ רציפה.*

תרגיל־הגדרה 1.10: *יהי $(X,\mathcal{T})$ מרחב טופולוגי ותהי $f\colon X\to X'$ העתקה של קבוצות. אז*

$$\mathcal{T}' := \{V'\subseteq X' \mid f^{-1}(V')\in\mathcal{T}\}$$

*היא טופולוגיה על X', שנקראת **טופולוגיית המנה** ביחס ל־ f. ההעתקה f רציפה ביחס ל־ $\mathcal{T},\mathcal{T}'$.*

הגדרה 2.1: **קבוצה מכוונת** היא קבוצה I עם יחס סדר חלקי $\le$, כך שלכל $i,j\in I$ קיים $k\in I$ המקיים $i,j\le k$.

דוגמה 2.2: (א) $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{R}$ עם הסדר הרגיל;

(ב) $\mathbb{N}$ עם יחס החילוק (כלומר, $i\ge j$ אם קיים m כך ש־$i=mj$).

(ג) I משפחת כל הקבוצות (הסופיות) של קבוצה מסוימת X, עם יחס ההכלה $\subseteq$.

קבוצה מכוונת תשמש אותנו כקבוצת אינדקסים של מערכת:

הגדרה 2.3: תהי $(I,\le)$ קבוצה מכוונת. לכל $i\in I$ תהי S_i קבוצה, ולכל $j\le i$ ב־I תהי $\pi_{ij}\colon S_i\to S_j$ העתקה. אז $(S_i,\pi_{ij}|\ i,j\in I,\ i\ge j)$ נקראת **מערכת הפוכה** (**על** I) אם

(1) $\pi_{ii}=\mathrm{id}$ לכל $i\in I$;

(2) לכל $i\ge j\ge k$ ב־I התרשים הבא חילופי

$$\begin{tikzcd}
S_i \arrow[dr, "\pi_{ij}"'] \arrow[drr, "\pi_{ik}"] & & \\
& S_j \arrow[r, "\pi_{jk}"'] & S_k
\end{tikzcd}$$

חסם של המערכת הנ"ל היא קבוצה S יחד עם העתקות $\{\pi_i\colon S\to S_i\}_{i\in I}$ כך שלכל $j\le i$ ב־I התרשים הבא חילופי

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "\pi_i"] \arrow[drrr, "\pi_j"'] & & S_i \arrow[dr, "\pi_{ij}"'] \arrow[drr, "\pi_{ik}"] & & \\
& & & S_j \arrow[r, "\pi_{jk}"'] & S_k
\end{tikzcd}$$

חסם $(S,\pi_i|\ i\in I)$ נקרא **גבול הפוך** של המערכת הנ"ל אם לכל חסם $(S',\pi_i'|\ i\in I)$ קיימת העתקה יחידה $\pi\colon S'\to S$ כך שלכל $i\in I$ התרשים הבא חילופי

$$\begin{tikzcd}
S' \arrow[r, "\exists!\pi"] \arrow[dr, "\pi_i'"'] & S \arrow[d, "\pi_i"] \\
& S_i
\end{tikzcd}$$

סימון: $S=\varprojlim_{i\in I} S_i$.

דוגמה 2.4: מערכת הפוכה. לכל $n\in\mathbb{N}$ תהי $A_n=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. עבור $n|m$ תהי $\pi_{mn}\colon A_m\to A_n$ ההעתקה $k\pmod m\mapsto k\pmod n$. אז (A_n,π_{mn}) מערכת הפוכה על הקבוצה המכוונת $\mathbb{N}$ עם יחס החילוק. כמו כן, $\mathbb{Z}$ עם ההעתקות הטבעיות $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ הוא חסם של המערכת. נראה מאוחר יותר שהוא איננו גבול.

באופן אנלוגי (על ידי הפיכת כל החצים בהגדרה 2.3) נגדיר

הגדרה 2.5: תהי $(I,\le)$ קבוצה מכוונת. לכל $i\in I$ תהי S_i קבוצה, ולכל $j\le i$ ב־I תהי $\lambda_{ji}\colon S_j\to S_i$ העתקה. אז $(S_i,\lambda_{ji}|\ i,j\in I,\ i\ge j)$ נקראת **מערכת ישרה** (**על** I) אם

(1) $\lambda_{ii}=\mathrm{id}$ לכל $i\in I$;

(2) לכל $k \geq j \geq i$ ב־I התרשים הבא חילופי

$$\begin{tikzcd} S_i & \\ S_j \arrow[u, "\lambda_{ji}"] & S_k \arrow[l, "\lambda_{kj}"] \arrow[ul, "\lambda_{ki}"'] \end{tikzcd}$$

חסם של המערכת הנ"ל היא קבוצה S יחד עם העתקות $\{\lambda_i\colon S_i \to S\}_{i\in I}$ כך שלכל $j \geq i$ ב־I התרשים הבא חילופי

$$\begin{tikzcd} S & S_i \arrow[l, "\lambda_i"'] & \\ & S_j \arrow[u, "\lambda_{ji}"] \arrow[ul, "\lambda_j"] & S_k \arrow[l, "\lambda_{kj}"] \arrow[ul, "\lambda_{ki}"'] \end{tikzcd}$$

חסם $(S, \lambda_i |\ i \in I)$ נקרא **גבול ישר** של המערכת הנ"ל אם לכל חסם $(S', \lambda'_i |\ i \in I)$ קיימת העתקה יחידה $\lambda\colon S \to S'$ כך שלכל $i \in I$ התרשים הבא חילופי

$$\begin{tikzcd} S' & S \arrow[l, "\exists!\lambda"'] \\ & S_i \arrow[u, "\lambda_i"'] \arrow[ul, "\lambda'_i"] \end{tikzcd}$$

סימון: $S = \varinjlim_{i\in I} S_i$.

הערה 2.6: באופן כללי יותר מגדירים גבול הפוך (ישר) **בקטגוריה**, כגון חבורות (עם הומומורפיזמים), מרחבים טופולוגיים (עם העתקות רציפות), מרחבים וקטוריים מעל שדה מסוים (עם העתקות לינאריות), וכד'. (כלומר, כל הקבוצות בהגדרה הם אובייקטים של הקטגוריה וכל ההעתקות הן מורפיזמים בקטגוריה.)

תרגיל 2.7: *הוכח שגבול הפוך (ישר) ־ אם הוא קיים ־ הוא יחיד, עד כדי איזומורפיזם בקטגוריה בה מדובר.*

בעקבות התרגיל הזה אפשר לומר "הגבול **ה**הפוך (**ה**ישר)" במקום גבול הפוך (ישר).

משפט 2.8: *תהי (S_i, π_{ij}) מערכת הפוכה של קבוצות. תהי*

$$S = \left\{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} S_i |\ \pi_{ij}(x_i) = x_j \text{ לכל } i \geq j\right\} \tag{1}$$

ולכל $j \in I$ תהי $\pi_j\colon S \to S_j$ ההטלה $(x_i)_{i\in I} \mapsto x_j$. אזי $(S, \pi_i |\ i \in I)$ הוא גבול הפוך של המערכת הנ"ל.

הוכחה: לפי הגדרת S, $(S, \pi_i |\ i \in I)$ הוא חסם של המערכת ההפוכה. יהי $(S', \pi'_i |\ i \in I)$ חסם נוסף. נגדיר $\pi\colon S' \to S$ כך: $\pi(x') = (\pi'_i(x'))_{i\in I}$ לכל $x' \in S'$. אז לכל $i \in I$ מתקיים $\pi_i(\pi(x')) = \pi'_i(x')$, וברור שזוהי ההגדרה האפשרית היחידה כדי ששוויון זה יתקיים. ∎

דוגמה 2.9: תהי $\{S_i = (0, \frac{1}{i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ מערכת הפוכה של קטעים פתוחים עם ההעתקות $\pi_{ij}\colon S_i \to S_j$ שהן ההכלות. אז $\varprojlim_{i\in\mathbb{N}} S_i = \emptyset$.

משפט 2.10: *גבול הפוך קיים בקטגוריות הבאות:*

(א) *קבוצות (עם העתקות)*

(ב) *חבורות (עם הומומורפיזמים)*

(ג) *מרחבים טופולוגיים (עם העתקות רציפות)*

(ד) *חבורות טופולוגיות (עם הומומורפיזמים רציפים - ראה הגדרה בפרק הבא).*

הוכחה: כמו במשפט 2.8 (אשר מוכיח את (א)), רק צריך להוכיח כי S אובייקט בקטגוריה וההעתקות π_i שהוגדרו שם הן העתקות בקטגוריה. בד"כ מוכיחים זאת כך: קודם מוכיחים כי $\prod_{i\in I} S_i$ עם הטלות על הקואורדינטות הם בקטגוריה, ואח"כ מוכיחים ש-S עם הצמצומים של ההטלות ל-S הם בקטגוריה. למשל, במקרה (ג), הטופולוגיה על $\prod_{i\in I} S_i$ היא טופולוגיית המכפלה והטופולוגיה על S היא הטופולוגיה שלו כתת מרחב של $\prod_{i\in I} S_i$. הפרטים מושארים לקורא. ∎

תרגיל 2.11: *תהי (S_i, π_{ij}) מערכת הפוכה של מרחבים טופולוגיים. לכל $i \in I$ יהי $\mathcal{B}_i$ בסיס של S_i. יהי $(S, \pi_i | i \in I)$ הגבול שלה. אז*

$$\mathcal{B} = \{\pi_j^{-1}(V_j) |\ V_j \in \mathcal{B}_j,\ j \in I\}$$

הוא בסיס לטופולוגיה על S.

פתרון: בלי הגבלת הכלליות S, π_j נתונים על ידי משפט 2.8. אז

$$\pi_j^{-1}(V_j) = S \cap (V_j \times \prod_{i\neq j} S_i)$$

לכל $V_j \in \mathcal{B}_j$.

טופולוגיית המכפלה על $\prod_{i\in I} S_i$ נתונה, כידוע, על ידי בסיס של איברים מהצורה הבאה:

$$W = \prod_{j\in J} V_j \times \prod_{i\in I\setminus J} S_i,$$

באשר J תת קבוצה סופית של I ו-$V_j \in \mathcal{B}_j$ תת קבוצה של S_j לכל $j \in J$. אז קבוצות מהצורה

$$W \cap S = \bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(V_j)$$

מהוות בסיס של S בטופולוגיה של תת מרחב. בפרט בסיס זה מכיל את $\mathcal{B}$, ולכן כל אברי $\mathcal{B}$ הם קבוצות פתוחות. נותר להראות שכל איבר $W \cap S$ בבסיס זה הוא איחוד של אברי $\mathcal{B}$. ואכן, J סופית, לכן יש $i \in I$ כך ש- $i \geq j$ לכל $j \in J$. אז $V = \bigcap_{j\in J} \pi_{ij}^{-1}(V_j) \subseteq S_i$ פתוחה ב-S_i ולכן היא איחוד של אברי $\mathcal{B}_i$. לכן $\pi_i^{-1}(V)$ היא איחוד של אברי $\mathcal{B}$. אבל

$$W \cap S = \bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(V_j) = \bigcap_{j\in J} \pi_i^{-1}\big(\pi_{ij}^{-1}(V_j)\big) = \pi_i^{-1}\big(\bigcap_{j\in J} \pi_{ij}^{-1}(V_j)\big) = \pi_i^{-1}(V). \quad ∎$$

משפט 2.12: *תהי $(S_i, \pi_{ij}|\ i \in I)$ מערכת הפוכה של מרחבי האוסדורף קומפקטיים לא ריקים. אז גם $S = \varprojlim_{i\in I} S_i$ מרחב האוסדורף קומפקטי לא ריק.*

הוכחה: נסמן $S' = \prod_{i\in I} S_i$. ודאי $S' \neq \emptyset$ האוסדורף. לפי משפט טיכונוף S' קומפקטי. הוא גם האוסדורף.

נשים לב כי $S = \bigcap_{j\geq k} X_{jk}$, באשר

$$X_{jk} = \{(x_i)_{i\in I} \in S' |\ \pi_{jk}(x_j) = x_k\} \text{ לכל } j \geq k.$$

לכל $j_1 \geq k_1, \ldots, j_n \geq k_n$ החיתוך $\bigcap_{\nu=1}^{n} X_{j_\nu k_\nu}$ אינו ריק. אכן, יש j כך ש־$j \geq j_1, \ldots, j_n$; נבחר $x_j \in S_j$ ונגדיר $x_i = \pi_{ji}(x_j)$ לכל $j \geq i$ ונבחר $x_i \in S_i$ באופן שרירותי עבור $j \not\geq i$. אז $(x_i)_{i\in I} \in \bigcap_{\nu=1}^{n} X_{j_\nu k_\nu}$.
כיוון שחיתוך של קבוצות סגורות לא ריקות במרחב קומפקטי בעלות תכונת החיתוך הסופי היא קבוצה לא ריקה וסגורה וקבוצה סגורה במרחב האוסדורף קומפקטי היא מרחב האוסדורף קומפקטי, די להוכיח ש־X_{jk} סגורה ב־S' לכל $J \geq k$. לשם כך נוכיח כי $S' \smallsetminus X_{jk}$ פתוחה.

ואכן, יהי $(x_i) \in S' \smallsetminus X_{jk}$. אז $\pi_{jk}(x_j) \neq x_k$. כיוון ש־S_k הוא האוסדורף, יש $U, V \subseteq S_k$ פתוחות זרות כך ש־$\pi_{jk}(x_j) \in U$ ו־$x_k \in V$. הקבוצה $\{(x'_i)_{i\in I} \in S' |\ x'_j \in \pi_{jk}^{-1}(U), x'_k \in V\}$ הינה פתוחה ב־S', מכילה את $(x_i)_{i\in I}$, ומוכלת ב־$S' \smallsetminus X_{jk}$. לכן $S' \smallsetminus X_{jk}$ פתוחה. ∎

טענה 2.13: *תהי $(S_i, \pi_{ij}|\ i \in I)$ מערכת הפוכה של מרחבים טופולוגיים ויהי $(S', \pi'_i|\ i \in I)$ חסם שלה (כמרחב טופולוגי). נניח כי $\pi'_i\colon S' \to S_i$ היא על, לכל $i \in I$. אז ההעתקה המושרית $\pi\colon S' \to S = \varprojlim_{i\in I} S_i$ מעתיקה את S' על קבוצה צפופה ב־S. אם S_i, S' מרחבי האוסדורף קומפקטיים, אז π על.*

פתרון: צריך להוכיח שאם $\emptyset \neq U \subseteq S$ פתוחה אז $\pi(S') \cap U \neq \emptyset$. בלי הגבלת הכלליות U בסיסית, כלומר, $U = \pi_i^{-1}(U_i)$, באשר $\emptyset \neq U_i \subseteq S_i$ פתוחה (בסיסית). לפי ההנחה יש $x' \in S'$ כך ש־$\pi'_i(x') \in U_i$. יהי $x = \pi(x')$. אז $\pi_i(x) = \pi'_i(x') \in U_i$, לכן $x \in U$.

אם S_i האוסדורף קומפקטיים, אז, לפי משפט 2.12, גם S האוסדורף קומפקטי. אם S' קומפקטי, אז גם $\pi(S')$ קומפקטית. לכן היא סגורה ב־S. קבוצה סגורה וצפופה היא כל המרחב S. לכן $\pi(S') = S$. ∎

ם

תרגיל 2.14: *תהי $(S_i, \pi_{ij}|\ i \in I)$ מערכת הפוכה של מרחבי האוסדורף קומפקטיים לא ריקים. יהי $S = \varprojlim_{i\in I} S_i$ עם העתקות הגבול $\pi_i\colon S \to S_i$, לכל $i \in I$. אם π_{ij} על, לכל $i \geq j$, אז π_i על, לכל $i \in I$.*

הוכחה: יהי $k \in I$ ויהי $x \in S_k$. נסמן $S'_i = \begin{cases} \pi_{ik}^{-1}(\{x\}) & i \geq k \\ S_i & \text{אחרת} \end{cases}$ אז $(S'_i, \pi_{ij}|\ i \in I)$ מערכת הפוכה של מרחבי האוסדורף קומפקטיים לא ריקים. יהי $S' = \varprojlim_{i\in I} S'_i$. לפי משפט 2.12, $S' \neq \emptyset$. אבל $S' \subseteq S$ וכל $x' \in S'$ מקיים $\pi_k(x') = x \in S_k$. ∎

הגדרה 3.1: חבורה טופולוגית. $(G,\mathcal{T})$ הוא חבורה G יחד עם טופולוגיה $\mathcal{T}$ על הקבוצה G כך ש־$(G,\mathcal{T})$ מרחב האוסדורף והעתקת המכפלה $G\times G\to G$ (הנתונה על ידי $(g_1,g_2)\mapsto g_1g_2$) והעתקת ההופכי $G\to G$ (הנתונה על ידי $g\mapsto g^{-1}$) הן רציפות. ∎

תרגיל 3.2: *תהי G חבורה טופולוגית. אם $U\subseteq G$ פתוחה (סגורה) ו־$g\in G$ אז Ug,gU,U^{-1} פתוחות (סגורות).*

למה 3.3: *תהי G חבורה טופולוגית, $H\le G$.*

(א) *אם H פתוחה, אז H גם סגורה.*

(ב) *אם H סגורה ו־$(G:H)<\infty$ אז H גם פתוחה.*

(ג) *אם G קומפקטית ו־H פתוחה, אז $(G:H)<\infty$.*

הוכחה: מתקיים $G=\dot\bigcup_{i\in I}Hg_i$, באשר $(G:H)=|I|$, ויש $i_0\in I$ יחיד כך ש־$Hg_{i_0}=H$. אז

(א) $\dot\bigcup_{i\ne i_0}Hg_i$ פתוחה, לכן $H=G\smallsetminus\dot\bigcup_{i\ne i_0}Hg_i$ סגורה.

(ב) $\dot\bigcup_{i\ne i_0}Hg_i$ סגורה, לכן $H=G\smallsetminus\dot\bigcup_{i\ne i_0}Hg_i$ פתוחה.

(ג) בגלל הקומפקטיות נובע מתוך $G=\dot\bigcup_{i\in I}Hg_i$ שיש $J\subseteq I$ סופית כך ש־$G=\dot\bigcup_{i\in J}Hg_i$. אבל איחוד הראשון הוא איחוד זר של קבוצות לא ריקות, לכן $I=J$. ∎

משפט 3.4: *התנאים הבאים על חבורה טופולוגית G שקולים זה לזה:*

(א) *G איזומורפית (כלומר, שווה) לגבול הפוך של חבורות סופיות (דיסקרטיות).*

(ב) *G קומפקטית האוסדורף ויש לה בסיס לטופולוגיה של קוסטים של תת חבורות נורמליות פתוחות.*

(ג) *G קומפקטית האוסדורף ויש לה בסיס לטופולוגיה של קבוצות פתוחות־סגורות.*

הוכחה: (א)⇐(ב): נניח $(G,\pi_i)=\varprojlim G_i$, באשר G_i סופיות עם טופולוגיה דיסקרטית. לפי משפט 2.12, G היא קומפקטית האוסדורף. לפי תרגיל 2.11 יש לה בסיס המורכב מקבוצות מהצורה $\pi_i^{-1}(g_i)$, באשר $i\in I$, $g_i\in G_i$. קבוצות אלה הן קוסטים של $\operatorname{Ker}\pi_i=\pi_i^{-1}(1)$, שהינן פתוחות ב־$G$.

(ב)⇐(ג): ברור.

(ג)⇐(א): נחלק את ההוכחה לארבע טענות:

טענה 1: *תהי $U\subseteq G$ פתוחה־סגורה, $1\in U$. אז יש $V\subseteq U$ פתוחה־סגורה, $1\in V$ כך ש־$UV\subseteq U$.* אכן, לכל $x\in U$ מתקיים $x\cdot 1=x\in U$, לכן, לפי רציפות המכפלה, יש $1\in V_x\subseteq U, x\in U_x\subseteq U$ בסיסיות (ובפרט פתוחות־סגורות) כך ש־$U_xV_x\subseteq U$. אך U סגורה, לכן קומפקטית, $U=\bigcup_{x\in U}U_x$, לכן יש $x_1,\dots,x_n\in U$ כך ש־$U=\bigcup_{i=1}^nU_{x_i}$. יהי $V=\bigcap_{i=1}^nV_{x_i}$. אז V פתוחה־סגורה, ומתקיים $UV=\bigcup_{i=1}^nU_{x_i}V\subseteq\bigcup_{i=1}^nU_{x_i}V_{x_i}\subseteq U$.

טענה 2: *תהי $G \supseteq U$ פתוחה, $1 \in U$. אז יש $H \le G$ פתוחה כך ש־$H \subseteq U$.* אכן, בלי הגבלת הכלליות U בסיסית ולכן פתוחה־סגורה. תהי V כמו בטענה 1. בלי הגבלת הכלליות $V = V^{-1}$ אחרת נחליף את V ב־$V \cap V^{-1}$. באינדוקציה מתקיים $UV^n \subseteq U$ לכל $n \in \mathbb{N}$ (כי $UV^n = (UV^{n-1})V \subseteq UV \subseteq U$). בפרט $V^n \subseteq U$. נשים לב ש־V^n פתוחה, כי $V^n = \bigcup_{x \in V^{n-1}} Vx$ איחוד של קבוצות פתוחות. לכן $H := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V^n \subseteq U$ פתוחה. אבל H תת חבורה של G, כי $1 \in H$, $V^m V^n \subseteq V^{m+n} \subseteq H$ ו־$(V^n)^{-1} = (V^{-1})^n = V^n \subseteq H$.

טענה 3: *תהי $G \supseteq U$ פתוחה, $1 \in U$. אז יש $N \triangleleft G$ פתוחה כך ש־$N \le U$.* אכן, תהי H כמו בטענה 2. תהי $N = \bigcap_{g\in G} g^{-1}Hg$, אז $N \triangleleft G$, $N \le H$, ובפרט $N \subseteq U$. כל $g^{-1}Hg$ היא תת חבורה פתוחה של G. נראה ש־$\bigcap_{g\in G} g^{-1}Hg$ הוא חיתוך סופי, ולכן N פתוחה. לשם כך נכתוב $G = \dot{\bigcup}_{i\in I} Hx_i$, באשר $|I| = (G:H) < \infty$, לפי למה 3.3. לכל $g \in G$ יש הצגה $g = hx_i$, באשר $h \in H$ ו־$i \in I$. אז $g^{-1}Hg = x_i^{-1}h^{-1}Hhx_i = x_i^{-1}Hx_i$. לכן $N = \bigcap_{i\in I} x_i^{-1}Hx_i$, כנדרש.

טענה 4: G/N $\varprojlim_{\substack{N \triangleleft G \\ \text{פתוחה}}}$ $= G$*, והחבורות G/N הן סופיות.* אכן, כל G/N סופית לפי למה 3.3. העתקות המנה משרות הומומורפיזם רציף $\varphi\colon G \to \varprojlim G/N$. לפי טענה 2.13, הוא על. גרעינו הוא $\bigcap_N N$. לכל $G \ni g \ne 1$ יש $G \supseteq U$ פתוחה, כך ש־$1 \in U$, $g \notin U$. לפי טענה 3 יש $N \triangleleft G$ פתוחה, כך ש־$g \notin N$. לכן $g \notin \operatorname{Ker}\varphi$. מכאן ש־$\varphi$ חד־חד־ערכית. לפי תרגיל 1.9, φ^{-1} רציפה. לכן φ איזומורפיזם. ∎

הגדרה 3.5: חבורה טופולוגית נקראת **פרוסופית**, אם היא מקיימת את התנאים השקולים של המשפט.

דוגמאות 3.6: (א) כל חבורה סופית דיסקרטית היא פרוסופית.

(ב) $\hat{\mathbb{Z}} := \varprojlim_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, באשר $\mathbb{N}$ מכוונת ביחס לחילוק. לפי משפט 2.8

$$\hat{\mathbb{Z}} = \left\{(a_1, a_2, a_3, \ldots) \middle| \, a_k \in \mathbb{Z},\ 0 \le a_k < k,\ j \mid i \Rightarrow a_i \equiv a_j \mod j\right\}.$$

(ג) $\mathbb{Z}_p := \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$, באשר p ראשוני ו־$\mathbb{N}$ מכוונת ביחס לסדר הרגיל. לכל איבר ב־$\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ יש הצגה יחידה $\sum_{k=0}^{i-1} a_k p^k$, באשר $a_k \in \{0,1,\ldots,p-1\}$ לכל k, ואם $i \ge j$ אז $\pi_{ij}\big(\sum_{k=0}^{i-1} a_k p^k\big) = \sum_{k=0}^{j-1} a_k p^k$.
לפי משפט 2.8 אפשר לזהות את $\mathbb{Z}_p$ עם הקבוצה

$$\Big\{\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k \Big| \, a_0, a_1, \ldots \in \{0,1,\ldots,p-1\}\Big\}.$$

לפי תרגיל 2.11, בסיס לטופולוגיה נתון על ידי קבוצות של סכומים בעלי אותו רישא. נעיר ש־$\mathbb{Z}_p$ הוא חוג (לא רק חבורה), תחום שלמות, ושדה המנות שלו $\mathbb{Q}_p$ נקרא שדה המספרים ה־p־אדיים. קל לראות ש־$\mathbb{Z}_p$ איננה בת מניה.

(ד) תהי N/K הרחבת גלואה (לא בהכרח סופית). תהי $\mathcal{L}$ משפחת שדות הביניים L כך ש־L/K הרחבת גלואה סופית. היא מכוונת ביחס להכלה, ו־$N = \bigcup_{l\in\mathcal{L}} L$. אם $L \subseteq L'$ ב־$\mathcal{L}$, יש העתקת הצמצום

$\mathrm{Gal}(L'/K)\to\mathrm{Gal}(L/K)$. באופן זה $\{\mathrm{Gal}(L/K)|\ L\in\mathcal{L}\}$ היא מערכת הפוכה. לפי משפט 2.8

$$\varprojlim_{\mathcal{L}}\mathrm{Gal}(L/K)=\Big\{(\sigma_L)_{L\in\mathcal{L}}\in\prod_{L\in\mathcal{L}}\mathrm{Gal}(L/K)\Big|\ L\subseteq L'\Rightarrow\sigma_{L'}|_L=\sigma_L\Big\}=\mathrm{Gal}(N/K).$$

באופן זה $\mathrm{Gal}(N/K)$ היא חבורה פרוסופית. בסיס לטופולוגיה נתון על ידי קוסטים של התת חבורות $\mathrm{Gal}(N/L)$, באשר $L\in\mathcal{L}$.

מסקנה 3.7: *מכפלה ישרה של חבורות פרוסופיות (ובפרט של חבורות סופיות) היא חבורה פרוסופית.*

הוכחה: נניח $G=\prod_{i\in I}G_i$, באשר G_i פרוסופיות. קל לראות שהכפל והמכפלה ב־G רציפות. כמכפלה של מרחבים קומפקטיים האוסדורף, גם G קומפקטית האוסדורף. לכל $i\in I$ יש בסיס $\mathcal{B}_i$ של G_i מורכב מקבוצות פתוחות־סגורות. אז הבסיס לטופולוגיית המכפלה, שבנוי מבסיסים אלה לפי הגדרה 1.6, גם מורכב מקבוצות פתוחות־סגורות. ∎

תרגיל 3.8: *תהי G חבורה פרוסופית ותהי $H\le G$ סגורה. אז H פרוסופית.*
בפרט, לכל $V\lhd H$ פתוחה יש $U\lhd G$ פתוחה כך ש־$H\cap U\le V$.

הוכחה: הטענה הראשונה נובעת ממשפט 3.4(ג). הטענה השניה נובעת ממשפט 3.4(ב). ∎

מסקנה 3.9: *גבול הפוך של חבורות פרוסופיות (ובפרט של חבורות סופיות) הוא חבורה פרוסופית.*

תרגיל 3.10: *תהי G חבורה פרוסופית ותהי $H\le G$ סגורה. אז $H=\bigcap_{U,H\le U\le G\ \text{פתוחה}}U$.*

הוכחה: אגף ימין מכיל את H. לכן די להראות שאם $g\in G\smallsetminus H$, אז יש $H\le U\le G$ פתוחה כך ש־$g\notin U$.

כיוון ש־$G\smallsetminus H$ פתוחה ו־$g\in G\smallsetminus H$, יש $N\lhd G$ פתוחה כך ש־$gN\subseteq G\smallsetminus H$, כלומר, $gN\cap H=\emptyset$. קל לראות שאז $g\notin U:=HN$. כמובן, U תת חבורה של G ו־hN $U=\bigcup_{h\in H}$ פתוחה. ∎

תרגיל 3.11: *תהי G חבורה פרוסופית ותהי $H\lhd G$ סגורה. אז $H=\bigcap_{U,H\le U\lhd G\ \text{פתוחה}}U$.*

תרגיל 3.12: *תהי G חבורה פרוסופית ותהי $N\lhd G$ סגורה. אז G/N פרוסופית.*

הוכחה: תהי $\bar{G}=G/N$ ותהי $\pi\colon G\to\bar{G}$ העתקת המנה. הטופולוגיה על $\bar{G}$ היא טופולוגיית המנה: $\bar{U}\subseteq\bar{G}$ פתוחה אם ורק אם $\pi^{-1}(\bar{U})\subseteq G$ פתוחה. כיוון ש־G קומפקטית ו־π על, גם $\bar{G}$ קומפקטית (תרגיל 1.9(א)).

נראה שיש לה בסיס לטופולוגיה המורכב מקוסטים של תת חבורות נורמליות פתוחות. אכן, אם $H\lhd G$ פתוחה, $N\le H$ אז $\pi(H)\lhd\bar{G}$ פתוחה, כי $H=\pi^{-1}(\pi(H))$ פתוחה. תהי $\bar{U}\subseteq\bar{G}$ קבוצה פתוחה. אז $U=\pi^{-1}(\bar{U})\subseteq G$ פתוחה, לכן לפי משפט 3.4(ב), $U=\bigcup_{i\in I}g_iH_i$, באשר $g_i\in G$ ו־$H_i\lhd G$ פתוחה, לכל i. בלי הגבלת הכלליות $N\le H_i$ לכל i, אחרת נחליף את H_i ב־H_iN, כי $\pi(g_iH_iN)=\pi(g_iH_i)$, ולכן גם $g_iH_iN\subseteq U$. מכאן $\bar{U}=\pi(\bigcup_{i\in I}g_iH_i)=\bigcup_{i\in I}\pi(g_i)\pi(H_i)$.

היא האוסדורף: נניח $g_1N \neq g_2N$, אז $g_1^{-1}g_2 \notin N$, לכן לפי תרגיל 3.10 יש $H \leq G$ פתוחה, כך ש־$N \leq H$, $g_1^{-1}g_2 \notin H$. אז g_1H, g_2H זרות, לכן $\pi(g_1)\pi(H), \pi(g_2)\pi(H)$ זרות. הן קבוצות פתוחות שמכילות את g_1N, g_2N בהתאמה. ∎

משפט 3.13 (תורת גלואה האינסופית): *תהי N/K הרחבת גלואה ותהי $G = \mathrm{Gal}(N/K)$. אז $E \mapsto \mathrm{Gal}(N/E)$ היא התאמה חד־חד־ערכית בין שדות הביניים של N/K לבין התת־חבורות **הסגורות** של G. ההתאמה ההפוכה נתונה על ידי $H \mapsto N^H$, באשר N^H שדה השבת של תת־חבורה **סגורה** H של G.*

יתר על כן, $H \leq G$ היא פתוחה אם רק אם $H = \mathrm{Gal}(N/E)$, באשר E/K סופית, $E \subseteq N$.

הוכחה: תחילה נראה את הטענה האחרונה. תהי E/K סופית, $E \subseteq N$. יהי L סגור גלואה של E/K. אז L/K גלואה סופית, לכן $\mathrm{Gal}(N/L)$ פתוחה ב־G (היא בבסיס לטופולוגיה שרשום בדוגמה 3.6(ד) לעיל). אבל $\mathrm{Gal}(N/E)$ מכילה אותה, לכין היא איחוד של קוסטים של $\mathrm{Gal}(N/L)$, ולכן גם פתוחה.

להיפך, תהי $H \leq G$ פתוחה. אז יש קבוצה פתוחה בסיסית ב־G שמכילה את 1 ומוכלת ב־H. קבוצה זו היא $\mathrm{Gal}(N/L)$, באשר L/K הרחבת גלואה סופית. חבורה זו היא הגרעין של העתקת הצמצום $\rho\colon \mathrm{Gal}(N/K) \to \mathrm{Gal}(L/K)$. לפי משפט האיזומורפיזם השלישי יש תת חבורה $\bar{H} \leq \mathrm{Gal}(L/K)$ כך ש־$H = \rho^{-1}(\bar{H})$. לפי תורת גלואה הסופית, $\bar{H} = \mathrm{Gal}(L/E)$ עבור איזה שדה $K \subseteq E \subseteq L$. לכן $H = \rho^{-1}(\mathrm{Gal}(L/E)) = \mathrm{Gal}(N/E)$.

כעת יהי E שדה ביניים של N/K. אז $E = \bigcup_{E'} E'$, באשר E' עובר על כל ההרחבות הסופיות של K המוכלות ב־E. קל לראות ש־$\mathrm{Gal}(N/E) = \bigcap_{E'} \mathrm{Gal}(N/E')$. לכן $\mathrm{Gal}(N/E)$ היא חיתוך של חבורות (פתוחות ולכן) סגורות ולכן סגורה.

להיפך, תהי $H \leq G$ סגורה, אז N^H שדה ביניים של N/K.

לבסוף, נראה שההעתקות $E \mapsto \mathrm{Gal}(N/E)$ ו־$H \mapsto N^H$ הפוכות זו לזו, כלומר, $\mathrm{Gal}(N/N^H) = H$ ו־$N^{\mathrm{Gal}(N/E)} = E$.

תהי $H \leq G$ סגורה. נסמן $E = N^H$ ונראה כי $H = \mathrm{Gal}(N/E)$. ההכלה $H \leq \mathrm{Gal}(N/E)$ ברורה. נותר להוכיח שאם $\sigma \in G \smallsetminus H$ אז $\sigma \notin \mathrm{Gal}(N/E)$, כלומר, σ אינו משבית את כל אברי E. כיוון ש־$G \smallsetminus H$ פתוחה, יש הרחבת גלואה L/K סופית, $L \subseteq N$, כך ש־$H \cap \sigma\mathrm{Gal}(N/L) = \emptyset$. תהי $\rho\colon \mathrm{Gal}(N/K) \to \mathrm{Gal}(L/K)$ העתקת הצמצום ותהי $\bar{H} = \rho(H)$. אז $\sigma|_L \notin \bar{H}$. שדה השבת של $\bar{H}$ הוא בבירור $L \cap E$, לכן לפי תורת גלואה הסופית $\bar{H} = \mathrm{Gal}(L/L \cap E)$. כיוון ש־$\sigma|_L$ איננו בחבורה זו, הוא אינו משבית את $L \cap E$. בפרט, σ אינו משבית E. (אפשר להוכיח חלק זה גם בעזרת תרגיל 3.10.)

יהי E שדה ביניים של N/K. אז $E \subseteq N^{\mathrm{Gal}(N/E)}$. להיפך, יהי $\alpha \in N^{\mathrm{Gal}(N/E)}$. אז יש L/K גלואה סופית, $L \subseteq N$ כך ש־$\alpha \in L$. אז $\alpha \in L \cap N^{\mathrm{Gal}(N/E)} = L^{\mathrm{Gal}(L/L\cap E)} = L \cap E$, לפי תורת גלואה הסופית. מכאן $\alpha \in E$. לכן $N^{\mathrm{Gal}(N/E)} = E$. ∎

הגדרה 3.14: **חבורת גלואה המוחלטת** $\mathrm{Gal}(K)$ של שדה K היא החבורה הפרוסופית $\mathrm{Gal}(K_s/K)$, באשר K_s הסגור הפריד של K. ∎

משפט 3.15: *חבורת גלואה המוחלטת של שדה סופי הינה איזומורפית ל־$\hat{\mathbb{Z}}$.*

הוכחה: נקבע סגור אלגברי F_s של $\mathbb{F}_q$, שדה בן q איברים. כידוע, לכל $n \in \mathbb{N}$ יש ל־$\mathbb{F}_q$ הרחבה יחידה בתוך F_s ממעלה n, היא השדה $\mathbb{F}_{q^n}$. יתר על כן $\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q$ הרחבת גלואה מעגלית מסדר n, נוצרת על ידי Frob שמוגדר על ידי $x \mapsto x^q$, ויש איזומורפיזם $\theta_n\colon \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ הנתון על ידי $\mathrm{Frob}_q \mapsto [1]$. אם $m|n$ אז התרשים

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q) & \xrightarrow{\theta_n} & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q) & \xrightarrow{\theta_m} & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \end{array}$$

חילופי. לכן המערכות ההפוכות איזומורפיות ולכן הגבולות שלהן איזומורפיים. ∎

משפט 3.16: $\hat{\mathbb{Z}} \cong \prod_p \mathbb{Z}_p$.

הוכחה: לכל $m \in \mathbb{N}$ יש פירוק לגורמים ראשוניים $m = \prod_p p^{m_p}$ (כאשר $m_p = 0$ כמעט לכל p). לפי משפט השאריות הסיני זה נותן איזומורפיזם $\theta_m\colon \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \prod_p \mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$. אם $m|n$ אז $m_p \le n_p$ לכל p והתרשים הבא חילופי (כל ההעתקות מושרות מן $1 \mapsto 1$)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \xrightarrow{\theta_n} & \prod_p \mathbb{Z}/p^{n_p}\mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & \xrightarrow{\theta_m} & \prod_p \mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z} \end{array}$$

ההרכבה של θ_m^{-1} עם האפימורפיזם (הרציף!) $\prod_p \mathbb{Z}_p \to \prod_p \mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$ נותנת אפימורפיזם $\varphi_m\colon \prod_p \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, ואם $m|n$ אז התרשים הבא חילופי

$$\begin{array}{ccc} \prod_p \mathbb{Z}_p & \xrightarrow{\varphi_n} & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & \searrow^{\varphi_m} & \downarrow \\ & & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \end{array}$$

לכן $\{\varphi_m\}_m$ משרים הומומורפיזם $\varphi\colon \prod_p \mathbb{Z}_p \to \hat{\mathbb{Z}}$. לפי טענה 2.13 הוא על, גרעינו הוא $\bigcap_m \operatorname{Ker} \varphi_m = \bigcap_m \prod_p p^{m_p}\mathbb{Z}_p = \{0\}$, לכן φ חד־חד־ערכית. כהעתקה של מרחבים קומפקטיים האוסדורף היא גם סגורה, ולכן φ^{-1} רציפה. לכן φ איזומורפיזם. ∎

תרגיל 3.17: *תהי G חבורה טופולוגית ותהי $H \le G$. אז גם $\bar{H}$ (הסגור הטופולוגי של H ב־G) היא תת חבורה של G.*

תרגיל 3.18: *תהי N/K הרחבת גלואה יהיו L_1, L_2 שני שדות ביניים שלה. אז*

$$\mathrm{Gal}(N/L_1 \cap L_2) = \langle \mathrm{Gal}(N/L_1), \mathrm{Gal}(N/L_2) \rangle,$$

באשר $\langle S_1, S_2 \rangle$ מסמן את תת חבורה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה את $S_1 \cup S_2$.

4. מספרים על־טבעיים, סדרים ואינדקסים

תהי G חבורה פרוסופית. בסעיף זה $H \le G$ מסמן תת חבורה **סגורה** של G.

הגדרה 4.1: (א) **מספר על־טבעי** הוא מכפלה פורמלית

$$n := \prod_p p^{n(p)},$$

באשר p עובר על כל הראשוניים, ו־$n(p) \in \{0, 1, \dots, \infty\}$.

(אם $n(p) \ne \infty$ לכל p ו־$n(p) = 0$ כמעט לכל p, נזהה מכפלה פורמלית זו עם מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$.)

תהי $\{n_i = \prod_p p^{n_i(p)} |\ i \in I\}$ משפחה של מספרים על־טבעיים.

(ב) $\prod_{i\in I} n_i = \prod_p p^{\sum_i n_i(p)}$

(ג) $n_i | n_j$ אם $n_i(p) \le n_j(p)$ לכל p. (קל לראות כי $n|m, m|n \Leftrightarrow m = n$.)

(ד) $\gcd\{n_i |\ i \in I\} = \prod_p p^{\min_i(n_i(p))}$.

(ה) $\mathrm{lcm}\{n_i |\ i \in I\} = \prod_p p^{\max_i(n_i(p))}$. ∎

הגדרה 4.2: תהי $H \le G$. **האינדקס של H ב־G** הוא

$$(G : H)' = \mathrm{lcm}_{U\in\mathcal{N}(G)}(G/U : HU/U) = \mathrm{lcm}_{U\in\mathcal{N}(G)}(G : HU),$$

באשר U עובר על המשפחה $\mathcal{N}(G)$ של התת חבורות הנורמליות הפתוחות של G. ∎

הערה 4.3: אם $U, U' \in \mathcal{N}(G)$, $U' \le U$, אז $HU' \le HU \le G$, לכן $(G : HU)|(G : HU')$. לכן בהגדרה לעיל די ש־U תעבור על משפחה $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}(G)$ כך שלכל $U \in \mathcal{N}(G)$ יש $U' \in \mathcal{N}'$ כך ש־$U' \le U$.

למה 4.4: *$(G : H)' = \mathrm{lcm}_{V\in\mathcal{O}_H(G)}(G : V)$, באשר V עובר על משפחה $\mathcal{O}_H(G)$ של התת חבורות הפתוחות ב־G שמכילות את H.*

הוכחה: אם $U \in \mathcal{N}(G)$ אז $V := HU \in \mathcal{O}_H(G)$. לכן $\mathrm{lcm}(G : HU)|\mathrm{lcm}(G : V)$. להיפך, אם $V \in \mathcal{O}_H(G)$, אז $U := \bigcap_{g\in G} V^g \in \mathcal{N}(G)$ (כי היא חיתוך של מספר סופי של חבורות פתוחות) ו־$HU \le V$. לכן $(G : V)|(G : HU)$. מכאן ש־$\mathrm{lcm}_{V\in\mathcal{O}_H(G)}(G : V)|\mathrm{lcm}_{U\in\mathcal{N}(G)}(G : HU)$. משני היחסים נובע השוויון. ∎

למה 4.5: *(א) אם $(G : H)' \in \mathbb{N}$ אז $H \le G$ פתוחה. (ב) אם $H \le G$ פתוחה אז $(G : H)' = (G : H) \in \mathbb{N}$.*

הוכחה: (א) אם $V \in \mathcal{O}_H(G)$ אז $(G : V)|(G : H)' \in \mathbb{N}$, לכן יש $V \in \mathcal{O}_H(G)$ כך ש־$(G : V)$ מקסימלי. תהי $W \in \mathcal{O}_H(G)$. אז $V \cap W \in \mathcal{O}_H(G)$, $V \cap W \le V \le G$, לכן $(G : V \cap W) \ge (G : V)$. מהמקסימליות יש כאן שוויון, לכן $V \cap W = V$, כלומר, $V \le W$. לכן $V \le \bigcap_W W = H$ ומכאן $H = V$ פתוחה.

(ב) לפי למה 3.3(ג), $(G:H)<\infty$. מתקיים $H\in\mathcal{O}_H(G)$ ו-$(G:H)|(G:V)$ לכל $V\in\mathcal{O}_H(G)$. לכן $\operatorname{lcm}_{V\in\mathcal{O}_H(G)}(G:V)=(G:H)$. ∎

לכן נכתוב $(G:H)$ במקום $(G:H)'$.

הגדרה 4.6: **הסדר של G הוא** $\#G=(G:1)$.

משפט 4.7: *תהיינה* $K\le H\le G$. *אז* $(G:K)=(G:H)(H:K)$.

הוכחה: לפי תרגיל 3.8, לכל $V\in\mathcal{N}(H)$ יש $U\in\mathcal{N}(G)$ כך ש-$H\cap U\le V$. לכן לפי הערה 4.3, מתקיים $(H:K)=\operatorname{lcm}_{U\in\mathcal{N}(G)}(H:K(H\cap U))$.

$K(H\cap U)=H\cap KU$,

$(G:KU)=(G:HU)(HU:KU)$,

$(HU:KU)=(H:H\cap KU)$.

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, dash] \\
H \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & HU \arrow[d, dash] \\
K(H\cap U)=H\cap KU \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & KU \\
K &
\end{tikzcd}$$

מכאן

$$(G:KU)=(G:HU)(H:K(H\cap U)).$$

אם ניקח $\operatorname{lcm}_{U\in\mathcal{N}(G)}$ על שני האגפים, נקבל את השוויון, אם נראה שמתקיים

$$\operatorname{lcm}_{U\in\mathcal{N}(G)}(G:HU)(H:K(H\cap U))=\operatorname{lcm}_{U\in\mathcal{N}(G)}(G:HU)\operatorname{lcm}_{U\in\mathcal{N}(G)}(H:K(H\cap U)).$$

אכן, יהי p ראשוני ויהיו $k,m,n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ המקסימליים כך ש-p^k,p^m,p^n מחלקים את אגף שמאל ואת שני הגורמים באגף ימין, בהתאמה. צריך להוכיח: $k=m+n$. אם $n=\infty$ או $m=\infty$ אז גם $k=\infty$, כי $k\ge m,n$, ולכן השוויון המבוקש מתקיים. נניח $m,n<\infty$. אז לכל $U\in\mathcal{N}(G)$ החזקה המקסימלית של p שמחלקת את $(H:K(H\cap U))$, $(G:HU)$, בהתאמה, היא לכל היותר p^n, p^m, בהתאמה, לכן החזקה המקסימלית של p שמחלקת את מכפלתם היא לכל היותר p^{m+n}. לכן $k\le m+n$. להיפך, יש $U_1,U_2\in\mathcal{N}(G)$ כך ש-$p^m|(G:HU_1)$, $p^n|(H:K(H\cap U_2))$. תהי $U=U_1\cap U_2$. אז $p^m|(G:HU)$, $p^n|(H:K(H\cap U))$. לכן p^{m+n} מחלק את מכפלת שני האינדקסים ומכאן $k\ge m+n$. ∎

מסקנה 4.8: *אם* $H\le G$ *אז* $\#H|\#G$. *אם גם* $H\lhd G$ *אז* $\#(G/H)=(G:H)|\#G$.

הוכחה: נקח $K=1$. אם $H\lhd G$, לפי למה 4.4, $(G:H)=\#(G/H)$. ∎

טענה 4.9: *תהי* $(G_i, \pi_{ij} | \ i \in I, \ i \geq j)$ *מערכת הפוכה של חבורות פרוסופיות ויהי* $G = \varprojlim G_i$. *נניח כי* π_{ij} *על לכל* $i \geq j$. *אז* $\#G = \mathrm{lcm}_{i \in I} \#G_i$.

הוכחה: תהיינה $\pi_i \colon G \to G_i$ ההעתקות של הגבול ההפוך, לכל $i \in I$. לפי תרגיל 2.14 הן על. בפרט, אם $U_i \in \mathcal{N}(G_i)$ אז $(G_i : U_i) = \big(G : \pi_i^{-1}(U_i)\big)$.

לכל $i \in I$ הקבוצה $\{g_i U_i | \ g_i \in G_i, \ U_i \in \mathcal{N}(G_i)\}$ היא בסיס לטופולוגיה על G_i. לפי תרגיל 2.11, הקבוצה $\{g\pi_i^{-1}(U_i) | \ g \in G, \ i \in I, \ U_i \in \mathcal{N}(G_i)\}$ היא בסיס לטופולוגיה על G. לכן לפי הערה 4.3

$\#G = \mathrm{lcm}_{i \in I, \ U_i \in \mathcal{N}(G_i)} \big(G : \pi_i^{-1}(U_i)\big) = \mathrm{lcm}_{i \in I} \mathrm{lcm}_{U_i \in \mathcal{N}(G_i)} (G_i : U_i) = \mathrm{lcm}_{i \in I} \#G_i$. ∎

5. חבורות סילוב

תהי G חבורה פרוסופית. בסעיף זה $H \leq G$ מסמן תת חבורה **סגורה** של G. יהי p מספר ראשוני.

הגדרה 5.1: (א) חבורה פרוסופית G היא **חבורה פרו־**p אם $\#G$ הוא חזקה (סופית או אינסופית) של p, כלומר, G גבול הפוך של חבורות־p סופיות.

(ב) $H \leq G$ נקראת **חבורת סילוב־**p **של** G אם H היא חבורת פרו־p ו־$p \nmid (G:H)$. ∎

משפט 5.2: *קיימת חבורת סילוב־p ב־G. יתר על כן, כל תת חבורה פרו־p $H \leq G$ מוכלת בחבורת סילוב־p ב־G.*

הוכחה: לכל $U \in \mathcal{N}(G)$ תהי $\mathcal{P}(U)$ קבוצת חבורות סילוב־p של החבורה הסופית G/U שמכילות את HU/U, התמונה של H במנה G/U של G. לפי מסקנה 4.8, HU/U היא חבורת־p, לכן לפי משפט סילוב הראשון $\mathcal{P}(U) \neq \emptyset$. אם $V \leq U$ ב־$\mathcal{N}(G)$ אז ההעתקה הטבעית $\pi_{VU}\colon G/V \to G/U$ מעתיקה חבורת סילוב־p של G/V על חבורת סילוב־p של G/U ובכך משרה העתקת קבוצות $\mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(U)$. באופן כזה $(\mathcal{P}(U), \pi_{VU}|\ V \leq U)$ היא מערכת הפוכה של קבוצות סופיות. יהי $(S, \pi_U|\ U \in \mathcal{N}(G))$ הגבולה ההפוך שלה (בקטגוריה של קבוצות). לפי משפט 2.12, $S \neq \emptyset$.

יהי $s \in S$. אז לכל $U \in \mathcal{N}(G)$, $P_U := \pi_U(s) \in \mathcal{P}(U)$ היא חבורת סילוב־p של G/U ו־$(P_U|\ U \in \mathcal{N}(G), V \leq U)$ היא מערכת הפוכה של חבורות־p, עם העתקות π_{VU} שהן על, לפי טענה 2.13. תהי $P = \varprojlim_U P_U$. אז P היא פרו־p, לפי טענה 4.9. אפשר לראות את P כתת חבורה של $\prod_U G/U$ $\prod_U P_U \leq$. ואז קל לראות שהיא תת חבורה של $G = \varprojlim_U G/U \leq \prod_U G/U$. יתר על כן, ההעתקות $P \to P_U$, אשר מושרות מן $G \to G/U$, הן על, כי $\pi_{VU}\colon P_V \to P_U$ הן על, לכן $P_U = PU/U$. מתוך $HU/U \leq P_U = PU/U$ נובע $H \leq PU$. מכאן $H \leq \bigcap_U PU = P$, לפי תרגיל 3.10.

לבסוף, $(G:P) = \mathrm{lcm}_U(G:PU) = \mathrm{lcm}_U(G/U:P_U)$ אינו מתחלק ב־p. ∎

תרגיל 5.3: *כל שתי חבורות סילוב־p ב־G צמודות זו לזו.*

הוכחה: תהיינה P, P' שתי חבורות סילוב־p של G. לכל $U \in \mathcal{N}(G)$ הקבוצה

$$C(U) = \{g \in G|\ P'U/U = (PU/U)^{\pi_U(g)}\}$$

היא סגורה ב־G. לפי סילוב, היא אינה ריקה. אם $V \leq U$ אז $C(V) \subseteq C(U)$, לכן המשפחה $\{C(U)\}$ מקיימת את תנאי החיתוך הסופי. לפי הקומפקטיות, $\bigcap_U C(U) \neq \emptyset$. נבחר $g \in \bigcap_U C(U)$. אז $P'U = P^gU$ לכל $U \in \mathcal{N}(G)$. מכאן $\bigcap_U P'U = \bigcap_U P^gU$, כלומר, $P' = P^g$. ∎

תרגיל 5.5: *יהי $\theta\colon G \to H$ אפימורפיזם של חבורות פרוסופיות. תהי P חבורת סילוב־p של G. אז $Q = \theta(P)$ היא חבורת סילוב־p של H.*

הוכחה: כיוון ש־Q איזומורפית לחבורת מנה של P, לפי מסקנה 4.8 היא חבורת־p. בגלל ההתאמה בין תת חבורות פתוחות של H שמכילות את Q לבין תת חבורות פתוחות של G שמכילות את $\theta^{-1}(Q)$, מתקיים $(H:Q) = \big((G:\theta^{-1}(Q)\big)$. אבל $\big((G:\theta^{-1}(Q)\big)$ מחלק את $(G:P)$, לכן זר ל־p. ∎

תרגיל 5.5: *$\#G = \prod_p \#G_p$, באשר G_p חבורת סילוב־p, לכל p.*

תהי G חבורה (אבסטרקטית, כלומר, ללא טופולוגיה). תהי $\mathcal{N}$ משפחה של חבורות נורמליות של G, בעלות אינדקס סופי ב-G, שהינה מכוונת: לכל $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ יש $N \in \mathcal{N}$ כך ש-$N \leq N_1 \cap N_2$. משפחה כזו מגדירה מערכת הפוכה של חבורות סופיות

$$(G/N, \pi_{MN}\colon G/M \to G/N \mid M, N \in \mathcal{N},\ M \leq N),$$

באשר π_{MN} העתקות המנה. הגבול ההפוך $\hat{G}$ של מערכת זו נקרא **ההשלמה הפרוסופית של G ביחס ל-$\mathcal{N}$**. זוהי חבורה פרוסופית. תהיינה $\pi_N\colon \hat{G} \to G/N$, לכל $N \in \mathcal{N}$, ההעתקות של גבול זה.

החבורה G, עם העתקות המנה $\theta_N\colon G \to G/N$, לכל $N \in \mathcal{N}$, היא חסם של המערכת, כלומר, $\pi_{MN} \circ \theta_M = \theta_N$ לכל $M \leq N$. לכן הקיים הומומורפיזם יחיד $\theta\colon G \to \hat{G}$ כך ש-$\pi_N \circ \theta = \theta_N$ לכל $N \in \mathcal{N}$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\theta_M"'] \arrow[ddrr, bend right, "\theta_N"'] & \hat{G} \arrow[d, "\pi_M"] \arrow[ddr, "\pi_N"] & \\
 & G/M \arrow[dr, "\pi_{MN}"'] & \\
 & & G/N
\end{tikzcd}$$

לכל $N \in \mathcal{N}$ יהי $\hat{N}$ הסגור הטופולוגי של $\theta(N)$ ב-$\hat{G}$. אז $\hat{N} \leq \hat{G}$. (ההגדרה טובה - עבור $N = G$: לפי טענה 2.13, $\theta(G)$ צפופה ב-$\hat{G}$.

טענה 6.1: *תהי $\hat{G}$ ההשלמה הפרוסופית של G ביחס ל $\mathcal{N}$. בסימונים לעיל:*

(א) $\operatorname{Ker} \pi_N = \hat{N}$*, לכל* $N \in \mathcal{N}$.

(ב) π_N *משרה איזומורפיזם* $\hat{G}/\hat{N} \to G/N$.

(ג) *הקוסטים של* $\{\hat{N} \mid N \in \mathcal{N}\}$ *הם בסיס לטופולוגיה על* $\hat{G}$.

(ד) $\theta(G)$ *צפופה ב-* $\hat{G}$.

הוכחה: (א) $\pi_N\big(\theta(N)\big) = \theta_N(N) = 1$, לכן $\theta(N) \leq \operatorname{Ker} \pi_N$. אבל π_N רציפה, לכן $\operatorname{Ker} \pi_N$ סגורה, ולכן $\hat{N} \leq \operatorname{Ker} \pi_N$. כדי להוכיח שיש כאן שוויון, די להראות ש-$\theta(N)$ צפופה ב-$\operatorname{Ker} \pi_N$. יהי $x \in \operatorname{Ker} \pi_N$ ותהי V סביבה פתוחה (בסיסית) שלו. נראה ש-$V \cap \theta(N) \neq \emptyset$. לפי תרגיל 2.11, $V = \pi_M^{-1}(U)$, באשר $U \subseteq G/M$. מתקיים $x \in V$, לכן $\pi_M(x) \in U$. לכן בלי הגבלת הכלליות $U = \{\pi_M(x)\}$. כמו כן, בלי הגבלת הכליות, $M \leq N$, אחרת נחליף את M ב-$M' \in \mathcal{N}$, באשר $M' \leq M \cap N$. כיוון ש-θ_M על, יש $y \in G$ כך ש-$\theta_M(y) = \pi_M(x)$. אז $\pi_M(x) = \pi_M\big(\theta(y)\big)$, לכן $\theta(y) \in V$. נפעיל π_{MN} על $\pi_M(x) = \theta_M(y)$. אז $\theta_N(y) = \pi_N(x) = 1$, לכן $y \in N$. אם כך, $\theta(y) \in V \cap \theta(N)$.

(ב) ההעתקות π_N הן על, כי θ_N הן על. לפי (א) $\hat{G}/\hat{N} \cong G/N$.

(ג) הטענה נובעת מ־(א), כי לפי תרגיל 2.11, הקוסטים של $\{\operatorname{Ker}\pi_N |\ N \in \mathcal{N}\}$ הם בסיס לטופולוגיה על $\hat{G}$.

(ד) לפי טענה 2.13. ∎

7. חבורות פרוסופיות חפשיות

תהי G חבורה פרוסופית. בסעיף זה $H \leq G$ מסמן תת חבורה **סגורה** של G.

הגדרה 7.1: תהי X קבוצה. העתקה $\alpha\colon X \to G$ **מתכנסת ל־**1 אם $X \smallsetminus \alpha^{-1}(U)$ סופית לכל $U \in \mathcal{N}(G)$. קבוצה $X \subseteq G$ היא **מערכת יוצרים מתכנסת ל־**1 אם ההכלה $X \to G$ מתכנסת ל־1 ו־$G = \langle X \rangle$. (כאן $\langle X \rangle$ היא התת חבורה הסגורה הקטנה ביותר של G שמכילה את X.) ∎

אם X סופית, אז כל העתקה $\alpha\colon X \to G$ מתכנסת ל־1. אם G סופית אז $\alpha\colon X \to G$ מתכנסת ל־1 אם ורק אם $X \smallsetminus \alpha^{-1}(\{1\})$ סופית.

משפט 7.2 (Douady): *לכל חבורה פרוסופית יש מערכת יוצרים מתכנסת ל־*1.

הגדרה 7.3: תהי X קבוצה. חבורה פרוסופית חפשית על X היא חבורה פרוסופית F עם העתקה $\alpha_F\colon X \to F$ מתכנסת ל־1 שמקיימת את התכונה האוניברסלית הבאה: אם $\alpha_G\colon X \to G$ היא העתקה מתכנסת ל־1 לתוך חבורה פרוסופית G אז קיים הומומורפיזם רציף יחיד $\varphi\colon F \to G$ כך שהתרשים הבא חילופי.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\alpha_F"] \arrow[dr, "\alpha_G"'] & & F \arrow[dl, "\exists!\varphi"] \\
& G &
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

הערה 7.4: אם מוחקים בהגדרה לעיל את מלים "פרוסופית", "מכנסת ל־1, "רציף", מקבלים הגדרה של חבורה חפשית (אבסטרקטית, לא פרוסופית).

תרגיל 7.5: *די לדרוש בהגדרה 7.3 את קיום התכונה האוניברסלית עבור כל G סופית, במקום פרוסופית.*

הוכחה: תהי G פרוסופית ותהי $\alpha_G\colon X \to G$ העתקה מתכנסת ל־1. אז $G = \varprojlim_{i \in I} G_i$, באשר G_i חבורות סופיות ויהיו $\pi_{ij}\colon G_i \to G_j$, עבור $i \geq j$ ב־I, ו־$\pi_i\colon G \to G_i$, עבור $i \in I$, ההומומורפיזמים של המערכת ההפוכה ושל הגבול. אז $\pi_i \circ \alpha_G\colon X \to G_i$ מתכנסת ל־1 (בדוק!), לכן קיים הומומורפיזם רציף יחיד $\varphi_i\colon F \to G_i$ כך ש־$\varphi_i \circ \alpha_F = \pi_i \circ \alpha_G$. אם $i \geq j$, נרכיב π_{ij} על שני האגפים ונקבל $(\pi_{ij} \circ \varphi_i) \circ \alpha_F = \pi_j \circ \alpha_G$. אבל גם $\varphi_j \circ \alpha_F = \pi_j \circ \alpha_G$. מהיחידות של φ_j נקבל $\pi_{ij} \circ \varphi_i = \varphi_j$.

כיוון ש־$G = \varprojlim_{i \in I} G_i$, קיים הומומורפיזם רציף יחיד $\varphi\colon F \to G$ כך ש־$\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$ לכל i.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha_F"] \arrow[dr, "\alpha_G"'] & F \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\varphi_i"] \arrow[drr, "\varphi_j"] & & \\
& G \arrow[r, "\pi_i"'] \arrow[rr, bend right, "\pi_j"'] & G_i \arrow[r, "\pi_{ij}"'] & G_j
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

נראה ש־$\varphi\circ\alpha_F=\alpha_G$ (ואז גם ברור ש־φ הומומורפיזם יחיד שמקיים זאת, כי אם $\varphi\circ\alpha_F=\alpha_G$ אז $\pi_i\circ\varphi=\varphi_i$ לכל i, ו־φ כזה הוא יחיד): מתקיים $\pi_i\circ(\varphi\circ\alpha_F)=\pi_i\circ\alpha_G$ לכל i, לכן מהתכונה של $G=\varprojlim_{i\in I} G_i$ (בקטגוריה של קבוצות) נובע $\varphi\circ\alpha_F=\alpha_G$. ∎

למה 7.6: *תהי X קבוצה. אם קיימת חבורה (פרוסופית) חפשית על X אז היא יחידה עד כדי איזומורפיזם יחיד.*

הוכחה: הטענה היא שאם $\alpha_G\colon X\to G$, $\alpha_F\colon X\to F$ שתיהן חבורות (פרוסופיות) חפשיות על X אז יש איזומורפיזם יחיד φ כך שתרשים (1) חילופי.

מההגדרה נובע שיש הומומורפיזם φ יחיד כזה. כלומר, $\alpha_G=\varphi\circ\alpha_F$. אם נחליף בין F ל־G, נקבל $\psi\colon G\to F$ כך ש־$\alpha_F=\psi\circ\alpha_G$. אז $(\psi\circ\varphi)\circ\alpha_F=\alpha_F$ ובאופן דומה אז $(\varphi\circ\psi)\circ\alpha_G=\alpha_G$. מהיחידות בהגדרה, $\psi\circ\varphi=\mathrm{id}_F$ באופן דומה $\varphi\circ\psi=\mathrm{id}_G$. לכן φ איזומורפיזם. ∎

למה 7.7: *תהי X קבוצה. אז קיימת חבורה אבסטרקטית חפשית על X.*

הוכחה: תהי $W(X)$ קבוצת כל הסדרות הסופיות

$$W(X)=\{w=x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\dots x_n^{\varepsilon_n}|\ n\ge 0,\ x_1,\dots,x_n\in X,\ \varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\in\{\pm1\}\}$$

(נכתוב x במקום x^1.) נגדיר כפל על $W(X)$ על ידי שרשור סדרות: $u\circ v$ היא הסדרה בה v עומדת אחרי u. הכפל הוא פעולה אסוציאטיבית והסדרה הריקה היא איברה היחידה. יתר על כן, יש העתקה $w\mapsto w^{-1}$ מ־$W(X)$ על עצמה, שנתונה על ידי $(x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\dots x_n^{\varepsilon_n})^{-1}=x_n^{-\varepsilon_n}\dots x_2^{-\varepsilon_2}x_1^{-\varepsilon_1}$. אם $u,v\in W(X)$ ו־$x\in X$ נזהה את $uxx^{-1}w$ ואת $ux^{-1}xw$ עם uv. תהי $F(X)$ קבוצת המנה של $W(X)$ מודולו יחס השקילות הנוצר על ידי הזיהויים האלה. אז $F(X)$ חבורה (ביחס לפעולת הכפל המושרית), התמונה של w^{-1} היא ההופכי של התמונה של w, לכל $w\in W(X)$, ויש העתקה ברורה $\alpha_F\colon X\to F(X)$. אם $\alpha_G\colon X\to G$ היא העתקה לתוך חבורה אבסטרקטית G, היא ניתנת להרחבה באופן יחיד להעתקה $\varphi'\colon W(X)\to G$ ששומרת פעולה. אם $u\sim v$ אז $\varphi'(u)=\varphi'(v)$, לכן φ' משרה הומומורפיזם $\varphi\colon F(X)\to G$. ברור שהוא יחיד. ∎

משפט 7.8: *תהי X קבוצה. חבורה פרוסופית חפשית על X קיימת והיא יחידה עד כדי איזומורפיזם יחיד.*

הוכחה: נותר להוכיח רק את הקיום. תהי $\alpha\colon X\to\Phi$ החבורה האבסטרקטית החפשית על X. תהי

$$\mathcal{N}=\{N\lhd\Phi|\ (\Phi:N)\le\infty,|X\smallsetminus\alpha^{-1}(N)|\le\infty\}$$

אז $\mathcal{N}$ מכוונת (כלומר, אם $N_1,N_2\in\mathcal{N}$ אז $N_1\cap N_2\in\mathcal{N}$):

$$N_1\cap N_2\lhd\Phi,$$

$$\big(\Phi:(N_1\cap N_2)\big)=(\Phi:N_1)\big(N_1:(N_1\cap N_2)\big)=(\Phi:N_1)(N_1N_2:N_2)<$$
$$<(\Phi:N_1)(\Phi:N_2),$$

$$X\smallsetminus\alpha^{-1}(N_1\cap N_2)=\big(X\smallsetminus\alpha^{-1}(N_1)\big)\cup\big(X\smallsetminus\alpha^{-1}(N_2)\big).$$

(אפשר גם להראות כי $\bigcap_{N\in\mathcal{N}} N = \{1\}$, אבל לא נשתמש בזה.)

תהי $F = \hat{\Phi}$ ההשלמה הפרוסופית של Φ ביחס ל־$\mathcal{N}$, עם ההעתקות $\pi_N\colon F \to \Phi/N$. ותהי $\theta\colon \Phi \to F$ ההעתקה המושרית מההעתקות $\theta_N\colon \Phi \to \Phi/N$. נסמן $\alpha_F = \theta \circ \alpha$.

נראה ש־α_F מתכנסת ל־1:

נראה של־$\alpha_F\colon X \to F$ יש התכונה האוניברסלית ביחס לחבורות סופיות.

תהי G חבורה סופית ותהי $\alpha_G\colon X \to G$ העתקה מתכנסת ל־1. לפי התכונה האוניברסלית של $\alpha\colon X \to \Phi$ יש הומומורפיזם יחיד $\psi\colon \Phi \to G$ כך ש־$\psi \circ \alpha = \alpha_G$. יהי $N = \operatorname{Ker}\psi$. אז $N \triangleleft \Phi$, $(\Phi : N) \le \#G < \infty$, ו־$\alpha^{-1}(N) = \alpha_G^{-1}(1)$, לכן $|X \smallsetminus \alpha^{-1}(N)| < \infty$. מכאן $N \in \mathcal{N}$ (ובפרט יש π_N כך ש־$\theta = \theta_N \circ \pi_N$). לפי משפט האיזומורפיזם הראשון יש הומומורפיזם יחיד $\psi_N\colon \Phi/N \to G$ כך ש־$\psi = \psi_N \circ \theta_N$. יהי $\varphi = \psi_N \circ \pi_N$. אז $\varphi \circ \alpha_F = \alpha_G$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\alpha_F"] \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[ddr, "\alpha_G"'] & & F \arrow[d, "\pi_N"] \arrow[ddl, bend left, "\varphi"] \\
& \Phi \arrow[ur, "\theta"] \arrow[r, "\theta_N"'] \arrow[d, "\psi"] & \Phi/N \arrow[dl, "\psi_N"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

נראה ש־φ כך ש־$\varphi \circ \alpha_F = \alpha_G$ יחיד. אם גם $\varphi'\colon F \to G$ מקיים $\varphi' \circ \alpha_F = \alpha_G$, אז $(\varphi' \circ \theta) \circ \alpha = \alpha_G$, לכן מהיחידות של ψ, מתקיים $\varphi' \circ \theta = \psi$. מכאן ש־ $\varphi \circ \theta = \varphi' \circ \theta$, כלומר, $\varphi|_{\theta(\Phi)} = \varphi'|_{\theta(\Phi)}$. כיוון ש־$\theta(\Phi)$ צפופה ב־F (טענה 6.1(ד)), $\varphi = \varphi'$. ∎

דוגמה 7.9: $\hat{\mathbb{Z}}$ (בכתיב חיבורי) היא חבורה פרוסופית חפשית על קבוצה X בת איבר אחד. ההעתקה $X = \{x\} \to \hat{\mathbb{Z}}$ נתונה על ידי $x \mapsto 1$ (כאשר 1 הוא יוצר של $\hat{\mathbb{Z}}$, לא האיבר הניטרלי 0). אכן, $\hat{\mathbb{Z}}$ היא ההשלמה הפרוסופית של $\mathbb{Z}$ ביחס לכל התת חבורות הנורמליות בעלות אידקס סופי ב־$\mathbb{Z}$, ו־$\mathbb{Z}$ היא החבורה האבסטרקטית החפשית על X.

החבורה הטריוויאלית היא החבורה הפרוסופית החפשית על $\emptyset$. ∎

תרגיל 7.10: *תהי* $\alpha_F\colon X \to F$ *חבורה פרוסופית חפשית על* X*. אז* $F = \langle \alpha_F(X) \rangle$.

הוכחה א: תהי $H = \langle \alpha_F(X) \rangle \le F_X$. לפי ההוכחה של משפט 7.8 ובסימוניה, $\alpha_F = \theta \circ \alpha$, לכן $\theta(\alpha(X)) \subseteq H$. אבל H תת חבורה, ו־Φ היא התת חבורה האבסטרקטית הקטנה ביותר שמכילה את $\alpha(X)$, לכן $\theta(\Phi) \subseteq H$. לפי טענה 6.1(ד), $\theta(\Phi)$ צפופה ב־F_X, לכן $H = G$. ∎

הוכחה ב: תהי $H = \langle \alpha_F(X) \rangle \le F_X$ ותהי $\iota\colon H \to F$ ההכלה. נגדיר $\alpha_H\colon X \to H$ על ידי $\alpha_H(x) = \alpha_F(x)$. אז $\alpha_F = \iota \circ \alpha_H$. ההעתקה α_H מתכנסת ל־1. אכן, כיוון שהטופולוגיה על H מושרית מהטופולוגיה על G, לכל $U \triangleleft H$ פתוחה יש $V \triangleleft F$ פתוחה כך ש־$V \cap H \subseteq U$. כיוון ש־$X \smallsetminus \alpha_F^{-1}(V)$ סופית, גם $X \smallsetminus \alpha_H^{-1}(U)$ סופית.

מהתכונה האוניברסלית של F נובע שיש $\rho\colon F \to H$ כך ש־$\rho \circ \alpha_F = \alpha_H$. אז $\iota \circ \rho \circ \alpha_F = \alpha_F$. לכן, מהיחידות בתכונה האוניברסלית, $\iota \circ \rho = \mathrm{id}_F$. בפרט ι על. לכן $H = F$. ∎

תרגיל 7.11: *תהי $\alpha_F\colon X \to F$ חבורה פרוסופית חפשית על X. אז α_F חד חד ערכית.*

הוכחה: יהיו $x_1, x_2 \in X$ שונים. תהי $G = \{\pm 1\}$ החבורה מסדר 2. נגדיר העתקה $\alpha_G\colon X \to G$ על ידי $\alpha_G(x) = \begin{cases} -1 & x = x_1 \\ 1 & \text{אחרת} \end{cases}$. אז α_G מתכנסת ל־1, לכן יש הומומורפיזם רציף $\varphi\colon F_X \to G$ כך ש־$\alpha_G = \varphi \circ \alpha_F$. כיוון ש־$\alpha_G(x_1) \neq \alpha_G(x_2)$, גם $\alpha_F(x_1) \neq \alpha_F(x_2)$. ∎

בעקבות תרגיל זה נוכל להניח כי α_F היא ההכלה, כלומר, $X \subseteq F_X$. אז, בתכונה האוניברסלית, φ מרחיב את α_G; לכן נסמן אותם בד"כ באותה אות. לפי תרגיל 7.10, X היא מערכת יוצרים מתכנסת ל־1 של F_X.

בניה 7.12: תהיינה F_X, F_Y החבורות הפרוסופיות החפשיות, באשר $Y \subseteq X$. נגדיר $\pi = \pi_{XY}\colon X \to F_Y$ על ידי $\pi(x) = \begin{cases} x \in F_Y & x \in Y \\ 1 \in F_Y & \text{אחרת} \end{cases}$. אז π מתכנסת ל־1 ולכן ניתנת להרחבה להומומרופיזם יחיד $\pi\colon F_X \to F_Y$.
תהי $\lambda = \lambda_{YX}\colon Y \to F_X$ נתונה על ידי $\lambda(y) = y \in X \subseteq F_X$. אז λ מתכנסת ל־1 ולכן ניתנת להרחבה להומומרופיזם יחיד $\lambda\colon F_Y \to F_X$.

למה 7.13: *(א)* $\pi_{XY} \circ \lambda_{YX} = \mathrm{id}_{F_Y}$.

(ב) *λ_{YX} חד חד ערכית ו־ π_{XY} על.*

(ג) *$\operatorname{Ker} \pi_{XY}$ היא התת חבורה הנורמלית הסגורה הקטנה ביותר של F_X שמכילה את $X \setminus Y$.*

הוכחה: (א) יהי $y \in Y$. אז $(\pi \circ \lambda)(y) = y = \mathrm{id}_{F_Y}(y)$, לכן, מהיחידות בהגדרה 7.3, $\pi \circ \lambda = \mathrm{id}_{F_Y}$.

(ב) נובע מ־(א).

(ג) יהי $K = \operatorname{Ker} \pi$ ותהי N התת חבורה הנורמלית הסגורה הקטנה ביותר שמכילה את $X \setminus Y$ (היא החיתוך של כל התת חבורות הנורמליות הסגורות שמכילות את $X \setminus Y$). מההגדרה של π ברור ש־$X \setminus Y \subseteq K$, לכן $N \leq K$. כעת, F_Y קומפקטית, לכן תמונתה $L := \lambda(F_Y)$ גם קומפקטית; היא מכילה את $\lambda(Y)$. התת חבורה NL היא התמונה של $N \times L$ תחת העתקת הכפל ב־F_X, לכן גם היא קומפקטית ובפרט סגורה; היא מכילה את X. לפי תרגיל 7.10, $NL = F_X$. לפי (א), $K \cap L = 1$. לכן $K = K \cap NL = N(L \cap K) = N$ (השוויון השני נובע מתוך $N \leq K$). ∎

תהי F_X החבורה הפרוסופית החפשית על קבוצה X. תהי $\mathcal{P}$ משפחת התת קבוצות הסופיות של X ולכל $Y \in \mathcal{P}$ תהי F_Y החבורה הפרוסופית החפשית על Y. אם $Z \subseteq Y$, יש אפימורפיזם $\pi_{YZ}\colon F_Y \to F_Z$, לפי בניה 7.12. באופן דומה יש אפימורפיזם $\pi_{XY}\colon F_X \to F_Y$, לכל $Y \in \mathcal{P}$.

קל לראות (בדוק!) כי אז $(F_Y, \pi_{YZ} |\ Y \in \mathcal{P},\ Z \subseteq Y)$ היא מערכת הפוכה ו־$(F_X, \pi_{XY} |\ Y \in \mathcal{P})$ הוא חסם שלה. לכן יש הומומורפיזם רציף $\pi\colon F_X \to \varprojlim_{Y \in \mathcal{P}} F_Y$.

משפט 7.14: *$\pi\colon F_X \to \varprojlim_{Y\in\mathcal{P}} F_Y$ הוא איזומורפיזם.*

הוכחה: לפי טענה 2.13, π היא על. יהי $K = \operatorname{Ker}\pi$. אז $K = \bigcap_{Y\in\mathcal{P}} \operatorname{Ker}\pi_{XY}$. נראה ש־$K = 1$. לשם כך די להראות ש־$K \subseteq U$, לכל $U \lhd F_X$ פתוחה, כי $\bigcap_U U = 1$. תהי U כזאת. אז $Y := X \smallsetminus U$ סופית, כי X מכנסת ל־1. מתקיים $X \smallsetminus Y \subseteq U$, לכן לפי למה 7.13(ג), $\operatorname{Ker}\pi_{XY} \subseteq U$. מכאן $K \subseteq U$.

לכן φ רציפה, חד חד ערכית ועל. היא מעתיקה קבוצות סגורות על סגורות, לכן φ^{-1} גם רציפה. ∎

חבורה פרוסופית G היא **נוצרת סופית** אם יש $X \subseteq G$ סופית כך ש־$G = \langle X\rangle$.

משפט 7.15: *תהי G חבורה פרוסופית נוצרת סופית. יהי $f\colon G \to G$ אפימורפיזם. אז φ איזומורפיזם.*

הוכחה: די להראות ש־$\operatorname{Ker} f = 1$, כלומר, $\operatorname{Ker} f \subseteq U$ לכל $U \in \mathcal{N}(G)$. לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן

$$\mathcal{R}_n = \{U \in \mathcal{N}(G)|\ (G:U) = n\}. \tag{3}$$

זוהי קבוצת הגרעינים של אפימורפיזמים מ־G על חבורה מסדר n. אז $\mathcal{R}_n$ סופית, כי יש רק מספר סופי של חבורות C מסדר n, עד כדי איזומורפיזם, וכל אפימורפיזם $G \to C$ נקבע על ידי תמונות היוצרים של G.

ההעתקה $U \mapsto f^{-1}(U)$ היא העתקה $\mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_n$. היא חד חד ערכית, לכן על.

תהי $U \in \mathcal{N}(G)$. אז יש $V \in \mathcal{N}(G)$ כך ש־$U = f^{-1}(V)$. אז $U = f^{-1}(V) \supseteq \operatorname{Ker} f$. ∎

]]

תרגיל 7.16: *תהי G חבורה פרוסופית נוצרת סופית ויהי $n \in \mathbb{N}$. נגדיר $\mathcal{R}_n$ על ידי (3) ותהי $M = \bigcap_{U\in\mathcal{R}_n} U$. אז $M \lhd G$ פתוחה והגרעין של כל אפימורפיזם $G \to G/M$ (לא רק הקנוני) הוא M.*

הוכחה: הקבוצה $\mathcal{R}_n$ סופית, לכן M פתוחה. תהי $\bar G = G/M$. מתקיים

$$\mathcal{R}_n = \{U \in \mathcal{N}(G)|\ M \le U,\ (G:U) = n\},$$

לכן לפי משפט האיזומורפיזם השלישי יש התאמה חד חד ערכית בין אברי $\mathcal{R}_n$ לבין אברי

$$\bar{\mathcal{R}}_n = \{\bar U \lhd \bar G|\ (\bar G:\bar U) = n\},$$

והתאמה זו שומרת חיתוכים. בפרט $\bigcap_{\bar U\in\bar{\mathcal{R}}_n} \bar U = M/M = 1$.

יהי $f\colon G \to \bar G$ אפימורפיזם. אז $\{f^{-1}(\bar U)|\bar U \in \bar{\mathcal{R}}_n\}$ היא משפחה של תת חבורותו נורמליות פתוחות ב־G, מאינדקס n. לכן היא מוכלת ב־$\mathcal{R}_n$. אבל יש בה $|\mathcal{R}_n| = |\bar{\mathcal{R}}_n|$ איברים, לכן היא $\mathcal{R}_n$. מכאן

$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(1) = f^{-1}\Big(\bigcap_{\bar U\in\bar{\mathcal{R}}_n} \bar U\Big) = \bigcap_{\bar U\in\bar{\mathcal{R}}_n} f^{-1}(\bar U) = \bigcap_{U\in\mathcal{R}_n} U = M. \qquad ∎$$

[[

למה 7.17: *תהי G חבורה פרוסופית, גבול הפוך של מערכת $(G_Y, \rho_{YZ}|\ Y \in \mathcal{P},\ Z \subseteq Y)$, בה ρ_{YZ} על, לכל $Z \subseteq Y$. נניח שלכל $Y \in \mathcal{P}$ יש איזומורפיזם $\theta_Y\colon F_Y \to G_Y$ שמקיים $\theta_Y(Y \smallsetminus Z) \subseteq \operatorname{Ker} \rho_{YZ}$ לכל $Z \subseteq Y$. אז $F_X \cong G$.*

הוכחה: די להוכיח שיש איזומורפיזמים $(\theta_Y\colon F_Y \to G_Y|\ Y \in \mathcal{P})$ כך שהתרשים הבא חילופי לכל $Z \subseteq Y$

$$\begin{tikzcd} F_Y \arrow[r, "\theta_Y"] \arrow[d, "\pi_{YZ}"] & G_Y \arrow[d, "\rho_{YZ}"] \\ F_Z \arrow[r, "\theta_Z"] & G_Z \end{tikzcd}$$

אכן, אז המערכות ההפוכות $(F_Y, \pi_{YZ}|\ Y \in \mathcal{P},\ Z \subseteq Y),\ (G_Y, \rho_{YZ}|\ Y \in \mathcal{P},\ Z \subseteq Y)$ איזומורפיות זו לזו ולכן גם גבולותיהם. לכן הטענה נובעת ממשפט 7.14.

לכל $Y \in \mathcal{P}$ תהי I_Y קבוצת האיזומורפיזמים $\theta_Y\colon F_Y \to G_Y$ שמקיימים את התנאי בלמה. אם $\theta_Y \in I_Y$ ו־$Z \subseteq Y$ אז $\theta_Z := \rho_{YZ} \circ \theta_Y|_Z\colon Z \to G_Z$ ניתנת להרחבה להומומורפיזם יחיד $\theta_Z\colon F_Z \to G_Z$. מתקיים $\theta_Z \circ \pi_{YZ}|_Y = \rho_{YZ} \circ \theta_Y|_Y$, לכן $\theta_Z \circ \pi_{YZ} = \rho_{YZ} \circ \theta_Y$. כלומר, התרשים לעיל חילופי. יתר על כן, $\theta_Z \in I_Z$. אכן, θ_Z על, לכן איזומורפיזם, לפי משפט 7.15. אם $Z' \subseteq Z$ אז

$$\rho_{ZZ'} \circ \theta_Z(Z \smallsetminus Z') = \rho_{ZZ'} \circ \rho_{YZ} \circ \theta_Y(Z \smallsetminus Z') \subseteq \rho_{YZ'} \circ \theta_Y(Y \smallsetminus Z') = \{1\}$$

בכך הגדרנו העתקה $i_{YZ}\colon I_Y \to I_Z$. ברור שאם $Z' \subseteq Z$ אז $i_{YZ'} = i_{ZZ'} \circ i_{YZ}$. לכן $(I_Y, i_{YZ}|\ Y \in \mathcal{P}, Z \subseteq Y)$ מערכת הפוכה של קבוצות. די להוכיח כי $\varprojlim_{Y \in \mathcal{P}} I_Y \neq \emptyset$. לשם כך די להגדיר טופולוגיה על I_Y, לכל $Y \in \mathcal{P}$, כך ש־I_Y קומפקטית האוסדורף, וההעתקות i_{YZ} רציפות.

כל הומומורפיזם $\theta_Y\colon F_Y \to G_Y$ הוא הרחבה יחידה של העתקה $Y \to G_Y$. לכן אפשר לזהות את θ_Y עם הצמצום שלו ל־Y. לפי תרגיל 7.10, $F_Y = \langle Y \rangle$, לכן $\theta_Y(F_Y) = \langle \theta_Y(Y) \rangle$ (בדוק!). לכן θ_Y על אם ורק אם $G_Y = \langle \theta_Y(Y) \rangle$. אם הוא על ,אז הוא איזומורפיזם, לפי משפט 7.15 (כי $F_Y \cong G_Y$). אם כך, אפשר לזהות את I_Y עם הקבוצה C_Y של כל $(g_y|\ y \in Y) \in G_Y^Y = \overbrace{G_Y \times \cdots \times G_Y}^{|Y|}$ כך ש־

(א) $G_Y = \langle g_y|\ y \in Y \rangle$,

(ב) $\rho_{YZ}(g_y) = 1$ לכל $Z \subseteq Y$ ולכל $y \in Y \smallsetminus Z$.

(ג) כמו כן, אם $Z \subseteq Y$ אז את i_{YZ} אפשר לזהות עם ההעתקה $(g_y|\ y \in Y) \mapsto (\rho_{YZ}(g_z)|\ z \in Z)$.

טענה: *C_Y סגורה ב־G_Y^Y (ולכן קומפקטית האוסדורף) ו־i_{YZ} רציפות.* אכן, (ב) אומר ש־$(g_y|\ y \in Y) \in \prod_{y \in Y} K_y$, באשר $K_y = \bigcap_{Z \subseteq Y \smallsetminus \{y\}} \operatorname{Ker} \rho_{YZ}$. זוהי קבוצה סגורה ב־$G_Y^Y$.

נראה שהמשלים של קבוצה האיברים שמקיימים (א) היא פתוח. נניח $H := \langle g_y|\ y \in Y \rangle \neq G_Y$. לפי תרגיל 3.10 יש $U \leq G_Y$ פתוחה כך ש־ $H \leq U \neq G_Y$. אז $U^Y \subseteq G_Y^Y$ סביבה פתוחה של $(g_y|\ y \in Y)$ ואם $(g'_y|\ y \in Y) \in U^Y$ אז $\langle g'_y|\ y \in Y \rangle \leq U \neq G_Y$.

לבסוף, i_{YZ} רציפה לפי (ג), כי ρ_{YZ} רציפה. ∎

תרגיל 7.18: *תהי X קבוצה. תהי $Z = X \cup \{1\}$. נאמר שתת קבוצה U של Z היא פתוחה, אם $1 \notin U$ או ש־$Z \setminus U$ סופית.*

(א) *הוכח שדבר זה מגדיר טופולוגיה על Z.*

(ב) *הוכח ש־Z מרחב האוסדורף קומפקטי ויש לו בסיס לטופולוגיה הנתון על ידי קבוצות פתוחות־סגורות.*

(ג) *תהי G חבורה פרוסופית ותהי $\alpha\colon X \to G$ העתקה. נרחיב אותה להעתקה $\beta\colon Z \to G$ על ידי $\beta(1) = 1$. הוכח: β רציפה אם ורק אם α מתכנסת ל־1.*

8. חבורת גלואה המוחלטת של שדה הפונקציות הרציונליות מעל המרוכבים

יהי $K = \mathbb{C}(t)$, באשר t טרנסצנדטני מעל $\mathbb{C}$. ויהי $R = K[t]$. אז

$$K = \{c\prod_{i-1}^{r}(t-a_i^{n_i})|\ c \in \mathbb{C}^\times,\ \text{שונים } a_i \in \mathbb{C},\ n_i \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$$
$$R = \{c\prod_{i-1}^{r}(t-a_i^{n_i})|\ c \in \mathbb{C}^\times,\ \text{שונים } a_i \in \mathbb{C},\ n_i \geq 0\} \cup \{0\}$$

יהי $\tilde{K}$ סגור אלגברי של K.

הגדרה 8.1: איבר $\alpha \in \tilde{K}$ **שלם מעל** R אם $\mathrm{irr}(\alpha, K) \in R[X]$.

למשל, $\alpha = \sqrt{f(t)}$, באשר $f(t) \in R$ אינו ריבוע ב־R (ולכן גם לא ב־K), הינו שלם מעל R, כי $\mathrm{irr}(\alpha, K) = X^2 - f(t) \in R[X]$.

אם L/K הרחבה, $L \subseteq \tilde{K}$, אז $S_L = \{\alpha \in L|\ R \text{ שלם מעל } \alpha\}$ הוא **הסגור השלם של** R **ב־**L. אפשר להראות ש־S_L הוא חוג. אם L/K גלואה, (ולכן $\sigma(L) = L$ לכל $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$) אז $\sigma(S_L) = S_L$.

טענה 8.2: *תהי L/K גלואה. כל הומומורפיזם־$\mathbb{C}$ $\varphi\colon R \to \mathbb{C}$ (כלומר, הצבה $t \mapsto a$, באשר $a \in \mathbb{C}$) ניתן להרחבה להומומורפיזם חוגים $\psi\colon S_L \to \mathbb{C}$. יתר על כן, אם $L' \subseteq L$ גם הרחבת גלואה של K, אז $S_{L'} \subseteq S_L$ ו־$\{\psi \circ \sigma|\ \sigma \in \mathrm{Gal}(L/L')\}$ היא קבוצת כל ההרחבות של $\psi|_{S_{L'}}$ ל־S_L. בפרט, $\{\psi \circ \sigma|\ \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)\}$ היא קבוצת כל ההרחבות של φ ל־S_L.*

הגדרה 8.3: תהי L/K גלואה, ויהי $a \in \mathbb{C}$. יהיו φ, ψ כמו לעיל. אז

$$G(\psi) = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)|\ \psi \circ \sigma = \psi\}$$

נקראת **חבורת ההסתעפות** (גם: חבורת הפירוק, חבורת ההתמדה) של ψ. אם $G(\psi) \neq 1$, אומרים ש־ψ **מסועף** וגם כי a **מסועף ב־**L. ∎

הערה 8.4: ההגדרה האחרונה טובה, כלומר, היות $G(\psi) \neq 1$ אינו תלוי בבחירת ההרחבה ψ של $t \mapsto a$. אכן, אם ψ היא הרחבה כזאת, אז כל הרחבה אחרת היא מהצורה $\psi \circ \tau$, באשר $\tau \in \mathrm{Gal}(L/K)$. אז

$$G(\psi \circ \tau) = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)|\ (\psi \circ \tau) \circ \sigma = \psi \circ \tau\} = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)|\ \psi \circ (\tau\sigma\tau^{-1}) = \psi\}$$
$$= \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)|\ \tau\sigma\tau^{-1}) \in G(\psi)\} = \tau^{-1}G(\psi)\tau = G(\psi)^\tau$$

לכן $G(\psi \circ \tau) \neq 1$ אם ורק אם $G(\psi) \neq 1$. ∎

דוגמה 8.5: תהי L/K הרחבה ריבועית. אז $L = K(\sqrt{f})$, באשר $f \in K$. בלי הגבלת הכלליות $f \in R$, כי אם $f = \frac{f_1}{f_2}$ אז $K(\sqrt{\frac{f_1}{f_2}}) = K(f_2\sqrt{\frac{f_1}{f_2}}) = K(\sqrt{f_1 f_2})$. בלי הגבלת הכלליות $f \in R$ מתוקן (כי המקדם העליון

הוא ריבוע ב־K). לכן $f = \prod_{i=1}^{r}(t-a_i)$, באשר $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{C}$. בלי הגבלת הכלליות הם שונים זה מזה ו־$r \geq 1$.

איבר כללי של L הוא מהצורה $\beta = g + h\sqrt{f}$, באשר $g, h \in K$. אם $h = 0$ אז $\mathrm{irr}(\beta, K) = X - g$, לכן β שלם מעל K אם ורק אם $g \in R$. אם $h \neq 0$ אז

$$\mathrm{irr}(\beta, K) = (X - g - h\sqrt{f})(X - g + h\sqrt{f}) = X^2 - 2gX + g^2 - h^2 f$$

לכן β שלם מעל K אם ורק אם $g^2 - h^2 f, g \in R$, כלומר, $h^2 f, g \in R$, קל לראות שהתנאי האחרון שקול ל־$g, h \in R$.

לכן $S_L = R[\sqrt{f}]$.

כעת יהי $a \in \mathbb{C}$. אז $t \mapsto a$ ניתן להרחבה ל־$\psi\colon S_L \to \mathbb{C}$ בשני אופנים:

$$\sqrt{r} \mapsto \pm\sqrt{f(a)} + \pm\sqrt{\prod_{i=1}^{r}(a - a_i)}$$

לכן a מסועף ב־L אם ורק אם $a \in \{a_1, \ldots, a_r\}$. בפרט רואים, שמספר נקודות ההסתעפות ב־L הוא סופי. ∎

טענה 8.6: *(א) הרחבה סופית L של K מסועפת במספרט סופי של נקודות.*

(ב) *כל הרחבה לא טריוויאלית של K מסועפת בנקודה אחת לפחות.*

הוכחה: את (ב) לא נוכיח (נובע מנוסחת רימן־הורביץ). נעיר לגביו רק שבד"כ אומרים ש־L מסועפת בשתי נקודות לפחות, כי מגדירים גם הסתעפות ב־∞.

(א) יש איבר פרימיטיב $\alpha \in L$ כך ש־$L = K(\alpha)$. יהי $g = \mathrm{irr}(\alpha, K)$, נאמר

$$g = X^n + \frac{h_{n-1}}{h}X^{n-1} + \frac{h_{n-2}}{h}X^{n-2} + \ldots + \frac{h_1}{h}X + \frac{h_0}{h}$$

באשר $h, h_i \in R$. בלי הגבלת הכלליות $h = 1$, כלומר, $\alpha \in S_L$. אכן, יהי $\beta = h\alpha$. אז $L = K(\beta)$, אם נציב α במשוואה לעיל ונכפיל אותה ב־h^n, נקבל

$$0 = h^n\alpha^n + h^{n-1}h_{n-1}\alpha^{n-1} + h^{n-1}h_{n-2}\alpha^{n-2} + \ldots + h^{n-1}h_1\alpha + h^{n-1}h_0$$

כלומר,

$$0 = \beta^n + h_{n-1}\beta^{n-1} + hh_{n-2}\beta^{n-2} + \ldots + h^{n-2}h_1\beta + h^{n-1}h_0$$

כלומר, β הוא שורש של פולינום מתוקן ממעלה $n = [L:K]$ מעל R. כיוון ש־$L = K(\beta)$, פולינום זה הוא $\mathrm{irr}(\beta, K)$, לכן $\beta \in S_L$.

אם כך, בלי הגבלת הכלליות $\alpha \in S_L$. **הדיסקרימיננטה** של α

$$d := (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{\substack{\sigma,\tau\in \mathrm{Gal}(L/K)\\ \sigma\neq\tau}} \big(\sigma(\alpha)-\tau(\alpha)\big)$$

הוא פולינום סימטרי בשרשים של $\mathrm{irr}(\alpha,K)\in R[X]$. לכן הוא פולינום מעל $\mathbb{Z}$ במקדמים של $\mathrm{irr}(\alpha,K)$ ובפרט הוא איבר ב־R, כלומר פולינום במשתנה t מעל $\mathbb{C}$.

אם $a\in\mathbb{C}$ אינו שורש של d, ו־$\psi\colon S_L\to\mathbb{C}$ מרחיב את $t\mapsto a$, אז

$$0\neq d(a)=\psi(d)=\pm\prod_{\substack{\sigma,\tau\in \mathrm{Gal}(L/K)\\ \sigma\neq\tau}}\big((\psi\circ\sigma)(\alpha)-(\psi\circ\tau)(\alpha)\big)$$

וברפט $(\psi\circ\sigma)(\alpha)\neq\psi(\alpha)$ לכל $\sigma\neq 1$. לכן $\psi\circ\sigma\neq\psi$, לכל $\sigma\neq 1$. ∎

תרגיל 8.7: *תהיינה $L_1\subseteq L_2$ שתי הרחבות גלואה של K. אם $a\in\mathbb{C}$ מסועף ב־ L_1 אז הוא מסועף ב־ L_2.*

הוכחה: מתקיים $R\subseteq S_{L_1}\subseteq S_{L_2}$. תהי $\psi_2\colon S_{L_2}\to\mathbb{C}$ הרחבה של $t\mapsto a$, ויהי $\psi_1\colon S_{L_1}\to\mathbb{C}$ הצמצום של ψ_2 ל־ S_{L_1}.

לפי הנתון יש $1\neq\sigma_1\in\mathrm{Gal}(L_1/K)$ כך ש־$\psi_1\circ\sigma_1=\psi_1$. נרחיב את σ_1 ל־$\sigma_2\in\mathrm{Gal}(L_2/K)$. אז $\psi_2\circ\sigma_2,\psi_2$ שניהם מרחיבים את ψ_1. לכן לפי טענה 8.2 יש $\tau\in\mathrm{Gal}(L_2/L_1)$ כך ש־$\psi_2\circ\sigma_2=\psi_2\circ\tau$. מכאן $\psi_2\circ(\sigma_2\tau^{-1})=\psi_2$, אבל $\sigma_2\tau^{-1}\neq 1$, כי $(\sigma\tau^{-1})|_{L_1}=\sigma_1\cdot 1\neq 1$. לכן a מסועף ב־L_2. ∎

תרגיל 8.8: *תהיינה L_1,L_2 שתי הרחבות גלואה של K, לא מסועפות ב־a. אז $L:=L_1L_2$ אינה מסועפת ב־a.*

הוכחה: תהי $\psi\colon S_L\to\mathbb{C}$ הרחבה של $t\mapsto a$. יהי $\sigma\in\mathrm{Gal}(L/K)$ כך ש־$\psi\circ\sigma=\psi$. אז, עבור $i\in\{1,2\}$, $\psi|_{S_{L_i}}\circ\sigma|_{S_{L_i}}=(\psi\circ\sigma)|_{S_{L_i}}=\psi|_{S_{L_i}}$, ולכן $\sigma|_{S_{L_i}}=1$, ולכן $\sigma|_{L_i}=1$ (ידוע ש־L_i הוא שדה המנות של S_{L_i}). מתוך $\sigma|_{L_1}=1$, $\sigma|_{L_2}=1$ נובע $\sigma=1$. ∎

לכל $Y\subseteq\mathbb{C}$ סופית תהי K_Y הרחבת גלואה הגדולה ביותר של K שהינה מסועפת לכל היותר באיברי Y, כלומר, אינה מסועפת ב־$\mathbb{C}\smallsetminus Y$. לפי שני התרגילים הקודמים, $K_Y=\bigcup L$, באשר L עובר על הרחבות גלואה סופיות לא מסועפות ב־$\mathbb{C}\smallsetminus Y$. אם $Z\subseteq Y\subseteq\mathbb{C}$ סופיות, אז $\mathbb{C}\smallsetminus Y\subseteq\mathbb{C}\smallsetminus Z$ לכן $K_Z\subseteq K_Y$. נשים לב ש־$\bigcup_Y K_Y$ הוא הסגור האלגברי של K, כי כל α אלגברי מעל K נמצא באיזו L כך ש־L/K גלואה סופית, והיא מסועפת באיזה קבוצה סופית Y, לפי טענה 8.6(א).

לכל $Y\subseteq\mathbb{C}$ סופית נסמן $G_Y=\mathrm{Gal}(K_Y/K)$ ולכל $Z\subseteq Y$ תהי $\rho_{YZ}\colon G_Y\to G_Z$ העתקת הצמצום. כמו כן תהי $\rho_Y\colon\mathrm{Gal}(K)\to G_Y$ העתקת הצמצום. ההעתקות העלה הן על. אז $(G_Y,\rho_{YZ})_Y$ היא מערכת הפוכה של חבורות פרוסופיות וההומומורפיזם המושרה ממנה $\rho\colon\mathrm{Gal}(K)\to\varprojlim_Y G_Y$ היא על. גרעינה הוא $\bigcap_Y\mathrm{Ker}\,\rho_Y=\bigcap_Y\mathrm{Gal}(K_Y)=\mathrm{Gal}(\bigcup K_Y)=1$. לכן ρ הוא איזומורפיזם.

כדי לאפיין את $\varprojlim_Y G_Y$, נשתמש במשפט הכבד הבא:

משפט 8.9 (משפט הקיום של רימן): *תהי* $Y = \{a_1, \dots, a_r\} \subseteq \mathbb{C}$*. אז לכל* $1 \leq i \leq r$ *יש* $\psi_i\colon S_{K_Y} \to \mathbb{C}$ *שמרחיב את* $a_i \mapsto t$ *ויש* $\sigma_i \in \mathrm{Gal}(K_Y/K)$ *כך ש־*$\psi_i \circ \sigma_i = \psi_i$ *וההומומורפיזם* $\theta_Y\colon F_Y \to G_Y$ *המוגדר על ידי* $a_i \mapsto \sigma_i$*, עבור* $i = 1, \dots r$*, היא איזומורפיזם.*

מסקנה 8.10: G_Y *חבורה פרוסופית חפשית על* Y*. אם* $Z \subseteq Y$ *אז* $\theta_Y(Y \smallsetminus Z) \subseteq \mathrm{Ker}\,\rho_{YZ}$*.*

הוכחה: האם $a_i \in Y \smallsetminus Z$, אז a_i אינו מסועף ב־K_Z, לכן $\sigma_i|_{K_Z} = 1$. ∎

מסקנה 8.11: $\mathrm{Gal}(K) \cong F_{\mathbb{C}}$.

הוכחה: לפי למה 7.17. ∎

9. על משפט הקיום של רימן

מטרת סעיף זה היא להסביר את הקשר בין

(א) כיסויים של הספירה של רימן על ידי משטחי רימן

(ב) כיסויים של $\mathbb{C}$ פחות מספר סופי של נקודות על ידי מרחבים טופולוגיים קשירים.

(ג) הרחבות סופיות של $\mathbb{C}(t)$.

נאמר שקבוצה היא "בת מניה" אם היא סופית או שיש התאמה חד חד ערכית בינה לבין $\mathbb{N}$, כלומר, עוצמתה $\geq \aleph_0$.

למה 10.1: *תהי G חבורה פרוסופית. אז התנאים הבאים שקולים זה לזה:*

(א) *ל־G יש בסיס בן מניה לטופולוגיה.*

(ב) *$\mathcal{N}(G)$ בת מניה.*

(ג) *יש סדרה $\ldots \geq U_1 \geq G = U_0$ ב־$\mathcal{N}(G)$ כך ש־$\bigcap_{i=0}^{\infty} U_i = \{1\}$.*

(ד) *ל־G קבוצת יוצרים X מתכנסת ל־1 בת מניה.*

הוכחה: (א) $\Leftarrow$(ב): יהי $\mathcal{B}$ בסיס בן מניה. תהי $U \in \mathcal{N}(G)$. אז יש $\mathcal{B}_U \subseteq$ כך ש־$U = \bigcup_{C \in \mathcal{B}_0} C$. אבל U גם קומפקטית, לכן בלי הגבלת הכלליות $\mathcal{B}_U$ סופית. זה נותן העתקה חד חד ערכית $\mathcal{N}(G) \to \{\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} | \text{ סופית } \mathcal{B}'\}$ מכאן $|\mathcal{N}(G)| \leq |\{\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} | \text{ סופית } \mathcal{B}'\}| \leq \aleph_0$.

(ב) $\Leftarrow$(א): לכל $U \in \mathcal{N}(G)$ יש רק מספר סופי של קוסטים. לכן קבוצת הקוסטים של אברי $\mathcal{N}(G)$ בת מניה. היא בסיס.

(ב) $\Leftarrow$(ג): נניח $\mathcal{N}(G) = \{V_1, V_2, \ldots\}$ תהי $U_i = \bigcap_{i=0}^{i} V_i$. אז $U_i \in \mathcal{N}(G)$ ומתקיים $\ldots \geq U_1 \geq G = U_0$ ו־$\bigcap_{i=0}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=0}^{\infty} V_i = \{1\}$.

(ג) $\Leftarrow$(ד): נבחר, באינדוקציה, קבוצת מייצגים $X_i \subseteq U_i$ של של הקוסטים של U_i/U_{i+1}. זוהי קבוצה סופית, כי U_{i+1} פתוחה ב־G ולכן גם ב־U_i. לכן $X := \bigcup_{i=0}^{\infty}$ בת מניה.

נראה שהיא מתכנסת ל־1: אם $V \in \mathcal{N}(G)$, אז $\bigcap_{i=0}^{\infty}(U_i \smallsetminus V) = (\bigcap_{i=0}^{\infty} U_i) \smallsetminus V = \{1\} \smallsetminus V = \emptyset$, וכל $U_i \smallsetminus V$ היא סגורה, לכן לפי הקומפקטיות יש $I \subseteq \mathbb{N}$ סופית כך ש־ $\bigcap_{i \in I}(U_i \smallsetminus V) = \emptyset$, ואם ניקח $i \in \mathbb{N}$ גדול בכל אברי I אז $U_i \smallsetminus V = \emptyset$, כלומר $U_i \leq V$. מכאן $\bigcup_{j=i}^{\infty} X_i \subseteq U_i \leq V$, ואגף שמאל היא תת קבוצה של X שמכילה כמעט את כל אברי X.

נראה ש־$G = \langle X \rangle$: יהי $g \in G$. אז יש $x_1 \in X_1$ כך ש־$g \in x_1 U_1$. אז $x_1^{-1} g \in U_1$, לכן יש $x_2 \in U_2$, כך ש־$x_1^{-1} g \in x_2 U_2$, כלומר, $g \in x_1 x_2 U_2$. שוב, $x_2^{-1} x_1^{-1} g \in U_2$, לכן יש $x_3 \in U_3$, כך ש־$x_3^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1} g \in x_2 U_2$, כלומר, $g \in x_1 x_2 x_3 U_3$. באינדוקציה, יש $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ב־X כך ש־לכל i $g \in x_1 x_2 \cdots x_i U_{i+1} \subseteq \langle X \rangle U_{i+1}$. מכאן $\langle X \rangle = \bigcap_i \langle X \rangle U_{i+1} = G$.

(ד) $\Leftarrow$(ב): תהי $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. לכל $i \in \mathbb{N}$ תהי H_i החבורה הנורמלית הסגורה הקטנה ביותר של G שמכילה את $\ldots x_{i+1}, x_{i+2}$. נסמן $\mathcal{N}_i = \{V \in \mathcal{N}(G) | \ V \geq H_i\}$ כיון ש־X מתכנסת ל־1, מתקיים $\mathcal{N}(G) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{N}_i$. לכן די להוכיח ש־$|\mathcal{N}_i| \leq \aleph_0$ לכל i. לפי משפט האיזומורפיזם השלישי יש התאמה בין $\mathcal{N}_i$ לבין $\mathcal{N}(G/H_i)$, לכן די להוכיח ש־$|\mathcal{N}(G/H_i)| \leq \aleph_0$ לכל i.

נקבע i ונסמן $\bar{G} = G/H$. כיוון ש־$\bar{G}$ נוצרת על ידי התמונות של $x_1, \ldots, x_i$ ב־$\bar{G}$, היא נוצרת סופית. אברי $\mathcal{N}(\bar{G})$ הם גרעינים של אפימורפיזמים מ־$\bar{G}$ על חבורות סופיות. לחבורה נוצרת סופית יש רק מספר סופי של אפימורפיזמים על כל חבורה סופית ומספר החבורות הסופיות, עד כדי איזומורפיזם, הוא בן מניה. לכן $\mathcal{N}(\bar{G})$ בת

מניה. ∎

נסמן ב־$\hat{F}_\omega$ את החבורה הפרוסופית החפשית על קבוצה מעוצמה $\aleph_0$.

משפט 10.2 (Iwasawa): *תהי G חבורה פרוסופית עם בסיס בן מניה לטופולוגיה. התנאים הבאים שקולים זה לזה:*

(א) $G \cong \hat{F}_\omega$.

(ב) *לכל זוג של אפימורפיזמים של חבורות פרוסופיות* ($\varphi\colon G \to A, \alpha\colon B \to A$), *באשר* A, B *סופיות, יש אפימורפיזם* $\gamma\colon G \to B$ *כך ש־*$\varphi = \alpha \circ \gamma$.

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ N \arrow[r, "\alpha"'] & B \end{tikzcd}$$

הוכחה: *(חסרה בינתיים.)* ∎

למה 11.1: *תהי $G\times A\to A$ פעולה. התנאים הבאים שקולים זה לזה:*

(א) $G\times A\to A$ *רציפה.*

(ב) *המייצב* $U_a := \{\sigma\in G|\ \sigma a = a\}\le G$ *פתוח ב־G, לכל $a\in A$.*

(ג) $A=\bigcup_U U$*, באשר U עובר על כל התת חבורות הפתוחות של G, ו־* $A^U=\{a\in A|\ ua=a$ *לכל* $u\in U\}$ *לכל U.*

הוכחה: (א) $\Leftarrow$(ב): ברור ש־U_a תת חבורה. לפי הרציפות יש סביבות פתוחות A' של $a\in A$ ו־W של 1 ב־G, כך ש־$WA'\subseteq\{1a\}=\{a\}$. בלי הגבלת הכלליות $A'=\{a\}$. אז $W\subseteq U_a$. לכן $U_a=\bigcup_{\sigma\in U_a}\sigma W$ פתוחה.

(ב) $\Leftarrow$(ג): יהי $a\in A$. אז $U=U_a$ פתוחה, ו־$a\in A^U$.

(ג) $\Leftarrow$(א): יהי $(\sigma,a)\in G\times A$. יש $U\le G$ פתוחה כך ש־$a\in A^U$. אז $\sigma U\times\{a\}$ סביבה פתוחה של (σ,a) ו־$(\sigma U)\{a\}=\{\sigma a\}$. ∎

(לא הושלם.)

תרגיל12.1: *יהיו* $x \in Z^2(G,A)$ *ו־* $\sigma \in G$ *אז*

(א) $x(1,\sigma) = x(1,1)$;

(ב) $x(\sigma,1) = \sigma x(1,1)$.

הוכחה:

$$0 = (\partial x)(1,1,\sigma) = 1x(1,\sigma) - x(1\cdot 1,\sigma) + x(1,1\cdot\sigma) - x(1,1) = x(1,\sigma) - x(1,1),$$

$$0 = (\partial x)(\sigma,1,1) = \sigma x(1,1) - x(\sigma\cdot 1,1) + x(\sigma,1\cdot 1) - x(\sigma,1) = \sigma x(1,1) - x(\sigma,1).$$

■

נתבוננן בסדרה הקצרה המדוייקת

$$E\colon \quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow \hat{G} \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1 \qquad (1)$$

של חבורות פרוסופיות והומומורפיזמים רציפים, בה A סופית, ובפרט דיסקרטית. יהי $u\colon G \to \hat{G}$ חתך רציף של $\hat{G} \to G$ שקיים לפי למה ?. נגדיר $\psi\colon G\times A \to A$ על ידי $\psi(\sigma,a) = u_\sigma a u_\sigma^{-1}$. אז ψ פעולה רציפה של G על A. לכן A הוא מדול־G. (כיוון ש־A חילופית, הפעולה אינה תלוייה בבחירת החתך u.)

עבור חבורה פרוסופית G ומודול־Gסופי A **הרחבה של** G **על ידי** A היא סדרה קצרה מדוייקת (1) של חבורות פרוסויות, עם הומומורפיזמים רציפים, כך שהפעולה המוגדרת לעיל מהסדרה היא הפעולה הנתונה של G על A. בד"כ (בהמשך) נכתוב את A ואת $\hat{G}$ בכתיב חיבורי (למרות ש־$\hat{G}$ לא בהכרח חילופית!)

אם E ו־E' שתי הרחבות של G על ידי אותו מודול־G A, נאמר שהן **חופפות** אם קיים הומומורפיזם η בתרשים הבא כך שהרתשים חילופי.

$$\begin{tikzcd}
E\colon & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & \hat{G} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\eta"] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
E'\colon & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & \hat{G}' \arrow[r, "\pi'"] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

קל לראות שאם η כזה קיים, אז הוא איזומורפיזם. לכן יחס החפיפה הוא יחס שקילות.

נסמן ב־$\mathcal{E}(G,A)$ את קבוצת מחלקות החפיפה של הרחבות של G על ידי A.

משפט 12.2: *עבור חבורה פרוסופית* G *ועבור מודול־*G *סופי* A *קיימת התאמה חד־חד־ערכית בין* $H^2(G,A)$ *ו־*$\mathcal{E}(G,A)$.

הוכחה: נתבונן בהרחבה (1) של G על ידי A. נכתוב את $\hat{G}$ באופן חיבורי (למרות שהיא איננה בהכרח אבלית, אבל התת חבורה שלה A האבלית נכתבת בכתיב חיבורי). יהי $u\colon G\to\hat{G}$ חתך רציף של π' כלומר, העתקה רציפה (לא בהכרח הומומורפיזם) כך שמתקיים $\pi\circ u=\mathrm{id}_G$. כאמור, הוא מגדיר פעולה של G על A על ידי

$$\sigma a=u(\sigma)+a-u(\sigma),\quad a\in A,\ \sigma\in G.$$

כיוון ש־u הוא חתך, אם $\sigma_1,\sigma_2\in G$ אז $u(\sigma_1\sigma_2)$ ו־$u(\sigma_1)+u(\sigma_2)$ שייכים לאותו קוסט של A ב־$\hat{G}$. לכן קיים איזה $x(\sigma_1,\sigma_2)\in A$ כך ש־

$$u(\sigma_1)+u(\sigma_2)=x(\sigma_1,\sigma_2)+u(\sigma_1\sigma_2). \tag{3}$$

ברור שההעתקה $x\colon G\times G\to A$ היא רציפה. נראה שהיא איבר ב־$Z^2(G,A)$.

יהיו $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\in G$. אז

$$\begin{aligned}&u(\sigma_1)+[u(\sigma_2)+u(\sigma_3)]=u(\sigma_1)+[x(\sigma_2,\sigma_3)+u(\sigma_2\sigma_3)]=\\&\sigma_1x(\sigma_2,\sigma_3)+u(\sigma_1)+u(\sigma_2\sigma_3)=\sigma_1x(\sigma_2,\sigma_3)+x(\sigma_1,\sigma_2\sigma_3)+u(\sigma_1\sigma_2\sigma_3),\end{aligned}$$

ו־

$$\begin{aligned}[u(\sigma_1)+u(\sigma_2)]+u(\sigma_3)=&[x(\sigma_1,\sigma_2)+u(\sigma_1\sigma_2)]+u(\sigma_3)=\\&x(\sigma_1,\sigma_2)+x(\sigma_1\sigma_2,\sigma_3)+u(\sigma_1\sigma_2\sigma_3);\end{aligned}$$

לכן

$$\sigma_1x(\sigma_2,\sigma_3)+x(\sigma_1,\sigma_2\sigma_3)=x(\sigma_1,\sigma_2)+x(\sigma_1\sigma_2,\sigma_3),$$

כלומר, $x\in Z^2(G,A)$.

ההגדרה של x תלויה בבחירת u. אבל אם $u'\colon G\to\hat{G}$ חתך אחר של π ו־$x'\colon G\times G\to A$ האיבר המתאים לו ב־$Z(GG,A)$, אז $x-x'\in\bar{B}^2(G,A)$. אכן, אם $\sigma\in G$ אז קיים $y(\sigma)\in A$ כך ש־

$$u'(\sigma)=y(\sigma)+u(\sigma).$$

ברור ש־$y\colon G\to A$ רציף. מאידך אם $\sigma_1,\sigma_2\in G$ אז

$$\begin{aligned}&x'(\sigma_1,\sigma_2)+y(\sigma_1\sigma_2)+u(\sigma_1\sigma_2)=x'(\sigma_1,\sigma_2)+u'(\sigma_1\sigma_2)=u'(\sigma_1)+u'(\sigma_2)=\\&y(\sigma_1)+u(\sigma_1)+y(\sigma_2)+u(\sigma_2)=y(\sigma_1)+\sigma_1y(\sigma_2)+u(\sigma_1)+u(\sigma_2)=\\&y(\sigma_1)+\sigma_1y(\sigma_2)+x(\sigma_1,\sigma_2)+u(\sigma_1\sigma_2);\end{aligned}$$

לכן

$$x'(\sigma_1,\sigma_2)-x(\sigma_1,\sigma_2)=\sigma_1y(\sigma_2)-y(\sigma_1\sigma_2)+y(\sigma_1)=(\partial_1y)(\sigma_1,\sigma_2).$$

לכן $x-x'\in \bar{B}^2(G,A)$ ולכן x,x' מגדירים אותו איבר ב־$H^2(G,A)$.

אם E,E' שתי הרחבות חופפות –וקיים תרשים (2)– והן מגדירות איברים $x,x'\in H^2(G,A)$ בעזרת חתכים u,u', בהתאמה, אז מתקיימת המשוואה האנלוגית ל־(3) והמשוואה שמתקבלת מ־(3) על ידי הפעלת η (שהינו הזהות על A):

$$u'(\sigma_1)+u'(\sigma_2)=x'(\sigma_1,\sigma_2)+u'(\sigma_1\sigma_2)$$

$$\eta\circ u(\sigma_1)+\eta\circ u(\sigma_2)=x(\sigma_1,\sigma_2)+\eta\circ u(\sigma_1\sigma_2)$$

כיוון ש־$u',\eta\circ u$ הם שני חתכים של π', לפי האמור לעיל, x,x' מגדירים אותו איבר ב־$H^2(G,A)$.

בכך בנינו העתקה מוגדרת היטב $\Phi\colon \mathcal{E}(G,A)\to H^2(G,A)$.

להיפך, יהי $x\colon G\times G\to A$ מייצג של איבר ב־$H^2(G,A)$. נגדיר חבורה פרוסופית $\hat{G}$ באופן הבא. כקבוצה, ואפילו כמרחב טופולוגי, זוהי המכפלה הקרטזית $A\times G$, אבל הפעולה (חיבור) בה מוגדרת כך:

$$(a_1,\sigma_1)+(a_2,\sigma_2)=(a_1+\sigma_1a_2+x(\sigma_1,\sigma_2),\sigma_1\sigma_2),\quad a_1,a_2\in A,\ \sigma_1,\sigma_2\in G.$$

הפעולה היא אסוציאטיבית:

$$\begin{aligned}\big((a_1,\sigma_1)+(a_2,\sigma_2)\big)+(a_3,\sigma_3)&=(a_1+\sigma_1a_2+x(\sigma_1,\sigma_2),\sigma_1\sigma_2)+(a_3,\sigma_3)\\&=(a_1+\sigma_1a_2+x(\sigma_1,\sigma_2)+\sigma_1\sigma_2a_3+x(\sigma_1\sigma_2,\sigma_3),\sigma_1\sigma_2\sigma_3)\\(a_1,\sigma_1)+\big((a_2,\sigma_2)+(a_3,\sigma_3)\big)&=(a_1,\sigma_1)+(a_2+\sigma_2a_3+x(\sigma_2,\sigma_3),\sigma_2\sigma_3)\\&=(a_1+\sigma_1a_2+\sigma_1\sigma_2a_3+\sigma_1x(\sigma_2,\sigma_3)+x(\sigma_1,\sigma_2\sigma_3),\sigma_1\sigma_2\sigma_3)\end{aligned}$$

ושני הביטויים באגפים הימניים שווים, בגלל ש־$x\in Z^2(G,A)$.

נבדוק שיש איבר האפס (האיבר הניטרלי ביחס החיבור) (b,τ):

אם (b,τ) איבר האפס, אז הוא מקיים $(b,\tau)+(0,1)=(0,1)$. כלומר, $\tau=1$ ו־$b+x(\tau,1)=0$, כלומר, $(b,\tau)=(-x(1,1),1)$. ואכן,

$$(-x(1,1),1)+(a,\sigma)=(-x(1,1)+a+x(1,\sigma),\sigma)=(a,\sigma)$$

$$(a,\sigma)+(-x(1,1),1)=(a-\sigma x(1,1)+x(\sigma,1),\sigma)=(a,\sigma)$$

לפי תרגיל 1.1.

קיום איבר נגדי: (b,τ) נגדי משמאל של (a,σ) אם ורק אם $\sigma\tau=1$, $b+\tau a+x(\tau,\sigma)=-x(1,1)$, כלומר, $\tau=\sigma^{-1}$, $b=-\sigma^{-1}a-x(\sigma^{-1},\sigma)-x(1,1)$.

(b,τ) נגדי מימין של (a,σ) אם ורק אם $\sigma\tau=1$, $a+\sigma b+x(\sigma,\tau)=-x(1,1)$, כלומר, $\tau=\sigma^{-1}$, $b=-\sigma^{-1}a-\sigma^{-1}x(\sigma,\sigma^{-1})-\sigma^{-1}x(1,1)$. שני הנגדיים שווים, כי, לפי תרגיל 12.1,

$$\begin{aligned}0=(\partial x)(\sigma^{-1},\sigma,\sigma^{-1})&=\sigma^{-1}x(\sigma,\sigma^{-1})-x(1,\sigma^{-1})+x(\sigma^{-1},1)-x(\sigma,\sigma^{-1})\\&=\sigma^{-1}x(\sigma,\sigma^{-1})-x(1,1)+(\sigma^{-1}x(1,1)-x(\sigma,\sigma^{-1})\end{aligned}$$

לכן הם הנגדי של (a,σ).

כיוון שפעולת החיבור וגם הנגדי רציפות, ו־$\hat{G}$ קומפקטית, האוסדורף, ויש לה בסיס של קבוצות פתוחות סגורות (כי לA, G יש), היא חבורה פרוסופית.

קיים אפימורפיזם $\pi\colon \hat{G} \to G$ הנתון על ידי $(a,\sigma) \mapsto \sigma$, וגרעינו $A \times \{1\}$.

ההעתקה $\lambda\colon A \to \hat{G}$, הנתונה על יד $a \mapsto (a - x(1,1), 1)$, היא רציפה, חד חד ערכית והיא הומומורפיזם:

$$\lambda(a_1) + \lambda(a_2) = (a_1 - x(1,1), 1) + (a_2 - x(1,1), 1) =$$

$$(a_1 - x(1,1) + a_2 - x(1,1) + x(1,1), 1) = (a_1 + a_2 - x(1,1), 1) = \lambda(a_1 + a_2)$$

תמונתה היא $A \times \{1\}$, הגרעין של π.

לכן $1 \to G \to \hat{G} \to A \to 0$ היא הרחבה של G על ידי A. היא אינה תלויה בבחירת המייצג x של איבר ב־$H^2(G,A)$. אכן, אם x' מייצג אחר, ו־x, x' נותנים את שתי ההרחבות בתרשים (2), אז הן חופפות. אכן, $x' = x + \partial y$, באשר $y \in B^1(G,A)$. נגדיר העתקה $\eta\colon \hat{G} \to \hat{G}'$ על ידי $\eta(a,\sigma) = (a - y(\sigma), \sigma)$. אז

$$\eta(a_1,\sigma_1) +' \eta(a_2,\sigma_2) = (a_1 - y(\sigma_1), \sigma_1) +' (a_2 - y(\sigma_2), \sigma_2) =$$

$$(a_1 - y(\sigma_1) + \sigma_1 a_2 - \sigma_1 y(\sigma_2) + x(\sigma_1,\sigma_2) + (\partial y)(\sigma_1,\sigma_2), \sigma_1\sigma_2) =$$

$$(a_1 - y(\sigma_1) + \sigma_1 a_2 - \sigma_1 y(\sigma_2) + x(\sigma_1,\sigma_2) + \sigma_1 y(\sigma_2) - y(\sigma_1\sigma_2) + y(\sigma_1), \sigma_1\sigma_2) =$$

$$(a_1 + \sigma_1 a_2 + x(\sigma_1,\sigma_2) - y(\sigma_1\sigma_2), \sigma_1\sigma_2) =$$

$$\eta\big((a_1 + \sigma_1 a_2 + x(\sigma_1,\sigma_2), \sigma_1\sigma_2)\big) = \eta\big((a_1,\sigma_1) + (a_2,\sigma_2)\big)$$

לכן η הומומורפיזם. הוא משרה זהות על G, כלומר, ההטלות של (a,σ) ושל $\eta(a,\sigma)$ על הקואורדינטה השניה זהות. כמו כן, η הוא זהות על A, כלומר (כאשר מזהים נכון את A כתת חבורה של $\hat{G}, \hat{G}'$) $\eta((a - x(1,1), 1)) = (a - x'(1,1), 1)$.

לכן ההרחבות $\hat{G}, \hat{G}'$ חופפות.

בכך הגדרנו היטב העתקה $\Psi\colon H^2(G,A) \to \mathcal{E}(G,A)$.

לבסוף, נראה ש־Ψ, Φ הפוכות זו לזו.

להרחבה (1) נתאים, בעזרת חתך מתאים u, קוציקלוס x, ולו נתאים הרחבה $1 \to G \to \hat{G}' \to A \to 0$.

אז נגדיר $\eta\colon \hat{G} \to \hat{G}'$ על ידי $a + u(\sigma) \mapsto (a,\sigma)$. אז η העתקה רציפה ומקיימת

$$\eta\big(a_1 + u(\sigma_1) + a_2 + u(\sigma_2)\big) = \eta\big(a_1 + u(\sigma_1) + a_2 - u(\sigma_1) + u(\sigma_1) + u(\sigma_2)\big) =$$

$$\eta\big(a_1 + \sigma_1 a_2 + x(\sigma_1,\sigma_2) + u(\sigma_1\sigma_2)\big) = (a_1 + \sigma_1 a_2 + x(\sigma_1,\sigma_2), \sigma_1\sigma_2) =$$

$$(a_1,\sigma_1) + (a_2,\sigma_2) = \eta\big(a_1 + u(\sigma_1)\big) + \eta\big(a_2 + u(\sigma_2)\big)$$

קל לראות ש־η משרה את הזהות על G כלומר, ההטלה של $\eta(a + u(\sigma))$ על הקאורדינטה השניה היא σ. היא זהות על A, אם מזהים את A נכון כתת קבוצה בתוך $\hat{G}$. כלומר, $\eta(a) = \lambda(a)$. אכן, מתוך (3) עבור $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$ נובע ש־$u(1) = x(1,1)$. לכן $\eta(a) = \eta(a - u(1) + u(1)) = (a - x(1,1), 1) = \lambda(a)$.

לכן $\Psi\circ\Phi$ היא הזהות.

להיפך, ל־$x\in Z^2(G,A)$ נתאים הרחבה (1) כמו לעיל. נגדיר חתך רציף u על ידי $\sigma\mapsto(0,\sigma)$. אז הוא מגדיר $x'\in Z^2(G,A)$ על ידי

$$(0,\sigma_1)+(0,\sigma_2)=x'(\sigma_1,\sigma_2)+(0,\sigma_1\sigma_2)$$

כלומר, $(x'(\sigma_1,\sigma_2),\sigma_1\sigma_2)=(x(\sigma_1,\sigma_2),\sigma_1\sigma_2)$. מכאן $x=x'$. לכן $\Phi\circ\Psi$ היא הזהות. ∎

הערה 123 : ההתאמה לעיל מגדירה מבנה של חבורה אבלית על $\mathcal{E}(G,A)$. איבר האפס שלה מתאים להרחבות, עבורן יש חתך u שנותן קוציקלוס האפס, כלומר, $u(\sigma_1)+u(\sigma_2)=0+u(\sigma_1\sigma_2)$, דהיינו, u הומומרפיזם. סדרה בעלת תכונה זו נקראת **מתפצלת**.

כפי שראינו בהוכחה של משפט 12.2, הרחבה כזאת היא, עד כדי איזומורפיזם, חבורה $\hat{G}$ מהצורה הבאה: כקבוצה, ואפילו כמרחב טופולוגי, זוהי המכפלה הקרטזית $A\times G$, אבל הפעולה (חיבור) בה מוגדרת כך:

$$.(a_1,\sigma_1)+(a_2,\sigma_2)=(a_1+\sigma_1 a_2,\sigma_1\sigma_2),\quad a_1,a_2\in A,\ \sigma_1,\sigma_2\in G$$

חבורה זו נקראת **המכפלה הישרה למחצה** של G עם A, ומסומנת $A\rtimes G$.

תרגיל 15.1: אם $q \geq 1$ אז $H^q(1,A)=0$.

הוכחה: $C^q(1,A)=\{f\colon 1^{q+1}\to A\}\cong A$, ו־$\partial_{q+1}\colon C^q(1,A)\to C^{q+1}(1,A)$ נתונה על ידי $\partial_{q+1}=\sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i a=\begin{cases}0 & 2\mid q\\ a & 2\nmid q\end{cases}$ לכן $\partial_{q+1}=\begin{cases}0 & 2\mid q\\ \mathrm{id}_A & 2\nmid q\end{cases}$
לכן קומפלקס הקו־שרשראות הוא

$$0\to A\xrightarrow{0}A\xrightarrow{\mathrm{id}_A}A\xrightarrow{0}A\xrightarrow{\mathrm{id}_A}\to\cdots$$

וברור שהוא מדויק. לכן חבורות ההומולוגיה שלו הן 0. ∎

הגדרה 15.2: ניפוח. תהי G חבורה פרוסופית $N\triangleleft G$ סגורה, A מודול־G. אז גם A^N מודול־G (אם $a\in A^N$, $\sigma\in G$, אז $n(\sigma a)=\sigma(n^\sigma a)=\sigma a$; N פועלת עליו טריוויאלית, לכן A^N הוא מודול־G/N. ההעתקות $G\to G/N, A\leftarrow A^N$ מתיישבות, לכן משרות הומומורפיזם $\mathrm{Inf}_G^{G/N}: H^q(G/N,A^N)\to H^q(G,A)$.
באופן מפורש, אם $x\colon (G/N)^{q+1}\to A^N$ קו־שרשרת, שמייצגת $\bar{x}\in H^q(G/N,^N A)$, אז

$$(\mathrm{Inf}\,x)(\sigma_0,\dots,\sigma_q)=x(\sigma_0N,\dots,\sigma_qN)$$

מייצג את $\mathrm{Inf}\,\bar{x}\in H^q(G,A)$,

הערה 15.3: מהתיאור המפורש של Inf מקבלים:

(א) אם $\alpha\colon A\to B$ הומומורפיזם־G, אז הוא משרה $\alpha^N\colon A^N\to B^N$ והתרשים הבא חילופי:

$$\begin{array}{ccc} H^q(G/N,A^N) & \xrightarrow{\alpha^N} & H^q(G/N,B^N)\\ \downarrow{\scriptstyle\mathrm{Inf}} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{Inf}}\\ H^q(G,A) & \xrightarrow{\alpha} & H^q(G,B)\end{array}$$

(ב) אם $0\to A\to B\to C\to 0$ סדרה מדויקת של מודולי־G ו־$0\to A^N\to B^N\to C^N\to 0$ גם מדויקת, אז התרשים הבא חילופי:

$$\begin{array}{ccc} H^q(G/N,C^N) & \xrightarrow{\partial} & H^{q+1}(G/N,A^N)\\ \downarrow{\scriptstyle\mathrm{Inf}} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{Inf}}\\ H^q(G,C) & \xrightarrow{\partial} & H^{q+1}(G,A)\end{array}$$

(ג) אם $L\triangleleft N\triangleleft G$ נורמליות ב־G, אז $\mathrm{Inf}_G^{G/N}=\mathrm{Inf}_G^{G/L}\circ\mathrm{Inf}_{G/L}^{G/N}$.

הגדרה 15.4: צמצום. תהי $S \leq G$ סגורה. כל מודול־G הוא גם מודול־S. ההעתקות המתיישבות $S \leftarrow G, \mathrm{id}_A\colon A \to A$ משרות הומומורפיזם $\mathrm{Res}^G_S\colon H^q(G,A) \to H^q(S,A)$.

באופן מפורש, אם $x\colon G^{q+1} \to A$ קו־שרשרת, שמייצגת $\bar{x} \in H^q(G,A)$, אז

$$(\mathrm{Res}^G_S x)(\sigma_0,\dots,\sigma_q) = x(\sigma_0,\dots,\sigma_q)$$

מייצג את $\mathrm{Res}^G_S \bar{x} \in H^q(G,A)$,

הצמצום הוא מורפיזם של פונקטורים קוהומולוגיים:

(א) אם $\alpha\colon A \to B$ הומומורפיזם של מודולי־G, אז התרשים הבא חילופי

$$\begin{tikzcd} H^q(G,A) \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\mathrm{Res}^G_S"] & H^q(G,B) \arrow[d, "\mathrm{Res}^G_S"] \\ H^q(S,A) \arrow[r, "\alpha''"] & H^q(S,B) \end{tikzcd}$$

בו α', α'' ההעתקות המושרות מ־α.

(ב) אם $0 \to A \to B \to C \to 0$ סדרה מדויקת של מודולי־G אז התרשים הבא חילופי:

$$\begin{tikzcd} H^q(G,C) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mathrm{Res}^G_S"] & H^{q+1}(G,A) \arrow[d, "\mathrm{Res}^G_S"] \\ H^q(S,C) \arrow[r, "\delta"] & H^{q+1}(S,A) \end{tikzcd}$$

(ג) מתקיים גם: אם $H \leq S \leq G$ תת חבורות סגורות של G, אז $\mathrm{Res}^G_H = \mathrm{Res}^S_H \circ \mathrm{Res}^G_S$. כדי להוכיח טענה זו נחוץ גם לדעת הלמה הבאה, אותה לא נוכיח כאן:

למה 15.5: *הפונקטור $H(S,-)$ על הקטגוריה של מודולי־G הוא מחיק על ידי האינייקטיביים.*

הגדרה 15.6: קו־צמצום. תהי $G \leq S$ פתוחה ויהי A מודול־G. נכתוב את G כאיחוד זר של הקוסטים של S, $G = \dot\bigcup_{i=1}^n \sigma_i S$, ונגדיר העתקה $N = N_{G/S}\colon H^0(S,A) = A^S \to H^0(G,A) = A^G$ על ידי $N(a) = \sum_{i=1}^n \sigma_i a$.

ההגדרה טובה: (א) היא אינה תלויה בבחירת הנציגים σ_i של הקוסטים: אם $\sigma'_i = \sigma_i\sigma$, באשר $\sigma \in S$, אז $\sigma a = a$ ולכן $\sigma'_i a = \sigma_i a$.

(ב) $N(a) \in A^G$: אם $\tau \in G$ אז $G = \tau(G) = \dot\bigcup_{i=1}^n \tau\sigma_i S$, לכן, לפי האמור לעיל, $\tau N(a) = \sum_{i=1}^n \tau\sigma_i a = N(a)$.

קל לראות ש־N הוא מורפיזם של פונקטורים $H^0(S,-) \to H^0(G,-)$. כיוון ש־$H(S,-), H(G,-)$ פונקטורים קוהומולוגיים, שניהם מחיקים על ידיד אינייקטיבים (ראה למה 15.5), N ניתן להרחבה למורפיזם יחיד $\mathrm{Cor}^S_G : H(S,-) \to H(G,-)$ שנקרא **קו־צמצום**.

טענה 15.7: *אם* $H \le S \le G$ *תת חבורות פתוחות של* G*, אז* $\mathrm{Cor}_G^H = \mathrm{Cor}_G^S \circ \mathrm{Cor}_S^H$.

הוכחה: די לבדוק זאת במימד 0. כלומר, צריך להוכיח שההרכבה $A^H \overset{N_{S/H}}{\longrightarrow} A^S \overset{N_{G/S}}{\longrightarrow} A^G$ היא ההעתקה $A^H \overset{N_{G/H}}{\longrightarrow} A^G$. ואכן, נניח $G = \dot\bigcup_i \sigma_i S$ ו־$S = \dot\bigcup_j \tau_j H$, אז $G = \dot\bigcup_{i,j} \sigma_i\tau_j H$. לכן

$$N_{G/S} \circ N_{S/H}(a) = \sum_i \big(\sum_j \tau_j a\big) = \sum_i \sum_j (\sigma_i\tau_j)a = N_{G/H}(a).$$

■

משפט 15.8: $\mathrm{Cor}_G^S \circ \mathrm{Res}_S^G = (G:S)\cdot \mathrm{id}$.

הוכחה: די לבדוק זאת במימד 0.

יהי $a \in A^G$. אז $\mathrm{Res}_S^G(a) = a$, לכן $\mathrm{Cor}_G^S(a) = \sum_{\sigma\in G/S} \sigma a = \sum_{\sigma\in G/S} a = (G:S)a$.

■

מסקנה 15.9: *יהי* $q \ge 1$*. אז* $H^q(G,A)$ *היא חבורת פיתול, כלומר, כל* $c \in H^q(G,A)$ *מסדר סופי, ומתקיים* $\mathrm{ord}\, c \mid \#G$.

הוכחה: $H^q(G,A) = \varinjlim_{U\in\mathcal{N}(G)} H^q(G/U, A^U)$. לכן בלי הגבלת הכלליות G סופית.

לפי תרגיל 15.1 לכל $c \in H^q(G,A)$ מתקיים $\mathrm{Cor}_G^1(0) = 0$, ולכן

$$\#G\cdot c = (G:1)c = \mathrm{Cor}_G^1\big(\mathrm{Res}_1^G(c)\big) = \mathrm{Cor}_G^1(0) = 0,$$

ובפרט c מסדר סופי. ■

הערה 15.10: אם H חבורת פיתול אבלית, אז $H = \bigoplus_{p\ \text{ראשוני}} H(p)$, באשר

$$H(p) = \{h \in H \mid \text{חזקה של } p\ \mathrm{ord}\, p\}.$$

עבור H סופית זה נובע ממשפטי סילוב, כי ב־H תת חבורת סילוב־p יחידה. מכאן קל להרחבי זאת ל־H כלשהי, כיא היא איחוד (גבול ישר) של חבורות סופיות. ■

מסקנה 15.11: *תהי* S *תת חבורה סגורה של חבורה* G *פרוסופית, והיה* A *מודול־*G*. יהי* p *ראשוני* $p \nmid (G:N)$*, ויהי* $q \ge 1$*. אז*

(א) $\mathrm{Res}_S^G\colon H^q(G,A)(p) \to H^q(S,A)(p)$ *היא חד חד ערכית.*

(ב) *אם* S *פתוחה, אז* $\mathrm{Cor}_G^S : H^q(S,A)(p) \to H^q(G,A)(p)$ *היא על.*

הוכחה: (א) $S = \bigcap_{\substack{V \text{ פתוחה} \\ S\le V\le G}} V = \varinjlim_V V$ לכן $H^q(G,A) = \varinjlim_V H^q(V,A)$ ביחס למערכת הישרה, בה ההעתקות מקיימות תרשימים חילופיים כגון זה:

$$\begin{tikzcd}
H^q(V,A) \arrow[rr, "\mathrm{Res}^V_S"] & & H^q(S,A) \\
& H^q(G,A) \arrow[ul, "\mathrm{Res}^G_V"] \arrow[ur, "\mathrm{Res}^G_S"'] &
\end{tikzcd}$$

יהי $c \in H^q(G,A)$ כך ש־$\mathrm{Res}^G_S(c) = 0$. אז, לפי התכונות של גבול ישר, יש V כך ש־$\mathrm{Res}^G_V(c) = 0$. אבל $c \cdot (G:V) = \mathrm{Cor}^V_G \circ \mathrm{Res}^G_V(c) = 0$. אבך $(G:V)$ זר ל־p, לכן אם $\mathrm{ord}\, c$ חזקה של p אז $c = 0$.

(ב) $\mathrm{Cor}^S_G \circ \mathrm{Res}^G_S\colon H^q(G,A)(p) \to H^q(G,A)(p)$ הוא הכפלה ב־$(G:S)$ זר ל־p, לכן זהו אוטומורפיזם של $H^q(G,A)(p)$. בפרט Cor^S_G היא על. ∎

מסקנה 15.12: *תהי G_p חבורת סילוב־p של G, ויהי $q \ge 1$. אז*

(א) $\mathrm{Res}^G_{G_p}\colon H^q(G,A)(p) \to H^q(G_p,A)$ *היא חד חד ערכית.*

(ב) *אם G_p פתוחה, אז $\mathrm{Cor}^{G_p}_G : H^q(G_p,A)(p) \to H^q(G,A)(p)$ היא על.*

הוכחה: לפי המסקנה הקודמת, כי $p \nmid (G:G_p)$. רק נשים לב שלפי מסקנה 15.9, $H^q(G_p,A)(p) = H^q(G_p,A)$. ∎

מסקנה 15.15: *יהי $q \ge 1$. אם $H^q(G,A)(p) = 0$ לכל ראשוני p, אז $H^q(G,A) = 0$.*

הוכחה: לפי המסקנה הקודמת $H^q(G,A)(p) = 0$ לכל ראשוני p. לכן, לפי הערה 15.10, $H^q(G,A) = 0$.

∎

16. מודולים מושרים

תהיינה $S \le G$ חבורות פרוסופיות, A מודול־S (דיסקרטי, כמו תמיד).

הערה 16.1: העתקה $f\colon G \to A$ היא רציפה אם ורק אם היא קבועה מקומית, כלומר, לכל $\rho \in G$ יש סביבה פתוחה, עליה f קבועה. סביבה זו היא מהצורה $\rho U_\rho = \rho U_\rho$, באשר $U_\rho \in \mathcal{N}(G)$. כיוון ש־ $G = \bigcup_{\rho \in G} \rho U_\rho$, בגלל הקומפטקיות של G יש $\rho_1, \ldots, \rho_n \in G$ כך ש־ $G = \bigcup_{\rho \in G} \rho_i U_{\rho_i}$. ניקח $U = \bigcap_i U_{\rho_i}$ אז $U \in \mathcal{N}(G)$ ו־f קבועה על $\rho U = U\rho$ לכל $\rho \in G$. בפרט $f(G)$ קבוצה סופית. ∎

הגדרה 16.1: **המודול המושרה מ־**A היא החבורה האבלית

$$M := M_G^S(A) = \{f\colon G \to A|\ f \text{ רציפה},\ f(\sigma\rho) = \sigma f(\rho), \sigma \in S, \rho \in G\},$$

עם הפעולה הבאה של G עליה

$$(\tau f)(\rho) = f(\rho\tau), \qquad \rho, \tau \in G.$$

(זוהי אכן פעולה: מתקיים $\tau_1(\tau_2 f) = (\tau_1\tau_2)f$ והמייצב U_f של כל $f \in M$ הוא פתוח, כי לפי הערה 16.1 יש $U \in \mathcal{N}(G)$ כך ש־ $\tau f = f$ לכל $\tau \in U$, כלומר, $U \le U_f$.)

M_G^S הוא פונקטור אדיטיבי: אם $\alpha\colon A \to B$ מורפיזם מודולי־S אז $\alpha_* = M_G^S(\alpha)\colon M_G^S(A) \to M_G^S(B)$ מוגדר על ידי $f \mapsto \alpha \circ f$.

למה 16.3: *M_G^S פונקטור מדויק.*

הוכחה: תהי $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ סדרה מדויקת של מודולי־S. צריך להוכיח ש־$M(A) \xrightarrow{\alpha_*} M(B) \xrightarrow{\beta_*} M(C)$ סדרה מדויקת של מודולי־G.

לכל $f \in M(A)$ מתקיים $\beta \circ \alpha \circ f = 0$, לכן $\operatorname{Im}\alpha_* \le \operatorname{Ker}\beta_*$.

להיפך, תהי $f \in M(B)$ כך ש־$\beta_*(f) = \beta \circ f = 0$. נמצא $h \in M(A)$ כך ש־ $\alpha_*(h) = \alpha \circ h = f$.

יהי $b \mapsto \hat{b}$ חתך(של קבוצות) של ההעתקה $\alpha\colon A \to \operatorname{Im}(\alpha)$.

כיוון ש־$f\colon G \to B$ רציפה, $\operatorname{Im}(f)$ קבוצה סופית. לכל $b \in \operatorname{Im}(f)$, $V_b = \{\sigma \in S|\ \sigma(\hat{b}) = \hat{b}\} \le S$ פתוחה ב־S, לכן $\bigcap_b V_b \le S$ פתוחה. לכן יש $U_1 \lhd G$ פתוחה כך ש־$U_1 \cap S \le \bigcap_b V_b$.

מצד שני, f רציפה, לכן יש $U_2 \lhd G$ פתוחה כך ש־ $f(\tau U_2) = f(\tau)$ לכל $\tau \in G$.

אז $U = U_1 \cap U_2 \lhd G$ פתוחה. לכן $SU \le G$ פתוחה. תהי $G = \dot{\bigcup}_{i=1}^k SU\tau_i$ ההצגה של G כאיחוד זר של הקוסטים שלה. נגדיר $h\colon G \to A$ על ידי $h(\sigma u\tau_i) = \sigma\widehat{f(\tau_i)}$, באשר $\sigma \in S,\ u \in U$. אז

h מוגדרת היטב: אם $\sigma u\tau_i = \sigma' u'\tau_i$ אז $\sigma u = \sigma' u'$ ולכן $\sigma b = \sigma' b$ לכל $b \in \operatorname{Im} f$, ובפרט $\sigma\widehat{f(\tau_i)} = \sigma'\widehat{f(\tau_i)}$.

h רציפה: אם $u' \in U$ אז $h(u'\sigma u\tau_i) = h(\sigma(u')^\sigma u\tau_i) = h(\sigma u\tau_i)$.

$h \in M(A)$: $h(s\sigma u\tau_i) = s\sigma\widehat{f(\tau_i)} = sh(\sigma u\tau_i)$ לכל $s \in S$.

$\alpha \circ h = f$: מצד אחר $(\alpha \circ h)(\sigma u \tau_i) = \alpha(\sigma \widehat{f(\tau_i)}) = \sigma\alpha(\widehat{f(\tau_i)}) = \sigma f(\tau_i)$ ומצד שני $f(\sigma u \tau_i) = f(\sigma \tau_i u^{\tau_i}) = f(\sigma \tau_i) = \sigma f(\tau_i)$, כי $u^{\tau_i} \in U_2$. ∎

למה 16.4: *נגדיר* $\pi\colon M_G^S(A) \to A$ *על ידי* $f \mapsto f(1)$. *אז* π *הומומורפיזם מודולי־*S *ומקיימת: אם* $\varphi\colon B \to A$ *הומומורפיזם־*S*, אז יש הומומורפיזם־*G *יחיד* $\hat{\varphi}\colon B \to M(A)$ *כך שהתרשים הבא חילופי*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\hat{\varphi}"] \arrow[dr, "\varphi"] & M(A) \arrow[d, "\pi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

הוכחה: לכל $\sigma \in S$ מתקיים $\pi(\sigma f) = (\sigma f)(1) = f(\sigma) = \sigma f(1) = \sigma\pi(f)$.

אם $\hat{\varphi}$ כנ"ל, אז לכל $\rho \in G$

$$(\hat{\varphi}b)(\rho) = \big(\rho(\hat{\varphi}b)\big)(1) = \hat{\varphi}(\rho b)(1) = \varphi(\rho b)$$

ומכאן היחידות.

קיום: נגדיר, כמובן, $(\hat{\varphi}b)(\rho) = \varphi(\rho b)$. אז לכל $u \in U_b$ (המייצב של b) מתקיים $(\hat{\varphi}b)(\rho u) = \varphi(\rho u b) = \varphi(\rho b) = (\hat{\varphi}b)(\rho)$, לכן $\hat{\varphi}b$ רציפה, ולכל $\sigma \in S$ מתקיים

$$(\hat{\varphi}b)(\sigma\rho) = \varphi(\sigma\rho b) = \sigma\varphi(\rho b) = \sigma\big((\hat{\varphi}b)(\rho)\big)$$

לכן $\hat{\varphi}b \in M(A)$. ברור ש־$\varphi = \pi \circ \hat{\varphi}$. לבסוף $\big(\tau\hat{\varphi}(b)\big)(\rho) = \big(\hat{\varphi}(b)\big)(\rho\tau) = \varphi(\rho\tau b) = \big(\hat{\varphi}(\tau b)\big)\rho$, לכל $\rho, \tau \in G$, לכן $\hat{\varphi}(\tau b) = \tau\hat{\varphi}(b)$, כלומר $\hat{\varphi}$ הומומרפיזם של מודולי־G. ∎

מסקנה 16.5: *אם* Q *מודול־*S *אינייקטיבי אז* $M(Q)$ *מודול־*G *אינייקטיבי.*

הוכחה: בתרשים

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\psi"'] & B \arrow[d, dashed, "\varphi"] \arrow[dl, dashed, "\hat{\varphi}"] \\ & M(Q) \arrow[r, "\pi"'] & Q \end{tikzcd}$$

של מודולי־G צריך למצוא $\hat{\varphi}$ כך ש־$\psi = \hat{\varphi} \circ \alpha$.

בגלל ש־Q אינייקטיבי־S, יש הומומורפיזם־S φ כך שהריבוע חילופי. לפי למה 16.4 יש $\hat{\varphi}$ כך ש־$\varphi = \pi \circ \hat{\varphi}$.

מכאן $\pi \circ \psi = \varphi \circ \alpha = \pi \circ \hat{\varphi} \circ \alpha$. בגלל היחידות בלמה $\hat{\varphi} \circ \alpha = \psi$. ∎

משפט 16.6 (הלמה של Shapiro): *יש איזומורפיזם טבעי* $H^q(G, M_G^S((A)) \cong H^q(S,A)$.

הוכחה: $H^q(S,-)$, $H^q(G,M_G^S((-))$ הם פונקטורים קוהומולוגיים (לגבי האחרון צריך להשתמש בלמה 16.3) על מודולי־S. שניהם מחיקים על ידי מודולי־S אינייקטיביים (לגבי האחרון צריך להשתמש בטענה 16.5) לכן די להראות איזומורפיזם של פונקטורים $H^0(S,-) \to H^0(G,M_G^S((-))$, כלומר, $A^S \to M_G^S(A)^G$. אבל $M_G^S(A)^G$ הוא קבוצת ההעתקות הקבועות $f\colon G \to A$ שתמונותיהן נשמרות על ידי S, כלומר, $f \mapsto f(1)$ הוא איזומורפיזם של חבורות אבליות. הזה טבעי: אם $\alpha\colon A \to B$ הומומורפיזם של מודולי־S אז

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] & B \\
M_G^S(A) \arrow[u] \arrow[r, "\alpha_*"] & M_G^S(B) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

חילופי. ∎

מסקנה 16.7: $H^q\big(G, M^1G(A)\big) = 0$ לכל $q \geq 1$.

הוכחה: לפי ?, $H^q(1,A) = 0$ לכל $q \geq 1$. ∎

]]

תרגיל 16.7: *נניח כי G סופית, תהי $S \leq G$. יהי A מודול־S.*

(א) *יש הומומורפיזם מודולי S $\lambda_A\colon A \to M_G^S(A)$ הנתון על ידי* $\big(\lambda_A(a)\big)(\rho) = \begin{cases} \rho a & \rho \in S \\ 0 & \rho \notin S \end{cases}$.

(ב) *אם A מודול־G, אז יש הומומורפיזם מודולי־G $\psi_A\colon M_G^S(A) \to A$ הנתון על ידי* $\psi_A(f) = \sum_{i=1}^k \tau_i^{-1} f(\tau_i)$, באשר $G = \dot\bigcup_{i=1}^k S\tau_i$.

(ג) *אם A מודול־G, אז* $\psi_A \circ \lambda_A = \mathrm{id}_A$.

הוכחה: ∎

מסקנה 16.8: *נניח כי G סופית, תהי $S \leq G$. אם Q מודול־G אינייקטיבי אז Q מודול־S אינייקטיבי.*

הוכחה:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d] \arrow[dr, "\lambda_A"] & & B \arrow[dr, "\lambda_B"] & \\
& Q \arrow[dr, "\lambda_Q"] \arrow[ddr, equal] & M(A) \arrow[rr, "M(\alpha)"] \arrow[d, "M(\varphi)"] & & M(B) \\
& & M(Q) \arrow[d, "\psi_Q"] & & \\
& & Q & &
\end{tikzcd}$$

■

[[

17. מימד קוהומולוגי

תהי G חבורה פרוסופית.

תרגיל 17.1: *יהי A מודול־G נוצר סופית, כלומר, יש $a_1,\dots,a_n \in A$ כך שהתת מודול־G הקטן ביותר של A אשר מכיל את $a_1,\dots,a_n$ הוא A. אז*

(א) *A נוצר סופית כחבורה אבלית, כלומר, יש $b_1,\dots,b_m \in A$, כך שהתת חבורה הקטנה ביותר של A אשר מכילה את $b_1,\dots,b_m$, היא A.*

(ב) *אם A הוא גם מודול פיתול (כל איבר בו הוא מסדר סופי) אז הוא סופי.*

פתרון: (א) לפי ההנחה כל איבר של A הוא סכום של איברים מהצורה $\pm\sigma a_i$, באשר $\sigma \in G$ ו־$1 \le i \le n$.

המייצב U_i של a_i הוא תת חבורה פתוחה של G. יהי $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$, אז U תת חבורה פתוחה של G ומקיימת $ua_i = a_i$ לכל $u \in U$ ולכל $1 \le i \le n$. אפשר לכתוב $G = \dot\bigcup_{j=1}^r \sigma_j U$. אם $\sigma \in G$ אז יש j כך ש־$\sigma \in \sigma_j U$ ואז $\sigma a_i = \sigma_j a_i$. לכן כל איבר של A הוא סכום של איברים מהצורה $\pm\sigma_j a_i$, באשר $1 \le j \le r$ $1 \le i \le n$. לכן A נוצר סופית כחבורה אבלית.

(ב) כידוע, חבורת פיתול אבלית נוצרת סופית היא סופית. ∎

עבור מדול־G נכתוב $A \in \mathrm{Mod}_t(G)$ אם A הוא מודול־G שהינו מודול פיחול.

הגדרה 17.2: יהי p ראשוני. **מימד־p הקוהומולוגי** $\mathrm{cd}_p(G)$ **של** G **והמימד־p הקוהומולוגי** $\mathrm{cd}(G)$ **של** G הם

$$\mathrm{cd}(G) = \min\big(n \big|, q > n \text{ לכל } A \in \mathrm{Mod}_t(G) \text{ לכל } H^q(G,A) = 0\big)$$

$$\mathrm{cd}_p(G) = \min\big(n \big|, q > n \text{ לכל } A \in \mathrm{Mod}_t(G) \text{ לכל } H^q(G,A) = 0\big)$$

אם המנימום הבכדרה אינו הקיים אז המימד המתאים הוא ∞. ∎

נשים לב שמתקיים $\mathrm{cd}(G), \mathrm{cd}_p(G) \ge 0$, כי עבור $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ עם הפעולה הטריביאלית מתקיים $H^0(G,A) \cong A^G = A \ne 0$.

תרגיל 17.3: $\mathrm{cd}(G) = \sup_p \mathrm{cd}_p(G)$.

תרגיל 17.4: *יהי A מודול־G.*

(א) *ההעתקה $i\colon A \to M_G^1(A)$ הנתונה על ידי $i(a)(\rho) = \rho a$ היא שיכון של מודולי־G.*

(ב) *תהי H תת חבורה פתוחה של G ונניח $G = \dot\bigcup_{i=1}^n H\sigma_i$. אז ההעתקה $\pi\colon M_G^H(A) \to A$ הנתונה על ידי $\pi(f) = \sum_{i=1}^n \sigma^{-1} f(\sigma_i)$ היא אפימורפיזם של מודולי־G (וההגדרה אינה תלויה בבחירת המייצגים σ_i).*

מודול־G A נקרא **פרימרי־p** אם כל איבר בו הוא מסדר סופי שהינו חזקה של p. מודול־G A נקרא **פשוט** אם אין לו תת מודול־G מלבד A, $\{0\}$.

טענה 17.5: *התנאים הבאים שקולים זה לזה:*

(א) $\mathrm{cd}_p(G) \le n$.

(ב) $H^q(G,A)=0$ *לכל* $q>n$ *ולכל מודול־*G A *פרימרי־*p.

(ג) $H^{n+1}(G,A)=0$ *לכל מודול־*G A *פרימרי־*p *סופי.*

(ד) $H^{n+1}(G,A)=0$ *לכל מודול־*G A *פרימרי־*p *פשוט.*

הוכחה: (א) $\Leftarrow$(ב) $\Leftarrow$(ג): ברור. גם (ג)$\Leftarrow$(ד) ברור, כי כל מודול פיתול פשוט A הוא בהכרח סופי: אכן, $A\ne 0$, הוא מכיל תת מודול נוצר סופית (למשל, על ידי איבר אחד שונה מאפס) לכן a נוצר סופית, ולפית תרגיל 17.1 הוא סופי.

(ג)$\Leftarrow$(ב): יהי A מודול־G פרימרי־p. נוכיח באינדוקציה על q כי $H^q(G,A)$ לכל $q>n$.

מתקיים $A=\varinjlim_i A_i$ גבול ישר של מודלי־G נוצרים סופית -ולכן סופיים-, שהינם פרימריי־p. לכן, $H^{n+1}(G,A)=\varinjlim_i H^{n+1}(G,A_i)=\varinjlim_i 0=0$. יהי $q>n+1$. יהי $i\colon A\to M^1_G(A)$ שיכון של מודולי־G כמו בתרגיל 17.3. יהי $C=M^1_G(A)/i(A)$. אז גם C פרימרי־p. הסדרה המדויקת

$$0\to A\xrightarrow{\ i\ } M^1_G(A)\longrightarrow C\to 0$$

נותנת סדרה מדויקת ארוכה

$$\cdots\to H^{q-1}\big(G,M^1_G(A)\big)\longrightarrow H^{q-1}\big(C\big)\xrightarrow{\ \delta\ } H^q\big(A\big)\longrightarrow H^q\big(G,M^1_G(A)\big)\to\cdots$$

כיוון ש־$q,q-1>0$, מתקיים $H^{q-1}\big(G,M^1_G(A)\big)=0$, $H^q\big(G,M^1_G(A)\big)=0$, ולכן $H^q(G,A)\cong H^{q-1}(G,C)$. לפי הנחת האינדוקציה $H^{q-1}(G,C)=0$, לכן $H^q(G,A)=0$.

(ד)$\Leftarrow$(ג): באינדוקציה על $\#A$. אם $A=0$ או אם A פשוט, טענה (ב) ברורה. אם A אינו כזה, אז יש לו תת מודול מרבי A_1 שונה מ־A. אז A/A_1 פשוט. הסדרה המדויקת $0\to A_1\to A\to A/A_1\to 0$ נותנת סדרה מדויקת ארוכה

$$\cdots\to H^{n+1}(G,A_1)\longrightarrow H^{n+1}(G,A)\longrightarrow H^{n+1}(G,A/A_1)$$

בה הגורם הראשון הוא 0 לפי (ד) והגורם האחרון הוא 0 לפי הנחת האינדוקציה (כי $\#A<\#A/A_1$). לכן $H^{n+1}(G,A)=0$. ∎

משפט 17.6: *תהי* H *תת חבורה סגורה של* G*, אז* $\mathrm{cd}(H)\le\mathrm{cd}(G)$*. יתר על כן: אם (א)* $p\nmid(G:H)$ *או (ב)* H *פתוחה ו־*$cd(G)<\infty$*, אז יש שוויון.*

הוכחה: יהי $A\in\mathrm{Mod}(t(H)$ ויהי $q>n:=\mathrm{cd}_p(G)$. לפי הלמה של שפירו(משפט 16.6), $H^q(H,A)(p)\cong H^q(G,M^H_G(A))(p)$. לפי טענה 17.5 אגף ימין הוא 0. לכן אגף שמאל הוא 0. שוב לפי טענה 17.5, $\mathrm{cd}(H)_p\le\mathrm{cd}(G)_p$.

(א) בלי הגבלת הכלליות $n := \mathrm{cd}_p(H) < \infty$ (אחרת אין מה להוכיח). יהי $A \in \mathrm{Mod}(t(H)$. ויהי $q > n$. הצמצום $\mathrm{Res}\colon H^q(G,A)(p) \to H^q(H,A)(p)$ הוא חד־חד־ערכי (מסקנה 15.11(א)). לכן אם צד ימין הוא 0, גם צד שמאל הוא 0. לפי טענה 17.5, $\mathrm{cd}(H)_p \geq \mathrm{cd}(G)_p$. יחד עם הפסקה הקודמת זה נותן שוויון.

(ב) יהי $n := \mathrm{cd}_p(G) < \infty$. אז יש $A \in \mathrm{Mod}_t(G)$ כך ש־$H^n(G,A)(p) \neq 0$. נראה ש־$H^n(H,A)(p) \neq 0$: יש סדרה מדויקת קצרה $0 \to A_1 \to M_G^H(A) \xrightarrow{\pi} A \to 0$, עם π כמו ב 17.4(ב). שנותנת סדרה ארוכה מדויקת

$$H^n\big(G, M_G^H(A)(p)\big) \xrightarrow{\pi_*} H^n\big(G,A\big)(p) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}\big(G_1\big)(p)$$

הגורם הימני הוא 0, לכן π_* על. לכן $H^n\big(G,A\big)(p) = H^n\big(G, M_G^H(A)\big(p\big) \neq 0$ ∎

מסקנה 17.7: $\mathrm{cd}_p(G) = \mathrm{cd}(p(G_p) = \mathrm{cd}(G_p)$.

הוכחה: השוויון השמאלי נובע ממשפט 17.6(א) לעל. השוויון הימני נובע, בגלל שעבור חבורת־p G_p מתקיים $H^q(G_p,A)(p) = H^q(G_p,A)$. ∎

מסקנה 17.7: $\mathrm{cd}_p(G) = 0 \Leftrightarrow p \nmid \#G$.

הוכחה: צריך להוכיח: $\mathrm{cd}_p(G_p) = 0 \Leftrightarrow G_p = 1$.

$\Rightarrow$: $H^q(1,A) = 0$ עבור $q \geq 1$.

$\Leftarrow$: נניח $G_p \neq 1$. אז, עבור $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ כמודול־G_p טריביאלי, $H^1(G,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(G_p,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \neq 0$, כי יש $U \lhd G_p$ פתוחה כך ש־$(G_p : U) = p$, ולכן ישי הומומורפיזם $G_p \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (בעל גרעין U) לא טריביאלי.
∎

מסקנה 17.8: *אם G סופית, $p \nmid \#G$ אז* $\mathrm{cd}_p(G) = \infty$.

הוכחה: נניח $\mathrm{cd}(G) < \infty$. כיוון ש־$1 \leq G$ פתוחה, $\mathrm{cd}_p(G) = \mathrm{cd}_p(1) = 0$, לכן $p \nmid \#G$, סתירה. ∎

משפט 17.9: *תהי $G \lhd N$ סגורה. אז $\mathrm{cd}_p(G) \leq \mathrm{cd}_p(N) + \mathrm{cd}_p(G/N)$. נניח $\mathrm{cd}_p(N), \mathrm{cd}_p(G/N) < \infty$ וגם*

(א) *N פרו־p ו־$H^n(N,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ סופית;* או

(ב) $N \leq Z(G)$.

אז יש שוויון

הוכחה: לא תינתן. ∎