משפטים למבחן

בבוחן האמצע ובמבחנים הסופיים תינתנה שאלות של הוכחת משפטים מתוך הרשימה להלן

משפט 1.11: *תחום שלמות סופי F הוא שדה.*

משפט 1.14:

(א) *אם n ראשוני אז $\mathbb{Z}_n$ הוא תחום שלמות ואפילו שדה.*

(ב) *אם n אינו ראשוני אז $\mathbb{Z}_n$ אינו תחום שלמות.*

משפט 2.22: *כל מטריצה שקולת שורות למטריצה מדורגת קנונית (בלי היחידות).*

משפט 2.23: *אם A, B מדורגות קנונית ושקולות שורות (כלומר ניתן להגיע על ידי סדרה של פעולות אלמנטריות מ־A ל־B, אז $A = B$.*

מסקנה 2.28: *תהי A מטריצת המקדמים המורחבת של מערכת משוואות לינאריות ב־n נעלמים ותהי A' מטריצת המקדמים המצומצמת שלה. אז $\mathrm{rk}(A') = \mathrm{rk}(A)$ או $\mathrm{rk}(A') = \mathrm{rk}(A) - 1$. כמו כן*

(א) *אם $\mathrm{rk}(A') < \mathrm{rk}(A)$ (כלומר $\mathrm{rk}(A') = \mathrm{rk}(A) - 1$) אז אין פתרון למערכת.*

(ב) *אם $\mathrm{rk}(A') = \mathrm{rk}(A) = r$, יש פתרון (ואנחנו יכולים לרשום את קבוצת הפתרון כתלויה ב־$(n - r)$ פרמטרים). בפרט*

(ג) *יש פתרון יחיד אם ורק אם $\mathrm{rk}(A') = \mathrm{rk}(A) = n$.*

משפט 3.9: *(1) כפל המטריצות הוא אסיציאטיבי.*

משפט 3.19: *תהי $P \in \mathrm{M}_m(F)$, ותהי P' המטריצה המדורגת קנונית שלה. התנאים הבאים שקולים זה לזה:*

(1) *P הפיכה;*

(2) *$\mathrm{rk}(P) = m$;*

(3) *$P' = I_m$;*

(4) *P מכפלה של מטריצות אלמנטריות.*

מסקנה 3.22: *תהיינה $B \in \mathrm{M}_{p\times n}(F)$, $A \in \mathrm{M}_{m\times p}(F)$.*

(א) *$\mathrm{rk}(AB) \leq \mathrm{rk}(A)$.*

(ב) *אם B הפיכה אז $\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(A)$.*

משפט 3.28: *תהי $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$. אז $\mathrm{rk}(A^t) = \mathrm{rk}(A)$.*

משפט 4.12: *יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ויהיו $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$. נסמן $S = \mathrm{Sp}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. אז S הוא התת־מרחב הקטן ביותר שמכיל את $v_1, v_2, \ldots, v_k$. כלומר,*

(א) *S הוא תת־מרחב של V;*

(ב) $v_1, v_2, \ldots, v_k \in S$;

(ג) אם U תת־מרחב של V ו־ $v_1, v_2, \ldots, v_k \in U$ אז $S \subseteq U$.

משפט 4.23: *תהיינה $A, B \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$. תהיינה $A', B' \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ המטריצות המדורגות קנונית שלהן, בהתאמה. אז $R(A) = R(B)$ אם ורק אם $A' = B'$.*

משפט 4.28: *יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. סדרה $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ תלויה לינארית אם ורק אם יש $1 \leq i \leq n$ כך ש־ $v_i \in \mathrm{Sp}(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1})$.* (עבור $i = 1$ תנאי זה אומר $v_1 \in \mathrm{Sp}(\emptyset) = \{0\}$, כלומר, $v_1 = 0$.)

משפט 4.32 (משפט ההחלפה): *יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. תהי $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ סדרת יוצרים של V, ותהי $w_1, w_2, \ldots, w_m \in V$ סדרה בלתי תלויה לינארית. אז $m \leq n$ וניתן להחליף m איברים מתוך $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ב־ $w_1, w_2, \ldots, w_m$ כך שהסדרה המתקבלת (בת n איברים) היא סדרת יוצרים של V.*