



School of Mathematical Sciences **בית הספר למדעי המתמטיקה**
 The Raymond and Beverly Sackler **הפקולטה למדעים מדויקים**
 Faculty of Exact Sciences **ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר**
 Tel Aviv University **אוניברסיטת תל אביב**

0366.1111.08

מבחן באלגברה לינארית א1

כ' בסיון, תשע"ט
 23 ביוני 2019

לתלמידי דן הרן
 מועד א'

משך המבחן: 3 שעות.
 אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.
 ענו על ארבע (בלבד) מתוך שש השאלות הבאות. (כל השאלות הן שוות ערך).
 שתי השאלות הראשונות הן משפטים שהיו בהרצאה.

שאלה 1: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F . תהי $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ סדרת יוצרים של V , ותהי $w_1, w_2, \dots, w_m \in V$ סדרה בלתי תלויה לינארית. הוכיחו: $m \leq n$ וניתן להחליף m אברים מתוך $v_1, v_2, \dots, v_n$ ב- $w_1, w_2, \dots, w_m$ כך שהסדרה המתקבלת (בת n אברים) היא סדרת יוצרים של V .

שאלה 2: תהי $AX = b$ מערכת של n משוואות לינאריות ב- n נעלמים מעל שדה F . נניח $|A| \neq 0$. הוכיחו: למערכת פתרון יחיד $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^t$ הנתון על ידי הנוסחה $c_i = \frac{|A_i|}{|A|}$ באשר $A_i \in M_n(F)$ מתקבלת מ- A על ידי החלפת העמודה ה- i של A בעמודה b .

שאלה 3: תהינה $U \xrightarrow{S} V \xrightarrow{T} W$ העתקות לינאריות של מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F . הוכיחו: $T \circ S$ חד חד ערכית אם ורק אם S חד חד ערכית ו- $\text{Im } S \cap \text{Ker } T = \{0\}$.

פתרון: (א) נניח ש- $T \circ S$ חד חד ערכית. אז $\text{Ker}(T \circ S) = \{0\}$.
 נראה ש- $\text{Ker } S = \{0\}$ ולכן S חד חד ערכית: יהי $u \in \text{Ker } S$. אז $(T \circ S)(u) = T(S(u)) = T(0) = 0$ ולכן $u \in \text{Ker}(T \circ S) = \{0\}$, כלומר, $u = 0$.
 נראה ש- $\text{Im } S \cap \text{Ker } T = \{0\}$. יהי $v \in \text{Im } S \cap \text{Ker } T$. אז $T(v) = 0$ ויש $u \in U$ כך ש- $S(u) = v$.
 לכן $(T \circ S)(u) = T(v) = 0$, כלומר, $u \in \text{Ker}(T \circ S)$ ולכן $u = 0$. מכאן $v = S(u) = 0$.
 להיפך, נניח ש- S חד חד ערכית ו- $\text{Im } S \cap \text{Ker } T = \{0\}$. נראה ש- $\text{Ker}(T \circ S) = \{0\}$ ולכן $T \circ S$ חד חד ערכית: יהי $u \in \text{Ker}(T \circ S)$. אז $T(S(u)) = 0$, לכן $S(u) \in \text{Ker } T \cap \text{Im } S$, ומכאן $S(u) = 0$. כיוון ש- S חד חד ערכית, $u = 0$. ■

שאלה 4: יהי F שדה סופי בן q איברים. כמה איזומורפיזמים $F^4 \rightarrow F^4$ יש? יש לנמק את התשובה.

פתרון: יהי $\mathcal{B}$ בסיס כלשהו של F^4 . ישנה התאמה חד-חד ערכית ועל (למעשה, איזומורפיזם) בין $L(F^4, F^4)$ לבין $M_4(F)$ הנתונה על ידי $T \mapsto [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$. היא מקיימת: T איזומורפיזם אם ורק אם $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ מטריצה הפיכה. לכן מספר האיזומורפיזמים $T: F^4 \rightarrow F^4$ שווה למספר המטריצות ההפיכות ב- $M_4(F)$. מטריצה $A \in M_4(F)$ הפיכה אם ורק אם ארבע שורותיה v_1, v_2, v_3, v_4 בלתי תלויות לינארית, כלומר, אף אחת אינה צירוף לינארי של קודמותיה.

השורות של A הן רביעיות של אברי F , וקיימות q^4 רביעיות כאלה. אז

$$(1) \quad \text{השורה הראשונה } v_1 \text{ איננה צירוף לינארי של קודמותיה}$$

אם ורק אם היא שונה מאפס. קיימות $q^4 - 1$ שורות כאלה.

נבחר v_1 מבין $q^4 - 1$ השורות שמקיימות (1) (כלומר, $v_1 \neq 0$). אז

$$(2) \quad v_2 \text{ איננה צירוף לינארי של קודמותיה}$$

אם ורק אם היא איננה ב- $\text{Sp}(v_1)$. כיוון ש- $\dim \text{Sp}(v_1) = 1$, המרחב $\text{Sp}(v_1)$ איזומורפי ל- F^1 , ובפרט יש

בו q איברים. לכן יש $q^4 - q$ רביעיות שמקיימות את (2).

נבחר v_2 מבין $q^4 - q$ השורות שמקיימות (2). אז

$$(3) \quad v_3 \text{ איננה צירוף לינארי של קודמותיה}$$

אם ורק אם היא איננה ב- $\text{Sp}(v_1, v_2)$. כיוון ש- $\dim \text{Sp}(v_1, v_2) = 2$, המרחב $\text{Sp}(v_1, v_2)$ איזומורפי

ל- F^2 , ובפרט יש בו q^2 איברים. לכן יש $q^4 - q^2$ רביעיות שמקיימות את (3).

נבחר v_3 מבין $q^4 - q^2$ השורות שמקיימות (3). כמו בפסקה הקודמת יש $q^4 - q^3$ רביעיות שמקיימות

$$(4) \quad v_4 \text{ איננה צירוף לינארי של קודמותיה.}$$

כעת, לכל בחירה של v_1 מבין $q^4 - 1$ האפשרויות אפשר לבחור v_2 מבין $q^4 - q$ האפשרויות, ולכל בחירה כזאת

אפשר לבחור v_3 מבין $q^4 - q^2$ האפשרויות, ולכל בחירה כזאת אפשר לבחור v_4 מבין $q^4 - q^3$ האפשרויות. לכן

מספר המטריצות ההפיכות ב- $M_4(F)$ הוא

$$\blacksquare \quad (q^4 - 1)(q^4 - q)(q^4 - q^2)(q^4 - q^3)$$

שאלה 5: תהיינה A, B שתי מטריצות מסדר $n \times n$ מעל שדה F . נניח כי $\text{rk } AB = \text{rk } B$. הוכיחו שכל

פתרון של מערכת המשוואות ההומוגניות $(AB)X = 0$ הוא גם פתרון של המערכת $BX = 0$.

פתרון: יהיו U מרחב הפתרונות של $(AB)X = 0$ ו- W מרחב הפתרונות של $BX = 0$. אז $W \subseteq U$,

כי אם $w \in W$ אז $Bw = 0$ ולכן $(AB)w = A(Bw) = A0 = 0$, כלומר, $w \in U$. אבל

$$\blacksquare \quad U \subseteq W \text{ בפרט } U = W, \text{ לכן } \dim U = n - \text{rk } AB = n - \text{rk } B = \dim W$$

שאלה 6: מצאו את הדטרמיננטה של

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

פתרון: נסמן את הדטרמיננטה ב- d .

נוציא 2 מכל אחת מבין חמש השורות של המטריצה, אח"כ נוסיף את 4 השורות האחרונות לראשונה, ולבסוף נוציא 7 מהשורה הראשונה:

$$d = 2^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2^5 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2^5 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

כעת נחסיר את השורה הראשונה מיתר השורות ואח"כ את העמודה הראשונה מיתר העמודות:

$$d = 2^5 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2^5 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

המטריצה האחרונה היא אלכסונית, לכן הדטרמיננטה שלה היא מכפלת האיברים באלכסון, 2^4 , לכן

■ $d = 2^5 \cdot 7 \cdot 2^4 = 2^9 \cdot 7$

בהצלחה!