TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב
RAYMOND AND BEVERLY SACKLER FACULTY OF EXACT SCIENCES
SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
הפקולטה למדעים מדויקים ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
בית הספר למדעי המתמטיקה

אלגברה לינארית 1א

מערכי שעור

תש״ף

נערך על ידי

דן הרן

עדכון אחרון: 25.6.2020

1. שדות

הגדרה 1.1 (זמנית): **שדה** F הוא קבוצה חלקית של המספרים המרוכבים $\mathbb{C}$ שמכילה את $0,1$ וסגורה תחת 4 פעולות החשבון, כלומר, אם $a,b \in F$ אז גם $a \pm b, ab \in F$ וגם $\frac{a}{b} \in F$, בתנאי ש־$b \neq 0$.

דוגמאות 1.2: דוגמאות לשדות. שדה המספרים המרוכבים $\mathbb{C}$, שדה המספרים הממשיים $\mathbb{R}$, שדה המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$.

טענה 1.3: *הקבוצה הבאה היא שדה:*

$$F = \{a + b\sqrt{2} |\ a,b \in \mathbb{Q}\}.$$

הוכחה: נשתמש בעובדה הידועה ש־$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

כעת, $0,1 \in F$ ולמעשה, $\mathbb{Q} \subseteq F$, כי לכל $a \in \mathbb{Q}$, $a = a + 0\sqrt{2} \in F$.

יהיו $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in F$. אז

$$(a + b\sqrt{2}) \pm (c + d\sqrt{2}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{2} \in F$$
$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + cb)\sqrt{2} \in F$$

אם $c + d\sqrt{2} \neq 0$ אז גם $c - d\sqrt{2} \neq 0$. (אכן, אם $c - d\sqrt{2} = 0$, אז או ש־$d = 0$ ואז גם $c = 0$ ולכן $c + d\sqrt{2} = 0$, סתירה, או ש־$d \neq 0$ ואז $\sqrt{2} = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, סתירה.) לכן

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})} = \frac{(ac - 2bd) + (-ad + cb)\sqrt{2}}{c^2 - 2d^2} =$$
$$\frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{-ad + cb}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2} \in F \quad . \qquad \blacksquare$$

קל לראות שאם F תת קבוצה של $\mathbb{C}$ שמכילה את $0,1$ וסגורה תחת 4 פעולות החשבון אז $\mathbb{Q} \subseteq F$.

כעת נביא את ההגדרה הכללית של שדה. אך לפני כן נזכיר ש**פעולה** על קבוצה F היא איזשהו כלל, שמתאים לכל זוג של איברי F איבר של F. לדוגמה, אם F היא קבוצת המספרים הממשיים הגדולים מ־10, הכלל שמתאים לכל זוג (x,y) של מספרים כאלה את הממוצע שלהם הוא פעולה. דוגמה נוספת: אם F היא קבוצת כל המספרים הטבעיים, הכלל שמתאים לכל זוג (m,n) את המספר m^n הוא פעולה. גם הכלל שמתאים לכל זוג (m,n) את המספר n^m הוא פעולה, שהינה שונה מהפעולה הקודמת.

הגדרה 1.4: **שדה** הנו קבוצה F יחד עם שתי פעולות עליו, חיבור (+) וכפל (·), המקיימות את הכללים הבאים:

(ח0) החיבור הוא פעולה: לכל $a,b \in F$ מוגדר איבר יחיד $a + b \in F$,

(ח1) כלל הצירוף לחיבור: $(a + b) + c = a + (b + c)$, לכל $a,b,c \in F$.

(ח2) כלל החילוף של החיבור: $a + b = b + a$, לכל $a,b \in F$.

(ח3) קיום איבר ניטרלי ביחס לחיבור: קיים $0 \in F$ (ונראה שהוא יחיד), כך ש־$a = 0 + a$ לכל $a \in F$,

(ח4) קיום איבר נגדי: לכל $a \in F$ קיים $a' \in F$ כך ש $a + a' = 0$,

(כ0) הכפל הוא פעולה: לכל $a, b \in F$ מוגדר איבר יחיד $a \cdot b \in F$,

(כ1) כלל הצירוף לכפל: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, לכל $a, b, c \in F$,

(כ2) כלל החילוף של הכפל: $a \cdot b = b \cdot a$, לכל $a, b \in F$,

(כ3) קיום איבר ניטרלי ביחס לכפל: קיים איבר $1 \in F$ (ונראה שהוא יחיד), כך ש־$a = 1 \cdot a$ לכל $a \in F$,

(כ4) קיום איבר הפכי: לכל $0 \neq a \in F$ קיים $a' \in F$ כך ש־$a \cdot a' = 1$,

(פ) כלל הפילוג: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, לכל $a, b, c \in F$,

(ש) $1 \neq 0$ (ובפרט, ב־F לפחות שני איברים).

נעיר עוד שאם F מקיימת את כל התכונות האלה, פרט אולי לתכונות (כ4) ו־(ש), אז היא נקראת **חוג חילופי עם יחידה**. חוג חילופי עם יחידה שמקיים את (ש) וגם

(כ4') אם $ab = 0$ אז $a = 0$ או $b = 0$, לכל $a, b \in F$

נקרא **תחום שלמות**.

דגמאות 1.5:

(א) כל שדה כפי שהגדרנו אותו בתחילת הסעיף הוא גם שדה לפי ההגדרה החדשה. בפרט $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ והשדה מטענה 1.3 הם שדות.

(ב) תהי F קבוצה בת שני איברים a, b ונגדיר עליה פעולות $+, \cdot$ בעזרת שתי הטבלאות הבאות

$\cdot$	O	I
O	O	O
I	O	I

$+$	O	I
O	O	I
I	I	O

בדיקה (מייגעת) תראה שכל התנאים של שדה מתקיימים. במקרה זה איבר האפס הוא O ואיבר היחידה הוא I. שים לב ש־$1 + 1 = 0$, שלא כמו בדוגמאות (א)!

(ג) $F = \{a, b, c, d\}$ עם הפעולות הבאות

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	d	b
d	a	d	b	c

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

הוא שדה (a איבר האפס, b איבר היחידה).

(ד) $\mathbb{Z}$ (המספרים השלמים) הוא תחום שלמות, אך לא שדה. ∎

למה 1.6: *יהי F שדה. אז*

(א) *איבר ניטרלי ביחס לחיבור הינו יחיד.*

(ב) *כלל הצמצום: יהיו $a, b, c \in F$. אם $a + b = a + c$ אז $b = c$.*

(ג) *לכל* $a \in F$ *נגדי יחיד.*

הוכחה: (א) יהיו $0, 0' \in F$ ניטרליים ביחס לחיבור. אז $0 = 0 + 0' = 0'$.

(ב) נוסיף נגדי a' של a לשני האגפים:

$$b = 0 + b = (a' + a) + b = a' + (a + b) = a' + (a + c) = (a' + a) + c = 0 + c = c.$$

(ג) יהיו $b, c \in F$ נגדיים של a. אז $a + b = 0 = a + c$, לכן לפי (ב) $b = c$. ∎

באופן דומה:

למה 1.7: *יהי* F *שדה. אז*

(א) *איבר ניטרלי ביחס לכפל הינו יחיד.*

(ב) *כלל הצמצום: יהיו* $a, b, c \in F$. אם $a \cdot b = a \cdot c$ ו־$a \neq 0$, אז $b = c$.

(ג) *לכל* $0 \neq a \in F$ *הפכי יחיד.*

הגדרה 1.8: האיבר הניטרלי ביחס לחיבור ייקרא **האפס** ויסומן 0. האיבר הניטרלי ביחס לכפל ייקרא **היחידה** ויסומן 1. האיבר הנגדי של $a \in F$ יסומן $-a$. האיבר ההופכי של $0 \neq a \in F$ יסומן a^{-1} או $\frac{1}{a}$. את החיסור והחילוק ב־F מגדירים כך: אם $a, b \in F$ אז $a - b = a + (-b) \in F$. אם גם $b \neq 0$ אז $ab^{-1} = \frac{a}{b}$.

למה 1.9: *יהי* F *שדה. אז*

(א) $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$ *לכל* $a \in F$.

(ב) $(-1) \cdot a = -a$ *לכל* $a \in F$.

(ג) F *הוא תחום שלמות, כלומר, לכל* $a, b \in F$ *מתקיים: אם* $ab = 0$ *אז* $b = 0$ *או* $a = 0$.

הוכחה: (א) $0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$. לפי כלל הצמצום, $0 = a \cdot 0$.

(ב) $a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 + (-1)) \cdot a = 0 \cdot a = 0$, לכן $(-1) \cdot a$ נגדי של a.

(ג) נניח $a \neq 0$. נכפיל את $ab = 0$ בהפכי a' של a. לפי (א), $b = (b'b)a = a' \cdot 0 = 0$. ∎

מסקנה 1.10:

(א) *בטבלת החיבור של שדה* F *כל איבר מופיע בדיוק פעם אחת בכל שורה ובכל עמודה.*

(ב) *בטבלת הכפל של שדה* F *כל איבר מופיע בדיוק פעם אחת בכל שורה ובכל עמודה, שאינן מתאימות לכפל ב־*0*; בשורה ובעמודה שמתאימות לכפל ב־*0 *מופיעים רק אפסים.*

הוכחה: (א) בשורה שמתאימה לחיבור ב־a מופיעים האיברים $a + b$, באשר b עובר על כל איברי F. אם $c \in F$ כלשהו, הוא מפיע כאן, כי $c = a + (c - a)$. הוא מופיע רק פעם אחת בגלל כלל הצמצום.

(ב) דומה. ∎

משפט 1.11: *תחום שלמות סופי F הוא שדה.*

הוכחה: עלינו להוכיח את התכונה (כ4): לכל $F \ni a \neq 0$ יש $a' \in F$ כך ש־$a \cdot a' = 1$. ואכן, יהיו $b_1, \ldots, b_n$ כל האיברים השונים של F. בגלל התכונה (כ4') האיברים $ab_1, \ldots, ab_n$ שונים זה מזה. כיוון שמספרם בדיוק כמו מספר איברי F, אלה כל איברי F. לכן 1 ביניהם, כלומר, יש b_i כך ש־$ab_i = 1$. ∎

הגדרה 1.12: נקבע n טבעי. לכל $k \in \mathbb{Z}$ קיימים $q, r \in \mathbb{Z}$ יחידים כך שמתקיים

$$k = nq + r, \qquad 0 \leq r < n.$$

אז r נקרא **השארית של k לאחר החילוק ב־n**. נסמן אותו ב־$[k]$. יהי

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[k] \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{[0], [1], [2], \ldots, [n-1]\}$$

נגדיר חיבור וכפל על $\mathbb{Z}_n$:

$$[k] + [l] = [k + l], \qquad [k] \cdot [l] = [k \cdot l].$$

למה 1.13: *(א) יהיו $k, k' \in \mathbb{Z}$. אז* $[k] = [k']$ *אם ורק אם* $n | k - k'$.

(ב) *הגדרת הפעולות טובה (אינה תלויה בבחירת מיצגים k, l של איברים $[k], [l]$).*

(ג) *$\mathbb{Z}_n$ הוא חוג חילופי עם יחידה.*

הוכחה: (א) נניח $k = nq + [k], k' = nq' + [k']$, בלי הגבלת הכלליות $[k'] \leq [k]$, ולכן $0 \leq [k] - [k'] < n$. אז

$$[k] = [k'] \Leftrightarrow [k] - [k'] = 0 \Leftrightarrow n | ([k] - [k']) \Leftrightarrow n | n(q - q') + ([k] - [k']) \Leftrightarrow n | k - k'.$$

(ב) נניח $[k] = [k'], [l] = [l']$, צריך להוכיח $[k + l] = [k' + l']$, $[kl] = [k'l']$. ואכן $n | k - k', l - l'$ לכן $(k + l) - (k' - l') = (k - k') + (l - l')$ וכן $kl - k'l' = (k - k')l + k'(l - l')$ מתחלקים ב־n.

(ג) החוקים בהגדרה 1.4 מתקיימים עבור $\mathbb{Z}_n$ כיוון שהם מתקיימים עבור $\mathbb{Z}$. (בדוק!) ∎

משפט 1.14:

(א) *אם n ראשוני אז $\mathbb{Z}_n$ הוא תחום שלמות ואפילו שדה.*

(ב) *אם n אינו ראשוני אז $\mathbb{Z}_n$ אינו תחום שלמות.*

הוכחה: (א) תכונה של ראשוני אומרת כי אם $n | kl$ אז $n | k$ או $n | l$. במלים אחרות, אם $[k] \cdot [l] = [kl] = 0$ אז $[l] = 0$ או $[k]$. זה אומר ש־$\mathbb{Z}_n$ תחום שלמות. לפי משפט 1.11, F גם שדה.

(ב) אם n אינו ראשוני, אז יש $k, l \in \mathbb{Z}$ כך ש־$n | kl$ אבל $n \nmid l$ וגם $n \nmid k$. במלים אחרות, יש $[k], [l] \in \mathbb{Z}_n$ כך ש־$[k] \cdot [l] = [kl] = 0$ אבל $[l] \neq 0$ וגם $[k] \neq 0$. כלומר, $\mathbb{Z}_n$ אינו תחום שלמות. ∎

עבור שדה F ו־$k \in \mathbb{Z}$ נגדיר $k_F \in F$: אם $k > 0$ אז $k_F = \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{k\times} \in F$; 0_F הוא האפס של F; ואם $k < 0$ אז k_F הנגדי של $(-k)_F$.

למה 1.15: *יהיו* $k,l\in\mathbb{Z}$. *אז*

$$.k_F+l_F=(k+l)_F,\qquad k_Fl_F=(kl)_F$$

הוכחה: נוכיח רק את השוויון השני. אם $k,l>0$ אז לפי חוק הפילוג (המורחב) ב־F

$$.k_Fl_F=(\overbrace{1+\cdots+1}^{k\times})(\overbrace{1+\cdots+1}^{l\times})=\overbrace{1+\cdots+1}^{kl\times}=(kl)_F$$

כעת נניח $k<0,\ l>0$. אז $k=-r$, באשר $r>0$, ו־$kl=-rl$. לפי המקרה קודם $r_Fl_F=(rl)_F$. לכן

$$.k_Fl_F=(-r_F)l_F=((-1)r_F)l_F=(-1)(r_Fl_F)=(-1)(rl)_F=-(rl)_F=(kl)_F$$

באופן דומה שאר המקרים. ∎

הגדרה 1.16: יהי F שדה. המספר הטבעי הקטן ביותר p שמקיים $p_F=0$ נקרא **האפיון** או **המציין** של F. יסומן $\operatorname{char}F$. אם אין p כזה, נגדיר $\operatorname{char}F=0$. ∎

דוגמה 1.17: $\operatorname{char}\mathbb{Q}=\operatorname{char}\mathbb{R}=\operatorname{char}\mathbb{C}=0$; אם p ראשוני, אז $\operatorname{char}\mathbb{Z}_p=p>0$. ∎

למה 1.18: *יהי* F *שדה, ונניח כי* $p=\operatorname{char}F>0$. *אז* p *ראשוני.*

הוכחה: נניח ש־p אינו ראשוני. אז $p=kl$, באשר $1<k,l<p$ שלמים. לכן $0=p_F=(kl)_F=k_Fl_F$, ולכן $k_F=0$ או $l_F=0$, בסתירה למזעריות של p. ∎

הגדרה 1.19: יהי F שדה. תת קבוצה F' של F נקראת **תת שדה** או **שדה חלקי** של F, אם F' בעצמה שדה ביחס לפעולות על F. ∎

דוגמה 1.20: $\mathbb{Q}$ תת שדה של $\mathbb{R}$, שהינו תת שדה של $\mathbb{C}$. ∎

למה 1.21: *יהי* F *שדה ותהי* $F'\subseteq F$. *אז* F' *תת שדה של* F *אם ורק אם*

(*) $0,1\in F'$ *ולכל* $a,b\in F'$ *שונים מ־*0 *מתקיים:* $a+b,ab,-a,a^{-1}\in F'$.

הוכחה: נניח ש־F' שדה. יהיו $0',1'$ האפס והיחידה שלו. (מראש איננו יודעים שאלה הם $0,1$, האפס והיחידה של F. נראה זאת:) $0+0'=0'=0'+0'$, ולפי כלל הצמצום ב־F, $0'=0$ באופן דומה $1'=1$. לכן $0,1\in F$.

יהיו $a,b\in F'$. אז הסכום שלהם ב־F' הוא גם הסכום שלהם ב־F. לפי היחידות של הסכום ב־F, $a+b\in F'$. באופן דומה $ab\in F'$. כמו כן יש $a'\in F'$ כך ש־$a+a'=0$. לפי היחידות של הנגדי ב־F מתקיים $a'=-a$. לכן $-a\in F'$. באופן דומה $a^{-1}\in F'$ אם $a\neq0$. לכן (*) מתקיים.

להיפך, נניח (*). אז כל הכללים בהגדרה 1.4 מתקיימים. אכן, הכללים בהם מופיעה רק המילה "לכל" (ולא המלה "קיים", הם נכונים לכל איברי F' כי הם נכונים לכל איברי F. לכן צריך רק לבדוק (ח0),(ח3), (ח4), (כ0),(כ3), (כ4) והם אכן מתקיימים בגלל (*).

למה 1.22: *יהי F שדה בעל אפיון $p>0$. אז $F_0=\{k_F|\ k\in\mathbb{Z}\}$ הוא תת שדה של F. יותר על כן,*

(א) $k_F=0$ *אם ורק אם* $p|k$.

(ב) $k_F=l_F$ *אם ורק אם* $[k]=[l]$ *ב־* $\mathbb{Z}_p$.

(ג) *ההעתקה* $F_0 \to \mathbb{Z}_p$ *הנתונה על ידי* $k_F \mapsto [k]$ *היא חד חד ערכית ועל, ושומרת את הפעולות.*

לכן ניתן לזהות את F_0 עם השדה $\mathbb{Z}_p$ ואומרים ש־$\mathbb{Z}_p$ **הוא תת שדה של** F.

הוכחה: (א) נחלק את k ב־p עם שארית: $k=pq+r$, באשר $0\le r<p$. אז $k_F=p_Fq_F+r_F=r_F$, לכן $k_F=0$ אם ורק אם $r_F=0$. אבל לפי המזעריות של p זה שקול ל־$r=0$ וזה שקול ל־$p|k$.

(ב) $k_F=l_F \Leftrightarrow k_F-l_F=0 = k_F+(-l)_F = (k-l)_F \Leftrightarrow p|k-l \Leftrightarrow [k]=[l]$.

(ג) $k_Fl_F=m_F \Leftrightarrow (kl)_F=m_F \Leftrightarrow [kl]=[m] \Leftrightarrow [k][l]=[m]$. באופן דומה החיבור.

∎

2. משוואות ליניאריות

בסעיף זה יהי F שדה כלשהו.

עבור מספר טבעי n נסמן ב־F^n את אוסף כל ה־n־יות, כלומר, סדרות $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ שרכיביהן $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ב־F.

הגדרה 2.1: **משוואה ליניארית** (מעל F) הוא ביטוי מהצורה

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n = b, \tag{1}$$

באשר $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in F$. הם נקראים **המקדמים** של (1), כאשר b נקרא **המקדם החפשי**. בביטוי זה $X_1, X_2, \ldots, X_n$ הם סמלים סתמיים, שנקראים **נעלמים** או **משתנים**. המשוואה נקראת **הומוגנית** אם $b = 0$. n־יה $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F^n$ היא **פתרון** של (1) אם מתקיים

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b.$$

קבוצה הפתרון של משואה (1) היא אוסף כל הפתרונות שלה.

דוגמה 2.2: קבוצת הפתרון של $X_1 - 2X_2 + X_4 + 8X_5 = 2$ היא

$$P = \{(2 + 2x_2 - x_4 - 8x_5, x_2, x_3, x_4, x_5) |\ x_2, x_3, x_4, x_5 \in F\}.$$

הגדרה 2.3: **מערכת של** m **משוואה ליניאריות ב־**n **נעלמים** (מעל F) ־ כשמה כן היא:

$$\begin{aligned} &a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = b_1, \\ &a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = b_2, \\ &\qquad\cdots \\ &a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n = b_m, \end{aligned} \tag{2}$$

באשר $a_{ij}, b_i \in F$ לכל $1 \le i \le m$ ולכל $1 \le j \le n$. **פתרון** של (2) הוא פתרון של כל m המשוואות ב־(2); **קבוצה הפתרון** של (2) הוא אוסף כל הפתרונות שלה.

כיצד פותרים מערכת משוואות ליניאריות (כלומר, מוצאים את קבוצת הפתרון שלה)?

דוגמה 2.4 (איך לא לפתור!): $(F = \mathbb{R})$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1 \tag{I}$$

$$X_1 - X_2 - X_3 = 1 \tag{II}$$

$$-X_1 - X_2 + X_3 = -1 \tag{III}$$

$$-X_1 + X_2 + X_3 = 1 \tag{IV}$$

על ידי חיבור המשוואות נקבל:

$$\begin{array}{ll} (I+II) & 2X_1 = 2 \\ (II+III) & -2X_2 = 0 \\ (I+II+III+IV) & 2X_3 = 2 \end{array}$$

ולמערכת הזאת פתרון יחיד $(1,0,1)$. אך הוא איננו פתרון של המערכת המקורית. (לזו אין פתרון, כי $(II),(IV)$ סותרות זו את זו.)

דוגמה זו ממחישה שאנחנו זקוקים לשיטה שתוביל אותנו לקבוצת הפתרון בכל מקרה. נציג שיטה כזאת –על יד פעולות אלמנטריות על מערכות המשוואות ושיטת החילוץ של Gauss.

כפי שנראה מיד, פעולה אלמנטרית היא שינוי יחסית פשוט של מערכת משוואות נתונה שכתוצאתו מתקבלת מערכת משוואות אחרת, אך *בעלת אותה קבוצת הפתרון*. על ידי סדרה של פעולות אלמנטריות ניתן להגיע מהמערכת הנתונה למערכת חדשה מאד שונה ממנה, אך, עדיין, בעלת אותה קבוצת הפתרון. אם נבחר את סדרת הפעולות האלמנטריות באופן מושכל (וזאת שיטת החילוץ), נגיע למערכת פשוטה, אותה כבר נדע לפתור.

הגדרה 2.5: **פעולה אלמנטרית** על מערכת (2) היא אחת מבין השלוש הבאות:

(א) החלפת שתי משוואות במערכת ביניהן; סימון: החלפת המשוואות ה־i וה־k ביניהן תסומן על ידי $\mathcal{P}_{ik}$.

(ב) הכפלת משוואה אחת במערכת ב־α, באשר $0 \neq \alpha \in F$. סימון: הכפלת המשוואה ה־i ב־α תסומן על ידי $\mathcal{P}_i(\alpha)$.

(ג) הוספת הכפולה ב־λ של משוואה אחת במערכת לאחרת, באשר $\lambda \in F$. סימון: הוספת הכפולה ב־λ של המשוואה ה־i למשוואה ה־k תסומן על ידי $\mathcal{P}_{ik}(\lambda)$. (בפעולה זו אין משנים את המשוואה ה־i.)

למה 2.6: *פעולה אלמנטרית אינה משנה את קבוצת הפתרון, כלומר, למערכת נתונה ולמערכת שמתקבלת ממנה על ידי פעולה אלמנטרית אחת אותה קבוצת פתרון*

הוכחה: נניח למשל שהפעולה היא $\mathcal{P}_{ik}(\lambda)$. תהי (2) המערכת המקורית ותהי $(2')$ המערכת המתקבלת על ידי הפעולה. צריך להוכיח שכל פתרון של (2) הוא גם פתרון של $(2')$ ולהיפך, כל פתרון של $(2')$ הוא גם פתרון של (2). נשים לב ש־$(2')$ נבדלת מ־(2) רק במשוואה ה־k, שהינה:

$$(\lambda a_{i1}+a_{k1})X_1 + (\lambda a_{i2}+a_{k2})X_2 + \cdots + (\lambda a_{in}+a_{kn})X_n = \lambda b_i + b_k.$$

יהי $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ פתרון של (2). אז

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k.$$

נכפיל את השוויון הראשון ב־λ ונוסיף אותו לשני. אז

$$(\lambda a_{i1} + a_{k1})x_1 + (\lambda a_{i2} + a_{k2})x_2 + \cdots + (\lambda a_{in} + a_{kn})x_n = \lambda b_i + b_k.$$

כלומר, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ הוא פתרון של המערכת החדשה.

להיפך, יהי $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ פתרון של המערכת החדשה. הוא בפרט פתרון של המשוואה ה־i והמשוואה ה־k של מערכת זו. לכן

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n &= b_i \\ (\lambda a_{i1} + a_{k1})x_1 + (\lambda a_{i2} + a_{k2})x_2 + \cdots + (\lambda a_{in} + a_{kn})x_n &= \lambda b_i + b_k. \end{aligned}$$

נכפיל את השוויון הראשון ב־$(-\lambda)$ ונוסיף אותו לשני. אז נקבל כי $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ פתרון של המשוואה ה־k במערכת המקורית (2), ולכן פתרון של (2).

באופן דומה לגבי פעולות אלמטריות מהסוגים האחרים. ∎

שאלה 2.7: מדוע בפעולה $\mathcal{P}_i(\alpha)$ נדרש $\alpha \neq 0$?

דוגמה 2.8:

$$\begin{array}{rrrrcl} X & +Y & +Z & -W & = & 1 \\ 2X & +3Y & +4Z & +aW & = & 3 \\ X & +aY & +(2a-1)Z & +3W & = & 2 \end{array}$$

$$\mathcal{P}_{12}(-2), \mathcal{P}_{13}(-1)$$

$$\begin{array}{rrrrcl} X & +Y & +Z & -W & = & 1 \\ & Y & +2Z & +(a+2)W & = & 1 \\ & (a-1)Y & +(2a-2)Z & +4W & = & 1 \end{array}$$

$$\mathcal{P}_{21}(-1), \mathcal{P}_{23}(1-a)$$

$$\begin{array}{rrrrcl} X & & -Z & -(a+3)W & = & 0 \\ & +Y & +2Z & +(a+2)W & = & 1 \\ & & & \alpha W & = & 2-a \end{array}$$

כאשר

$$\alpha = 4 + (1-a)(a+2) = 4 - a^2 - a + 2 = 6 - a - a^2 = (3+a)(2-a).$$

אם $a = -3$, למערכת זו אין פתרון, כי משוואתה האחרונה היא $0W = 5$, ולה אין פתרון.

אם $a = 2$, המערכת היא

$$\begin{array}{rrrrcl} X & & -Z & -5W & = & 0 \\ & +Y & +2Z & +4W & = & 1 \\ & & & 0W & = & 0 \end{array}$$

וקבוצת הפתרון שלה היא

$$.P = \{(c+5d, -2c-4d+1, c, d)|\ c, d \in F\}$$

אם $a \neq 2, -3$, על ידי שלוש פעולות אלמנטריות נגיע למערכת

$$\begin{array}{ccccccc} X & & -Z & & = & 1 \\ & Y & +2Z & & = & \frac{1}{a+3} \\ & & & W & = & \frac{1}{a+3} \end{array}$$

(בדוק! פסחנו על הסבר מפורט) וקבוצת הפתרון שלה היא

$$.P = \{(c+1, -2c+\frac{1}{a+3}, c, \frac{1}{a+3})|\ c \in F\}$$

תרגיל 2.9: *פתור:*

$$\begin{array}{cccccccc} X_1 & +a_{12}X_2 & & & +a_{15}X_5 & +a_{16}X_6 & = & b_1 \\ & & X_3 & & +a_{25}X_5 & +a_{26}X_6 & = & b_2 \\ & & & X_4 & +a_{35}X_5 & +a_{36}X_6 & = & b_3 \end{array}$$

פתרון: נרשום את המערכת בצורה שקולה

$$\begin{array}{lllll} X_1 & = b_1 & -a_{12}X_2 & -a_{15}X_5 & -a_{16}X_6 \\ X_3 & = b_2 & & -a_{25}X_5 & -a_{26}X_6 \\ X_4 & = b_3 & & -a_{35}X_5 & -a_{36}X_6 \end{array}$$

קבוצת הפתרון היא

$$P = \{(b_1 - a_{12}c_2 - a_{15}c_5 - a_{16}c_6, c_2, b_2 - a_{25}c_5 - a_{26}c_6, b_3 - a_{35}c_5 - a_{36}c_6, c_5, c_6) \mid c_2, c_5, c_6 \in F\}.$$

שים לב שהמטריצה המורחבת של המערכת היא מדורגת קנונית.

כדי לחסוך כתיבה, נהוג להחליף מערכת משוואות במקדמים שלה:

הגדרה 2.10: **מטריצה מסדר $m \times n$ מעל F** היא מלבן של איברי F מסדר $m \times n$ מעל F. רישום:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

באשר $a_{ij} \in F$ לכל $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$.

אוסף כל המטריצות מסדר $m \times n$ מעל F יסומן $\mathrm{M}_{m \times n}(F)$. נכתוב בדרך כלל $\mathrm{M}_n(F)$ במקום $\mathrm{M}_{n \times n}(F)$.

הגדרה 2.11: **מטריצה המורחבת של המערכת** (2) היא המטריצה מסדר $m \times (n+1)$ הבאה

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

מטריצה המצומצמת של (2) היא המטריצה מסדר $m \times n$ שמתקבלת מהמורחבת על ידי השמטת העמודה האחרונה.

מטריצה אינה חייבת לבוא מאיזה מערכת משוואות! נדון במטריצות באופן כללי, ולעתים (אך לא תמיד) נייִשם זאת למערכות של משוואות.

הגדרה 2.12: **פעולה אלמנטרית על (שורות)** המטריצה (3) היא אחת מבין השלוש הבאות:

(א) החלפת שתי שורות במטריצה ביניהן; סימון: החלפת השורה ה־i וה־k ביניהן תסומן על ידי $\mathcal{P}_{ik}$ או $R_i \leftrightarrow R_k$.

(ב) הכפלת שורה אחת במטריצה ב־α, באשר $0 \neq \alpha \in F$. סימון: הכפלת השורה ה־i ב־α תסומן על ידי $\mathcal{P}_i(\alpha)$ או $R_i \to \alpha R_k$.

(ג) הוספת הכפולה ב־λ של שורה אחת במטריצה לאחרת, באשר $\lambda \in F$. סימון: הוספת הכפולה ב־λ של השורה ה־i לשורה ה־k תסומן על ידי $P_{ik}(\lambda)$ או $R_k \to R_k + \lambda R_i$.

הגדרה 2.13: שתי מטריצות מאותו סדר נקראות **שקולות (־שורות)** אם אחת מתקבלת מהשניה על ידי סדרה של פעולות אלמנטריות.

הערה 2.14: מטריצות שקולות הן תמיד מאותו סדר. אין להשמיט שורות מהן, גם אם הן שורות של אפסים!

הערה 2.15: לכל פעולה אלמנטרית $\mathcal{P}$ מתאימה פעולה אלמנטרית **הפוכה** $\mathcal{P}'$ במובן הבא: אם A' מתקבלת מ־A על ידי $\mathcal{P}$ אז A מתקבלת מ־A' על ידי $\mathcal{P}'$, ולהיפך. אכן,

(א) אם $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{ik}$ אז $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_{ik} = \mathcal{P}$.

(ב) אם $\mathcal{P} = \mathcal{P}_i(\alpha)$ אז $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_i(\alpha^{-1})$.

(ג) אם $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{ik}(\lambda)$ אז $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_{ik}(-\lambda)$.

מכאן יוצא שיחס השקילות בין מטריצות הוא סימטרי. קל לראות שהוא גם טרנזיטיבי, דהיינו: אם A, A' שקולות וגם A', A'' שקולות אז גם A, A'' שקולות.

כדי לפתור מערכת משוואות לינאריות, אנחנו בעצם מבצעים פעולות אלמנטריות על השורות של המטריצה המורחבת של המערכת, בשאיפה להגיע למטריצה "פשוטה" יותר. מהי מטריצה "פשוטה" זו, נבהיר בהגדרה להלן.

הגדרה 2.16: מטריצה A מסדר $m \times n$ (ראה (3)) נקראת **מדורגת קנונית** אם:

(א) שורות האפסים שבה באות בסוף, כלומר, יש איזה $0 \leq r \leq m$ כך ש־r השורות הראשונות של A אינן שורות אפסים, ו־$m - r$ השורות האחרונות הן שורות של אפסים.

(ב) בכל שורה שאיננה שורת אפסים הרכיב הראשון השונה מאפס הוא 1. כלומר, לכל $1 \leq i \leq r$ יהי $1 \leq j_i \leq n$ הקטן ביותר כך ש־$a_{ij_i} \neq 0$. רכיב a_{ij_i} נקרא **הרכיב המוביל** (**פִּיבוֹט**) **של השורה ה־**i. אז $a_{ij_i} = 1$.

(ג) $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$.

(ד) בעמודה של רכיב מוביל כל הרכיבים הם 0, מלבד הרכיב המוביל (שהינו 1).

דוגמאות 2.17:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

העמודות $j_1, j_2, \ldots, j_r$ של מטריצה מדורגת קנונית שמכילות איבר מוביל נקראות **עמודות מובילות.** במטריצה השמאלית לעיל העמודות המובילות הן השלישית, השישית והשמינית. במטריצה שלידה כל העמודות הן מובילות.

הערה 2.18: מספר העמודות המובילות במטריצה מדורגת קנונית הוא מספר השורות שאינן שורות של אפסים (כי בכל שורה כזאת יש בדיוק איבר מוביל אחד).

תרגיל 2.20: מהן המטריצות המדורגות קנונית מסדר

(א) $m \times 1$?

(ב) $m \times 2$?

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a \in F \qquad \blacksquare$$

למעשה הוכחנו:

משפט: *אם לשתי מערכות משוואות לינאריות יש מטריצות מורחבות שקולות (אפשר להגיע מאחת לשנייה על ידי סדרה של פעולות אלמנטריות) אז יש להן אותה קבוצת הפתרון*

תרגיל 2.9: *פתור:*

$$\begin{array}{cccccccc} X_1 & +a_{12}X_2 & & & +a_{15}X_5 & +a_{16}X_6 & = & b_1 \\ & & X_3 & & +a_{25}X_5 & +a_{26}X_6 & = & b_2 \\ & & & X_4 & +a_{35}X_5 & +a_{36}X_6 & = & b_3 \end{array}$$

פתרון: נרשום את המערכת בצורה שקולה

$$\begin{array}{llll} X_1 & = b_1 & -a_{12}X_2 & -a_{15}X_5 & -a_{16}X_6 \\ X_3 & = b_2 & & -a_{25}X_5 & -a_{26}X_6 \\ X_4 & = b_3 & & -a_{35}X_5 & -a_{36}X_6 \end{array}$$

קבוצת הפתרון היא

$$.P = \{(b_1 - a_{12}c_2 - a_{15}c_5 - a_{16}c_6, c_2, b_2 - a_{25}c_5 - a_{26}c_6, b_3 - a_{35}c_5 - a_{36}c_6, c_5, c_6) \mid c_2, c_5, c_6 \in F\}$$

שים לב שהמטריצה המורחבת של המערכת היא מדורגת קנונית.

תזכורת:

הגדרה 2.16: מטריצה A מסדר $m \times n$ (ראה (3)) נקראת **מדורגת קנונית** אם:

(א) שורות האפסים שבה באות בסוף, כלומר, יש איזה $0 \leq r \leq m$ כך ש־r השורות הראשונות של A אינן שורות אפסים, ו־$m - r$ השורות האחרונות הן שורות של אפסים.

(ב) בכל שורה שאיננה שורת אפסים הרכיב הראשון השונה מאפס הוא 1. כלומר, לכל $1 \leq i \leq r$ יהי $1 \leq j_i \leq n$ הקטן ביותר כך ש־$a_{ij_i} \neq 0$. רכיב a_{ij_i} נקרא **הרכיב המוביל** (**פִּיבּוֹט**) **של השורה ה־**i. אז $a_{ij_i} = 1$.

(ג) $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$.

(ד) בעמודה של רכיב מוביל כל הרכיבים הם 0, מלבד הרכיב המוביל (שהינו 1).

תרגיל 2.19: האם, לכל מטריצה מדורגת קנונית A, המטריצה A' הבאה גם מדורגת קנונית?

(i) A' מתקבלת מ־A על ידי השמטת שורות אחדות.

(ii) A' מתקבלת מ־A על ידי השמטת עמודות אחדות.

(iii) A' מתקבלת מ־A על ידי השמטת עמודות אחרונות אחדות.

(iv) A' מתקבלת מ־A על ידי השמטת עמודות לא מובילות אחדות.

פתרון: בכל סעיף צריך לבדוק שהתנאים של ההגדרה לעיל מתקיימים:

תרגיל 2.19: האם, לכל מטריצה מדורגת קנונית A, המטריצה A' הבאה גם מדורגת קנונית?

(i) A' מתקבלת מ־A על ידי השמטת שורות אחדות.

(ii) A' מתקבלת מ־A על ידי השמטת עמודות אחדות.

(iii) A' מתקבלת מ־A על ידי השמטת עמודות אחרונות אחדות.

(iv) A' מתקבלת מ־A על ידי השמטת עמודות לא מובילות אחדות.

(i) כן. (בדיקה ישירה.)

(ii) לא. דוגמה נגדית: נשמיט מהמטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ את העמודה הראשונה (או שלוש הראשונות).

(iii) כן. רק הדרישה (א) איננה ברורה מיידית. אם נסמן את השורות של A ב־$R_1, \ldots, R_m$ ואת השורות של A' ב־$R'_1, \ldots, R'_m$, צריך להוכיח שאם $i \leq k$ ו־R'_k איננה שורת אפסים, אז גם R'_i אינה שורת אפסים.

נניח ש־$R'_k \neq 0$. אז $R_k \neq 0$ והמוביל בשורה ה־k נמצא בעמודה שלא הושמטה. כיוון ש־$i \leq k$, גם $R_i \neq 0$ והמוביל בשורה זו נמצא יותר שמאלה מהמוביל שבשורה R_k, ולכן גם עמודתו לא הושמטה. לכן $R'_i \neq 0$.

(iv) כן, מספרי השורות השונות מאפס אינם משתנים. ∎

אלגוריתם 2.21: פתרון של מערכת שמטריצתה מקדמים המורחבת שלה מדורגת קנונית. נניח שנתונה מערכת של m משוואות לינאריות ב־n נעלמים שמטריצת המקדמים המורחבת שלה (מסדר $m \times (n+1)$) הינה מדורגת קנונית. מהי אז קבוצת הפתרון שלה?

(א) אם העמודה האחרונה היא מובילה, אז יש שורה במטריצה מהצורה $(0, \dots, 0, 1)$, שמתאימה למשוואה $0X_1 + \cdots + 0X_n = 1$. למשוואה זו אין פתרון ולכן למערכת אין פתרון ($P = \emptyset$).

(ב) אם העמודה האחרונה אינה מובילה, נשאיר את r המשתנים שמתאימים לעמודות מובילות באגף שמאל, ונעביר את יתר המשתנים לאגף ימין. כעת קל לרשום את קבוצת הפתרון. למשל, אם עמודות המובילות הן $1, 2, \dots, r$, והמטריצה היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1\,r+1} & \dots & a_{1\,n} & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2\,r+1} & \dots & a_{2\,n} & b_2 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{r\,r+1} & \dots & a_{r\,n} & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ואז קבוצת הפתרון היא

$$\left\{ \begin{pmatrix} -a_{1\,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1\,n}x_n + b_1 \\ -a_{2\,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2\,n}x_n + b_2 \\ \vdots \\ -a_{r\,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{r\,n}x_n + b_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_{r+1}, \dots, x_n \in F \right\}$$

באופן כללי קבוצת הפתרון אינה ריקה ותלויה ב־$(n-r)$ פרמטרים (לפחות לפי איך שכתבנו אותה).

משפט 2.22: *כל מטריצה שקולת שורות למטריצה מדורגת קנונית אחת ויחידה, כלומר, מכל מטריצה ניתן להגיע על יד סדרה של פעולות אלמנטריות למטריצה מדורגת קנונית אחת ויחידה*

הוכחה: תהי $A = (a_{ij})$ מטריצה מסדר $m \times n$. נציג את אלגוריתם (שיטת החילוץ של גאוס) שמוביל למטריצה מדורגת קנונית. (נדגיש שזאת לא בהכרח הדרך היחידה לקבל מטריצה מדורגת קנונית על ידי סדרה של פעולות אלמנטריות.)

(א) אם כל הרכיבים ב־A הם 0, המטריצה כבר מדורגת קנונית, ולכן סיימנו. נניח שזה לא כך. אז

(ב) יש עמודה ב־A שאיננה עמודה של אפסים. יהי j_1 המספר הקטן ביותר כך שהעמודה ה־j_1 איננה עמודה של אפסים (ואז כל העמודות לפניה הן עמודות של אפסים). ניתן להניח ש־$a_{1j_1} \neq 0$; אם לא, נחליף את השורה הראשונה עם שורה מתאימה אחרת שמתחתיה, בה יש רכיב שונה מאפס בעמודה ה־j_1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1\,j_1} & \dots & a_{1\,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2\,j_1} & \dots & a_{2\,n} \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m\,j_1} & \dots & a_{m\,n} \end{pmatrix}$$

נכפיל את שורה הראשונה ב־$a_{1j_1}^{-1}$ ואז נוכל להניח כי $a_{1j_1} = 1$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & a_{1\,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2\,j_1} & \dots & a_{2\,n} \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m\,j_1} & \dots & a_{m\,n} \end{pmatrix}$$

על ידי הוספת כפולות מתאימות של השורה הראשונה ליתר השורות נוכל להניח שבעמודה ה־j_1 כל הרכיבים הם אפסים, מלבד $a_{1j_1} = 1$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{1\,j_1+1} & \dots & a_{1\,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2\,j_1+1} & \dots & a_{2\,n} \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{m\,j_1+1} & \dots & a_{m\,n} \end{pmatrix}$$

נוכל להניח ש־A היא מהצורה הזאת.

שים לב שכל הפעולות האלמנטריות שעשינו עד כה לא שינו את העמודות שלפני העמודה ה־j_1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{1\,j_1+1} & \dots & a_{1\,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2\,j_1+1} & \dots & a_{2\,n} \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{m\,j_1+1} & \dots & a_{m\,n} \end{pmatrix}$$

תהי A' המטריצה המתקבלת מ־A על ידי השמטת השורה הראשונה.

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2\,j_1+1} & \dots & a_{2\,n} \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{m\,j_1+1} & \dots & a_{m\,n} \end{pmatrix}$$

אם כל השורות ב־A' הן שורות אפסים, אז A כבר מדורגת קנונית. נניח שזה לא כך. אז

(ג) יש עמודה ב־A' שאיננה עמודה של אפסים. יהי j_2 המספר הקטן ביותר כך שהעמודה ה־j_2 של A' איננה עמודה של אפסים (ואז כל העמודות לפניה ב־A' הן עמודות של אפסים). נשים לב ש־$j_1 < j_2$, כי כל העמודות לפני העמודה j_1 הן עמודות אפסים ב־A, ואילו בעמודה ה־j_1 יש רק רכיב אחד שונה מאפס, אך הוא בשורה הראשונה המושמטת. ניתן להניח ש־$a_{2j_2} \neq 0$; אם לא, נחליף את השורה השניה של A עם שורה מתאימה אחרת שמתחתיה, בה יש רכיב שונה מאפס בעמודה ה־j_1.

נכפיל את שורה השניה של A ב־$a_{2j_2}^{-1}$ ואז נוכל להניח כי $a_{2j_2} = 1$.

על ידי הוספת כפולות מתאימות של השורה השניה של A ליתר השורות (גם לראשונה!) נוכל להניח שבעמודה ה־j_2 כל הרכיבים הם אפסים, מלבד $a_{2j_2} = 1$.

שים לב שכל הפעולות האלמנטריות שעשינו עד כה לא שינו את העמודות שלפני העמודה ה־j_2.

וכן הלאה.

את היחידות נוכיח אחרי המשפט הבא. ∎

(למי שזה בכל זאת אינו מספיק, נפרט כאן את השלב הכללי:

נוכל להניח, אחרי פעולות אלמנטריות שכבר עשינו, שבמטריצה A יש עמודות $j_1 < j_2 < \cdots < j_{k-1}$, כך שלכל $1 \leq i < k$ מתקיים:

(i) בעמודה ה־j_i יש 1 בשורה ה־i ואפסים ביתר השורות,

(ii) ובשורה ה־i יש רק אפסים לפני העמודה ה־j_i.

כמו כן,

(iii) בשורות $k, k+1, \ldots, m$ יש רק אפסים בעמודות שלפני העמודה ה־j_{k-1} (וגם בעמודה ה־j_{k-1}, לפי (i)).

תהי A' המטריצה המתקבלת מ־A על ידי השמטת k השורה הראשונה. אם כל השורות ב־A' הן שורות אפסים, אז A כבר מדורגת קנונית. נניח שזה לא כך. אז

(ד) יש עמודה ב־A' שאיננה עמודה של אפסים. יהי j_k המספר הקטן ביותר כך שהעמודה ה־j_k של A' איננה עמודה של אפסים (ואז כל העמודות לפניה ב־A' הן עמודות של אפסים). נשים לב ש־$j_{k-1} < j_k$, כי כל העמודות ב־A' לפני העמודה j_{k-1} וכולל אותה הן עמודות אפסים לפי (iii).

ניתן להניח ש־$a_{kj_k} \neq 0$; אם לא, נחליף את השורה ה־k של של A עם שורה מתאימה אחרת שמתחתיה, בה יש רכיב שונה מאפס בעמודה ה־j_1. נכפיל את שורה ה־k של A ב־$a_{kj_k}^{-1}$ ואז נוכל להניח כי $a_{kj_k} = 1$.

על ידי הוספת כפולות מתאימות של השורה ה־k של A ליתר השורות (גם לראשונה!) נוכל להניח שבעמודה ה־j_k כל הרכיבים הם אפסים, מלבד $a_{kj_k} = 1$.

לפי הבניה:

(i′) בעמודה ה־j_k יש 1 בשורה ה־k ואפסים ביתר השורות,

(ii′) ובשורה ה־k יש רק אפסים לפני העמודה ה־j_k.

(iii′) בשורות $k+1, \ldots, m$ יש רק אפסים בעמודות שלפני העמודה ה־j_k.

ולכן אפשר להמשיך הלאה באותו אופן. שים לב שכל הפעולות האלמנטריות שעשינו עד כה לא שינו את העמודות שלפני העמודה ה־j_k.)

את היחידות נוכיח אחרי המשפט הבא. ∎

משפט 2.23: אם A, B *מדורגות קנונית ושקולות שורות (כלומר ניתן להגיע על ידי סדרה של פעולות אלמנטריות מ־A ל־B,* *אז* $A = B$.

הוכחה: באינדוקציה על מספר העמודות.

(א) נניח כי ב־A, B רק עמודה אחת.

ראינו שיש רק שתי מטריצות מדורגות קנונית מסדר $m \times 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (1, 0, \ldots, 0)^t, 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (0, 0, \ldots, 0)^t$$

אם $A = 0$, אז כל פעולה אלמנטרית לא תשנה אותה, ולכן גם $B = 0$. אם $A \neq 0$, אז גם $B \neq 0$ (אחרת, אם $B = 0$, אפשר להגיע מ־B ל־A על ידי סדרה של פעולות אלמנטריות ולכן $A = 0$, סתירה). לכן, לפי תרגיל 2.20(א), $A = (1, 0, 0, \ldots, 0)^t = B$.

(ב) נניח שהטענה נכונה למטריצות מסדר $m \times n$, כאשר A, B מסדר $m \times (n+1)$. תהיינה A', B' המטריצות מסדר $m \times n$ המתקבלות מן A, B על ידי השמטת העמודה האחרונה. לפי תרגיל 2.19(iii) הן מדורגות קנונית.

אותה סדרה של פעולות אלמנטריות שמעבירה את A ל־B, מעבירה את A' ל־B'. לכן לפי הנחת האינדוקציה $A' = B'$. לכן אפשר לכתוב

$$A' = B' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

צריך להוכיח: גם העמודות האחרונות של A, B שוות זו לזו.

יהי r' מספר העמודות המובילות (כלומר, מספר השורות השונות מאפס) ב־$A' = B'$. למערכות המשוואות הלינאריות שמתאימות ל־A ול־B (כמטריצות המורחבות) יש אותה קבוצת הפתרון P, לפי למה 2.6.

אם P ריקה, אז, לפי אלגוריתם 2.21, העמודה האחרונה של A, B היא מובילה, כלומר יש בה אפסים פרט ל־1 בשורה ה־$(r'+1)$. בפרט העמודות האחרונות ב־A, B שוות.

אם P אינה ריקה, יש פתרון $(x_1, \ldots, x_n) \in P$. נציב אותו בשתי המערכות: לכל $1 \leq i \leq m$

$$,a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \qquad ,a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = c_i$$

ומכאן $b_i = c_i$. לכן העמודות האחרונות ב־A, B שוות. ∎

מסקנה 2.24: *תהיינה B, C מדורגות קנונית. אם ממטריצה A ניתן להגיע על ידי פעולות אלמנטריות ל־B וגם ל־C, אז $B = C$.*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ B \arrow[rr, dotted] & & C \end{tikzcd}$$

הוכחה: ניתן להגיע על ידי פעולות אלמנטריות מ־A ל־B, לכן ניתן להגיע על ידי פעולות אלמנטריות (הפוכות) מ־B ל־A. כמו כן ניתן להגיע על ידי פעולות אלמנטריות מ־A ל־C. לכן ניתן להגיע על ידי פעולות אלמנטריות מ־B (דרך A) ל־C. לפי המשפט הקודם, $B = C$. ∎

בעקבות המסקנה נוכל להגדיר לכל מטריצה A את **המטריצה המדורגת קנונית של** A כמטריצה (היחידה) המדורגת קנונית השקולה לה, כלומר, שניתן להגיע אליה מ־A על ידי פעולות אלמנטריות.

הגדרה 2.25: תהי A מטריצה. **הדרגה** של A היא מספר השורות השונות מאפס במטריצה המדורגת קנונית של A. זהו גם מספר העמודת המובילות במטריצה המדורגת קנונית של A. הדרגה של A תסומן $\mathrm{rk}(A)$.

מסקנה 2.26: *תהי* $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$*. אז* $0 \leq \mathrm{rk}(A) \leq m, n$.

הוכחה: המטריצה המדורגת קנונית של A היא מסדר $m \times n$, לכן מספר השורות השונות מאפס בה $\geq m$ ומספר העמודות המובילות בה $\geq n$. ∎

מסקנה 2.27: *אם* A, B *מטריצות שקולות, יש להן אותה הדרגה.*

הוכחה: ניתן להגיע על ידי פעולות אלמנטריות מ־A ל־B, וממנה למטריצה המדורגת קנונית C של B. לכן ל־A, B אותה מטריצה מדורגת קנונית C. ∎

מסקנה 2.28: *תהי A מטריצת המקדמים המורחבת של מערכת משוואות לינאריות ב־n נעלמים ותהי A' מטריצת המקדמים המצומצמת שלה. אז $\mathrm{rk}(A') = \mathrm{rk}(A)$ או $\mathrm{rk}(A') = \mathrm{rk}(A) - 1$. כמו כן*

(א) *אם $\mathrm{rk}(A') < \mathrm{rk}(A)$ (כלומר $\mathrm{rk}(A') = \mathrm{rk}(A) - 1$) אז אין פתרון למערכת.*

(ב) *אם $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A') = r$, יש פתרון (ואנחנו יכולים לרשום את קבוצת הפתרון כתלויה ב־$(n-r)$ פרמטרים).*

בפרט

(ג) *יש פתרון יחיד אם ורק אם $\mathrm{rk}(A') = \mathrm{rk}(A) = n$.*

הוכחה: תהי B המטריצה המדורגת קנונית של A ותהי B' המטריצה מתקבלת ממנה על ידי השמטת העמודה האחרונה. אז גם B' מדורגת קנונית. אותן הפעולות האלמנטריות שמעבירות את A ל־B מעבירות את A' ל־B'. לכן (על ידי החלפת A ב־B ו־A' ב־B', החלפה שאינה משנה את קבוצת הפתרון) נוכל להניח כי A, A' מדורגות קנונית.

כעת, אם העמודה האחרונה של A מובילה, אז $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A') + 1$ וראינו שאין פתרון. אם העמודה האחרונה של A אינה מובילה, אז $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A')$ וראינו שקבוצת הפתרון תלויה ב־$(n-r)$ פרמטרים. מכאן (בדוק!) (א), (ב). חלק (ג) נובע מ־(ב). ∎

אם המערכת היא הומוגנית, אז ב־A –ולכן גם במטריצה המדורגת קנונית שלה– העמודה האחרונה היא עמודת אפסים, ולכן אינה מובילה. לכן במקרה זה $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A')$ ויש פתרון. אך קל לראות זאת גם אחרת: $(0, 0, \ldots, 0)$ הוא פתרון. הוא נקרא **הפתרון הטריוויאלי**.

מסקנה 2.29: *למערכת הומוגנית יש תמיד פתרון. יש לה פתרון טריוויאלי בלבד אם ורק אם דרגת מטריצת המקדמים המצומצמת שווה למספר הנעלמים.*

בסעיף זה יהי F שדה כלשהו. סקלר פירושו איבר של F.

כאמור,

הגדרה 3.1: **מטריצה מסדר** $m \times n$ **מעל** F היא מלבן של איברי F מסדר $m \times n$ מעל F. רישום:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

באשר $a_{ij} \in F$ לכל $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$. רישום מקוצר: $A = (a_{ij})$.

אוסף כל המטריצות מסדר $m \times n$ מעל F יסומן $\mathrm{M}_{m\times n}(F)$. נכתוב בדרך כלל $\mathrm{M}_n(F)$ במקום $\mathrm{M}_{n\times n}(F)$. נסמן $F^n = \mathrm{M}_{n\times 1}(F)$.

רישום נוסף: אם A מטריצה אז $(A)_{ij}$ מסמן את הרכיב שלה בשורה ה־i ובעמודה ה־j (בסימון לעיל, $(A)_{ij} = a_{ij}$).

הגדרה 3.2: ***חיבור של שתי מטריצות, כפל מטריצה בסקלר ונגדי של מטריצה.*** תהיינה $A, B \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ ויהי $\alpha \in F$.

(א) $A + B \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ מוגדרת על ידי: $(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$,

(ב) $\alpha A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ מוגדרת על ידי: $(\alpha A)_{ij} = \alpha(A)_{ij}$,

(ג) נגדיר גם $-A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ על ידי $(-A)_{ij} = -(A)_{ij}$,

(ד) **ומטריצת האפס** $0 \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ על ידי $(0)_{ij} = 0$,

לכל $1 \le i \le m$ ולכל $1 \le j \le n$. ∎

תכונות (שקל לבדוק אותן):

משפט 3.3: *מתקיימים החוקים הבאים, לכל* $A, B, C \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ *ולכל* $\alpha, \beta \in F$:

(ח1) *אסוציאטיביות החיבור:* $(A+B)+C = A+(B+C)$.

(ח2) *תכונת איבר האפס:* $B+0 = B = 0+B$.

(ח3) *תכונת איבר נגדי:* $B+(-B) = 0 = (-B)+B$.

(ח4) *קומוטטיביות החיבור:* $A+B = B+A$.

(כ1) *חוק הפילוג:* $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.

(כ2) *חוק הפילוג:* $(\alpha+\beta)B = \alpha B + \beta B$.

(כ3) *אסוציאטיביות הכפל בסקלר:* $(\alpha\beta)B = \alpha(\beta B)$.

(כ4) $1B = B$.

נדגים, למשל, את ההוכחה של (ח1): לכל i, j מתקיים

$$
\begin{aligned}
((A+B)+C)_{ij} &= (A+B)_{ij} + (C)_{ij} = \big((A)_{ij} + (B)_{ij}\big) + (C)_{ij} = \\
&= (A)_{ij} + \big((B)_{ij} + (C)_{ij}\big) = (A)_{ij} + (B+C)_{ij} = (A+(B+C))_{ij}
\end{aligned}
$$

נגדיר כפל בין מטריצות:

הגדרה 3.4: תהיינה $A\in \mathrm{M}_{m\times p}(F), B\in \mathrm{M}_{p\times n}(F)$. נגדיר $AB\in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ על ידי

$$(AB)_{ij}=(A)_{i1}(B)_{1j}+(A)_{i2}(B)_{2j}+\cdots+(A)_{ip}(B)_{pj}=\sum_{k=1}^{p}(A)_{ik}(B)_{kj},$$

לכל $1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n$

(ובמלים: הרכיב בשורה ה־i ובעמודה ה־j של המכפלה AB הוא סכום של מכפלות רכיבי השורה ה־i של A ברכיבי עמודה ה־j של B, בהתאמה.)

דוגמאות3.5:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\alpha+b\beta+c\gamma & a\alpha'+b\beta'+c\gamma' \\ a'\alpha+b'\beta+c'\gamma & a'\alpha'+b'\beta'+c'\gamma' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a+\alpha' a' & \alpha b+\alpha' b' & \alpha c+\alpha' c' \\ \beta a+\beta' a' & \beta b+\beta' b' & \beta c+\beta' c' \\ \gamma a+\gamma' a' & \gamma b+\gamma' b' & \gamma c+\gamma' c' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לא כל שתי מטריצות ניתן להכפיל. אך גם כאשר שתי מטריצות ריבועיות A, B מאותו סדר, לא בהכרח מתקיים $AB = BA$, ויתכן ש־$A, B \neq 0$ אך $AB = 0$ (לפי הדוגמאות לעיל). אנו רואים מהדוגמאות שהכפל אינו חילופי.

סימון 3.6: אם $B_1, B_2, \ldots, B_n \in F^m = \mathrm{M}_{m\times 1}(F)$ עמודות, אז $(B_1, \ldots, B_n)$ מסמן את המטריצה מסדר $m \times n$ ש־$B_1, \ldots, B_n$ הן העמודות שלה.

נסמן גם

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_m(F), \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in F^m$$

(סימון זה תלוי ב־m, שצריך להיות ברור מההקשר). אז $I_m = (e_1, e_2, \ldots, e_m) \in \mathrm{M}_m(F)$.

תרגיל 3.7: תהיינה $A \in \mathrm{M}_{m\times p}(F), (B_1,\dots,B_n) \in \mathrm{M}_{p\times n}(F)$, אז

$$A(B_1,\dots,B_n) = (AB_1,\dots,AB_n).$$

הוכחה: מתקיים $B_1,\dots,B_n \in F^p = \mathrm{M}_{p\times 1}(F)$ ו־$AB_1,\dots,AB_n \in \mathrm{M}_{m\times 1}(F) = F^m$.
יהיו $1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$. אז

$$\begin{aligned}(A(B_1,\dots,B_n))_{ij} &= \sum_{k=1}^{p}(A)_{ik}((B_1,\dots,B_n))_{kj} = \sum_{k=1}^{p}(A)_{ik}(B_j)_{k1} = (AB_j)_{i1} \\ &= ((AB_1,\dots,AB_n))_{ij}.\end{aligned}$$ ∎

תרגיל 3.8: תהי $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$. אז Ae_j (באשר $e_j \in F^n$ הוגדרה לעיל) היא העמודה ה־j של A. ∎

פתרון: בדיקה ישירה:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{1j} & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$ ∎

נראה בעזרת תרגיל 3.7 ש־$AI_n = A$. נניח $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$. אז

$$AI_n = A(e_1, e_2, \dots, e_n) = (Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n) = (A_1, A_2, \dots, A_n) = A$$ ∎

משפט 3.9: *מתקיימים החוקים הבאים:*

(1) *אסוציאטיביות הכפל:* $(AB)C = A(BC)$, לכל $C \in \mathrm{M}_{q\times n}(F)$, $B \in \mathrm{M}_{p\times q}(F)$, $A \in \mathrm{M}_{m\times p}(F)$.

(2) *חוק הפילוג:* $A(B+C) = AB + AC$ לכל $B, C \in \mathrm{M}_{p\times n}(F)$ ולכל $A \in \mathrm{M}_{m\times p}(F)$.

(3) *חוק הפילוג:* $(A+B)C = AC + BC$ לכל $C \in \mathrm{M}_{p\times n}(F)$ ולכל $A, B \in \mathrm{M}_{m\times p}(F)$.

(4) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$, לכל $B \in \mathrm{M}_{p\times n}(F)$, $A \in \mathrm{M}_{m\times p}(F)$, ולכל $\alpha \in F$.

(5) *מטריצה* $I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_m(F)$ *שנקראת* **מטריצת היחידה** *מסדר* $m \times m$,

מקיימת $I_m A = A$ לכל $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$. כמו כן $BI_n = B$ לכל $B \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$.

הוכחה:

(כו) **אסוציאטיביות הכפל:** $(AB)C = A(BC)$, לכל $C \in \mathrm{M}_{q\times n}(F)$,$B \in \mathrm{M}_{p\times q}(F)$,$A \in \mathrm{M}_{m\times p}(F)$.

נשים לב שכל המכפלות מוגדרות (למשל, AB מסדר $m \times q$ ולכן $(AB)C$ מוגדרת) ושני האגפים מסדר $m \times n$.

יהיו $1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$. נראה ש־$((AB)C)_{ij} = (A(BC))_{ij}$.

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{k=1}^{q}(AB)_{ik}(C)_{kj} = \sum_{k=1}^{q}\Big[\sum_{\ell=1}^{p}(A)_{i\ell}(B)_{\ell k}\Big](C)_{kj} = \sum_{k=1}^{q}\Big[\sum_{\ell=1}^{p}(A)_{i\ell}(B)_{\ell k}(C)_{kj}\Big]$$

ואילו

$$(A(BC))_{ij} = \sum_{\ell=1}^{p}(A)_{i\ell}(BC)_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^{p}(A)_{i\ell}\Big[\sum_{k=1}^{q}(B)_{\ell k}(C)_{kj}\Big] = \sum_{\ell=1}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{q}(A)_{i\ell}(B)_{\ell k}(C)_{kj}\Big].$$

ושני האגפים הימניים שווים: שניהם הסכום של כל $(A)_{i\ell}\ (B)_{\ell k}(C)_{kj}$, באשר $1 \le \ell \le p$, $1 \le k \le q$, אך בכל אחד סדר המחוברים שונה.

(2) **חוק הפילוג:** $A(B+C) = AB + AC$ לכל $B, C \in \mathrm{M}_{p\times n}(F)$ ולכל $A \in \mathrm{M}_{m\times p}(F)$.

(2) שוב, נשים לב שמבחינת הסדרים של המטריצות כל המכפלות והסכומים מוגדרים.

יהיו $1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$. נראה ש־$(A(B+C))_{ij} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij}$.

$$\begin{aligned}(A(B+C))_{ij} &= \sum_{k=1}^{p}(A)_{ik}(B+C)_{kj} = \sum_{k=1}^{p}(A)_{ik}[(B)_{kj} + (C)_{kj}] \\ &= \sum_{k=1}^{p}(A)_{ik}(B)_{kj} + (A)_{ik}(C)_{kj} = \sum_{k=1}^{p}(A)_{ik}(B)_{kj} + \sum_{k=1}^{p}(A)_{ik}(C)_{kj} \\ &= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = (AB+AC)_{ij}\end{aligned}$$

∎

הערה 3.10: רישום מערכת משוואות לינאריות בעזרת מטריצות. תהי נתונה מערכת של m משוואות לינאריות ב־n נעלמים. יהיו

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

עמודת האיברים החפשיים שלה והמטריצה המצומצמת שלה, בהתאמה. אז עמודה $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$ היא פתרון אם ורק אם $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. לכן רושמים לפעמים את המערכת באופן סמלי כך: $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$.

הגדרה 3.11: תהי $A \in \mathrm{M}_m(F)$. מטריצה $B \in \mathrm{M}_m(F)$ תקרא **ההפכי של** A אם $AB = BA = I_m$. סימון: $B = A^{-1}$. מטריצה A תקרא **הפיכה** (**רגולרית, לא סינגולרית**) אם יש לה הפכי.

טענה 3.12: *אם למטריצה יש הפכי, הוא יחיד.*

הוכחה: יהיו B, B' שני הפכיים של A. אז $B' = I_mB' = (BA)B' = B(AB') = BI_m = B$. ∎

דוגמה 3.13: I_m הפיכה: $I_m^{-1} = I_m$. מטריצה A שיש לה שורת אפסים אינה הפיכה (כי למטריצה AB שורת אפסים, לכל B). מטריצה A שיש לה עמודת אפסים אינה הפיכה (כי למטריצה BA עמודת אפסים, לכל B).

למה 3.14: אם $A,B\in \mathrm{M}_m(F)$ *הפיכות אז*

(א) AB *הפיכה ו־* $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

(ב) A^{-1} *הפיכה ו־* $(A^{-1})^{-1}=A$.

הוכחה: (א)

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=\big((AB)B^{-1}\big)A^{-1}=\big(A(BB^{-1})\big)A^{-1}=(AI_m)A^{-1}=AA^{-1}=I_m,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}\big(A^{-1}(AB)\big)=B^{-1}\big((A^{-1}A)B\big)=B^{-1}(I_mB)=B^{-1}B=I_m.$$

(ב) $AA^{-1}=I_m=A^{-1}A$. ∎

באינדוקציה ניתן להוכיח מכאן שמכפלת של k מטריצות הפיכות היא מטריצה הפיכה וההפכי שלה הוא מכפלת ההפכים של הגורמים בסדר הפוך. נשתמש בכך בהמשך.

סימון 3.15: אם $\mathcal{P}$ פעולה אלמנטרית ו־A מטריצה, אז $\mathcal{P}(A)$ מסמן את התוצאה של של פעולת $\mathcal{P}$ על A.

הגדרה 3.16: תהי $\mathcal{P}$ פעולה אלמנטרית על מטריצות בנות m שורות (ולא חשוב כמה עמודות).

אז $E_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}(I_m) \in \mathrm{M}_m(F)$ נקראת **המטריצה האלמנטרית המתאימה ל־$\mathcal{P}$**.

אם כן, מטריצות אלמנטריות הן משלושה סוגים (הרכיבים הלא רשומים הם 0):

$$\mathcal{P}_{ij}: \quad \begin{array}{c c} & \begin{matrix} & & & i & & & & j & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathcal{P}_i(\alpha): \quad \begin{array}{c c} & \begin{matrix} & & & i & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathcal{P}_{ij}(\lambda): \quad \begin{array}{c c} & \begin{matrix} & & & i & & & & j & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & \cdots & & 1 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

משפט 3.17: *תהי* $\mathcal{P}$ *פעולה אלמנטרית. תהי* $A \in \mathrm{M}_{m\times n}$. אז $E_{\mathcal{P}}A = \mathcal{P}(A)$.

הוכחה: תהיינה $A_1, \dots A_n$ העמודות של A. אז

$$E_{\mathcal{P}}A = E_{\mathcal{P}}(A_1, \dots A_n) = (E_{\mathcal{P}}A_1, \dots E_{\mathcal{P}}A_n)$$

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A_1, \dots A_n) = (\mathcal{P}(A_1), \dots \mathcal{P}(A_n))$$

לכן די להוכיח $E_{\mathcal{P}}A_j = \mathcal{P}(A_j)$, לכל j, כלומר, די להוכיח את המשפט עבור עמודה $A = (a_1, \dots, a_m)^t \in \mathrm{M}_{m\times 1}(F)$.

במקרה זה נעשה בדיקה ישירה. ∎

:$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{ij}$

$$\begin{array}{ccccc}
E_{\mathcal{P}} & & A & & \mathcal{P}(A) \\
\begin{array}{cc}
& \begin{array}{ccccccccc} &&&i&&j&&& \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&& \\
&& 1 &&&&&& \\
&&& 0 & \cdots & 1 &&& \\
&&&& 1 &&&& \\
&&& \vdots & \ddots & \vdots &&& \\
&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 & \cdots & 0 &&& \\
&&&&&& 1 && \\
&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}
\end{array}
&
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array}
&
\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_{j-1} \\ a_j \\ a_{j+1} \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}
\quad = \quad
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array}
&
\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_j \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_{j-1} \\ a_i \\ a_{j+1} \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}
\end{array}$$

:$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{ij}(\lambda)$

$$\begin{array}{ccccc}
E_{\mathcal{P}} & & A & & \mathcal{P}(A) \\
\begin{array}{cc}
& \begin{array}{ccccccccc} &&&i&&j&&& \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&& \\
&& 1 &&&&&& \\
&&& 1 & \cdots & 0 &&& \\
&&&& 1 &&&& \\
&&& \vdots & \ddots & \vdots &&& \\
&&&& 1 &&&& \\
&&& \lambda & \cdots & 1 &&& \\
&&&&&& 1 && \\
&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}
\end{array}
&
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array}
&
\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_{j-1} \\ a_j \\ a_{j+1} \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}
\quad = \quad
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array}
&
\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_{j-1} \\ a_j + \lambda a_i \\ a_{j+1} \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}
\end{array}$$

מסקנה 3.18: *מטריצה אלמנטרית $E_{\mathcal{P}}$ היא הפיכה, $E_{\mathcal{P}}^{-1} = E_{\mathcal{P}'}$, באשר $\mathcal{P}'$ הפעולה ההפוכה ל־$\mathcal{P}$.*

הוכחה: (1) בדיקה ישירה. או:

(2) $E_{\mathcal{P}}E_{\mathcal{P}'} = E_{\mathcal{P}}\mathcal{P}'(I_m) = \mathcal{P}(\mathcal{P}'(I_m)) = I_m$. באופן דומה $E_{\mathcal{P}'}E_{\mathcal{P}} = I_m$. ∎

משפט 3.19: *תהי $P \in \mathrm{M}_m(F)$, ותהי P' המטריצה המדורגת קנונית שלה. התנאים הבאים שקולים זה לזה:*

(1) *P הפיכה;*

(2) $\mathrm{rk}(P) = m$;

(3) $P' = I_m$;

(4) *P מכפלה של מטריצות אלמנטריות.*

הוכחה: לפי משפט 3.17: $P' = E_{\mathcal{P}_k} \cdots E_{\mathcal{P}_2} E_{\mathcal{P}_1} P$ באשר $E_{\mathcal{P}_1}, E_{\mathcal{P}_2}, \ldots, E_{\mathcal{P}_k}$ מטריצות אלמנטריות.

(1) $\Leftarrow$(2) : $E_{\mathcal{P}_1}, E_{\mathcal{P}_2}, \ldots, E_{\mathcal{P}_k}, P$ הפיכות, לכן $P' = E_{\mathcal{P}_k} \cdots E_{\mathcal{P}_1} E_{\mathcal{P}_2} P$ הפיכה. בפרט אין בה שורות אפסים. לכן $\mathrm{rk}(P) = m$. (לפי ההגדרה, $\mathrm{rk}(P)$ הוא מספר השורות השונות מ־0 ב־P'.)

(2) $\Leftarrow$(3) : ב־P' יש m עמודות מובילות $e_1, \ldots, e_m$. היות ויש לה בדיוק m עמודות, אלה כל עמודותיה. לכן $P' = (e_1, \ldots, e_m) = I_m$.

(3) $\Leftarrow$(4) : מתקיים $E_{\mathcal{P}_1}^{-1} E_{\mathcal{P}_2}^{-1} \cdots E_{\mathcal{P}_k}^{-1} P' = P$. אבל לפי מסקנה 3.18 כל $E_{\mathcal{P}_j}^{-1}$ היא אלמנטרית, ונתון ש־$P' = I_m$, לכן P מכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(4) $\Leftarrow$(1) : מטריצות אלמנטריות הפיכות, לכן מכפלתן P הפיכה אף היא. ∎

מסקנה 3.20: *תהיינה* $A, B \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$. *אפשר לעבור מ־*$A$ *ל־*B *על ידי סדרה של פעולות אלמנטריות אם ורק אם* $B = PA$, *באשר* $P \in \mathrm{M}_m(F)$ *הפיכה.*

הוכחה: $B = \mathcal{P}_k(\cdots(\mathcal{P}_2(\mathcal{P}_1(A)))\cdots)$ אם ורק אם $B = E_{\mathcal{P}_k}\cdots E_{\mathcal{P}_2}E_{\mathcal{P}_1}A$ אם ורק אם $B = PA$, באשר P מכפלה של מטריצות אלמנטריות. התנאי האחרון שקול לפי משפט 3.19 לכך ש־P הפיכה. ∎

מסקנה 3.21: *תהי* $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ *ותהי* $P \in \mathrm{M}_m(F)$ *הפיכה. אז* $\mathrm{rk}(PA) = \mathrm{rk}(A)$.

הוכחה: לפי המסקנה הקודמת PA מתקבלת מ־A על ידי סדרה של פעולות אלמנטריות. לכן לשתיהן אותה מטריצה מדורגת קנונית ולכן דרגותיהן שוות. ∎

מסקנה 3.22: *תהיינה* $B \in \mathrm{M}_{p\times n}(F)$, $A \in \mathrm{M}_{m\times p}(F)$.

(א) $\mathrm{rk}(AB) \le \mathrm{rk}(A)$.

(ב) *אם* B *הפיכה אז* $\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(A)$.

הוכחה: (א) יש $P \in \mathrm{M}_m(F)$ הפיכה כך ש-PA מדורגת קנונית. לפי המסקנה הקודמת $\mathrm{rk}(PA) = \mathrm{rk}(A)$, $\mathrm{rk}(PAB) = \mathrm{rk}(AB)$. לכן די להוכיח $\mathrm{rk}(PAB) \le \mathrm{rk}(PA)$, כלומר, די להוכיח את הטענה המקורית עבור PA במקום עבור A. לכן ניתן להניח ש-A מדורגת קנונית.

יהי $r = \mathrm{rk}(A)$. אז $m-r$ השורות האחרונות של A הן שורות אפסים. לפי כלל הכפל גם $m-r$ השורות האחרונות של AB הן שורות אפסים. אפשר לקבל את המטריצה המדורגת קנונית של AB על ידי פעולות אלמנטריות רק על r השורות הראשונות שלה (ולא לגעת בשורות האפסים בסוף). מכאן שבמטריצה המדורגת קנונית של AB לפחות $m-r$ שורות של אפסים, ולכן $\mathrm{rk}(AB) \le r$.

(ב) לפי (א), $\mathrm{rk}(AB) \le \mathrm{rk}(A)$ וגם $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}((AB)B^{-1}) \le \mathrm{rk}(AB)$. לכן יש שוויון. ∎

מסקנה 3.23: *תהי* $P \in \mathrm{M}_m(F)$*. התנאים הבאים שקולים זה לזה:*

(1) P *הפיכה (כלומר יש* $Q \in \mathrm{M}_m(F)$ *כך ש-* $PQ = I_m = QP$ *).*

(2) *יש* $Q \in \mathrm{M}_m(F)$ *כך ש-* $PQ = I_m$*.*

(3) *יש* $Q \in \mathrm{M}_m(F)$ *כך ש-* $QP = I_m$*.*

הוכחה: (1) ⇐(2), (3) - ברור.

(2) ⇐(1): $m = \mathrm{rk}(I_m) = \mathrm{rk}(PQ) \leq \mathrm{rk}(P) \leq m$, לכן $\mathrm{rk}(P) = m$. מכאן ש-P הפיכה.

(3) ⇐(1): לפי (2) ⇐(1), Q הפיכה. לכן $P = Q^{-1}(QP) = Q^{-1}I_m = Q^{-1}$, ובפרט P הפיכה.

∎

אלגוריתם 3.24: מציאת ההפכי של מטריצה $A \in \mathrm{M}_m(F)$. –על ידי דירוג:

(1) רשום את A, I_m זו ליד זו, כמטריצה מסדר $m \times 2m$, כך: $(A|I_m)$.

(2) בצע פעולות אלמנטריות על מטריצה זו, עד שתגיע למטריצה $(A'|B)$, באשר A' המטריצה המדורגת קנונית של A.

(3) אם $A' \neq I_m$, ל-A אין הופכי.

(4) אם $A' = I_m$, ל-A יש הופכי: $A^{-1} = B$.

הוכחה: (4) יש פעולות אלמנטריות $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$, כך שמתקיים $A' = \mathcal{P}_k(\cdots(\mathcal{P}_2(\mathcal{P}_1(A)))\cdots)$. לפי הבניה, $B = \mathcal{P}_k(\cdots(\mathcal{P}_2(\mathcal{P}_1(I_m)))\cdots)$. לכן

$$E_{\mathcal{P}_k} \cdots E_{\mathcal{P}_1} A = A' = I_m \qquad | \qquad E_{\mathcal{P}_k} \cdots E_{\mathcal{P}_1} I_m = B$$

מכאן $BA = I_m$. לכן לפי מסקנה 3.23, $B = A^{-1}$. ∎

דוגמה: תהי $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. בדוק אם A הפיכה, ואם כן, מצא את A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. ∎

הגדרה 3.25: תהי $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$. **המטריצה המוחלפת** A^t **של** A היא המטריצה שמתקבלת מ-A על ידי הפיכת השורות של A לעמודות. כלומר, אם

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$$

אז

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n\times m}(F)$$

ובסימון אחר: אם $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ אז $A^t \in \mathrm{M}_{n\times m}(F)$ מוגדרת על ידי $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$ לכל i, j.

למה 3.26 :*(א) תהיינה* $A,B\in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$. אז $(A+B)^t=A^t+B^t$.

(ב) *תהי* $A\in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ ו־$\alpha\in F$. אז $(\alpha A)^t=\alpha A^t$.

(ג) *תהי* $A\in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$. אז $(A^t)^t=A$.

(ד) *תהיינה* $A\in \mathrm{M}_{m\times p}(F), B\in \mathrm{M}_{p\times n}(F)$. אז $(AB)^t=B^tA^t$.

הוכחה: (ד) תחילה נשים לב ש־ $A^t\in \mathrm{M}_{p\times m}(F), B^t\in \mathrm{M}_{n\times p}(F)$, לכן B^tA^t מוגדרת ומסדר $m\times n$, שהוא הסדר של $(AB)^t$. כעת

$$((AB)^t)_{ij}=(AB)_{ji}=\sum_{k=1}^{p}(A)_{jk}(B)_{ki}=\sum_{k=1}^{p}(A^t)_{kj}(B^t)_{ik}=\sum_{k=1}^{p}(B^t)_{ik}(A^t)_{kj}=(B^tA^t)_{ij}$$

לכל i,j. ∎

תרגיל 3.27: אם $P\in \mathrm{M}_m(F)$ הפיכה אז גם P^t הפיכה ו־$(P^t)^{-1}=(P^{-1})^t$.

הוכחה: מתקיים $P^{-1}P=I_m=PP^{-1}$. מכאן $(P^{-1})^tP^t=I_m^t=P^t(P^{-1})^t$. אך $I_m^t=I_m$. מכאן המסקנה. ∎

משפט 3.28: *תהי* $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$. *אז* $\mathrm{rk}(A^t) = \mathrm{rk}(A)$.

הוכחה: די להוכיח כי $\mathrm{rk}(A^t) \le \mathrm{rk}(A)$. אכן, אם זה נכון לכל A, אז גם נכון $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}((A^t)^t) \le \mathrm{rk}(A^t)$, ומכאן השוויון.

תהי B המטריצה המדורגת קנונית של A. אז $\mathrm{rk}(B) = \mathrm{rk}(A)$. כמו כן יש $P \in \mathrm{M}_m(F)$ הפיכה כך ש-$A = PB$. לפי למה 3.26(ד) $A^t = B^t P^t$, לכן לפי מסקנה 3.22(ב) $\mathrm{rk}(A^t) = \mathrm{rk}(B^t)$. די, איפוא, להוכיח $\mathrm{rk}(B^t) \le \mathrm{rk}(B)$. (במלים אחרות, די להוכיח $\mathrm{rk}(A^t) \le \mathrm{rk}(A)$ עבור A מדורגת קנונית.)

יהי $r = \mathrm{rk}(B)$. ב-B יש בדיוק r שורות שונות מאפס, לכן ב-B^t יש בדיוק r עמודות שונות מאפס. אם נעשה פעולות אלמנטריות על B^t, עמודות אפסים תשארנה עמודות אפסים. לכן במטריצה המדורגת קנונית של B^t יש לכל היותר r עמודות שונות מאפס, ובפרט לכל היותר r עמודות מובילות. מכאן $\mathrm{rk}(B^t) \le r$. ∎

המסקנה הבאה היא השלמה של מסקנה 3.22:

מסקנה 3.29: *תהיינה* $B \in \mathrm{M}_{p\times n}(F)$, $A \in \mathrm{M}_{m\times p}(F)$. *אז* $\mathrm{rk}(AB) \le \mathrm{rk}(B)$.

הוכחה: לפי המשפט הקודם ולפי מסקנה 3.22 $\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}((AB)^t) = \mathrm{rk}(B^t A^t) \le \mathrm{rk}(B^t) = \mathrm{rk}(B)$.
∎

כפל של מטריצות של גושים.

יהי F שדה. מטריצה מסדר $\sum_{k=1}^{r} m_k \times \sum_{k=1}^{s} n_k$ מעל F ניתן לחלק ל-$r \times s$ גושים: המטריצה נראית כך

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \dots & n_s \end{array} \\ \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array} & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rs} \end{pmatrix} \end{array}$$

באשר (המספרים משמאל ומעל למטריצה מסמנים את גדלי הגושים) $A_{ij} \in \mathrm{M}_{m_i \times n_j}(F)$ לכל i, j. מטריצה שרשומה כך נקראת **מטריצה של גושים.**

משפט 3.30 (מכפלה של מטריצות של גושים): *מכפלה של מטריצות גושים היא מטריצת גושים:*

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & \dots & p_s \end{array} \\ \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array} & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rs} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \dots & n_t \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_s \end{array} & \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{s1} & B_{s2} & \dots & B_{st} \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \dots & n_t \end{array} \\ \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array} & \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{r1} & C_{r2} & \dots & C_{rt} \end{pmatrix} \end{array}$$

באשר $C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{is}B_{sj} = \sum_{k=1}^{s} A_{ik}B_{kj}$ *לכל* i, j.

הוכחה: כיוון שהסימונים מסובכים (בגלל הרבה אינדקסים) נטפל קודם במקרה פרטי של מטריצות בעלות 2×2 גושים. במקרה זה אפשר לנסח את המשפט כך:

$$\begin{array}{c|cc} & p_1 & p_2 \\ \hline m_1 & A & B \\ m_2 & C & D \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} & n_1 & n_2 \\ \hline p_1 & P & Q \\ p_2 & R & S \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c|cc} & n_1 & n_2 \\ \hline m_1 & AP+BR & AQ+BS \\ m_2 & CP+DR & CQ+DS \end{array}$$

נוכיח נוסחה זו: תחילה נשים לב שהמכפלות $AP, BR, AQ, BS, CP, DR, CQ, DS$ מוגדרות וכן מוגדרים הסכומים $AP+BR, AQ+BS, CP+DR, CQ+DS$, והמטריצה בשני האגפים מאותו הסדר שהינו $(m_1+m_2)\times(n_1+n_2)$. נותר לבדוק שהרכיבים המתאימים בשני האגפים שווים.

למשל, נחשב את הרכיב ה־(m_1+i, j) בשני האגפים, באשר $1 \le i \le m_2,\ 1 \le j \le n_1$.
באגף שמאל רכיב זה מתקבל על ידי הכפלת השורה ה־m_1+i של $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ שהיא

$$\big((C)_{i1}, (C)_{i2}, \ldots, (C)_{i\,p_1},\ (D)_{i1}, (D)_{i2}, \ldots, (D)_{i\,p_2}\big)$$

בעמודה ה־j של $\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$ שהיא

$$\big((P)_{1j}, (P)_{2j}, \ldots, (P)_{p_1\,j},\ (R)_{1j}, (R)_{2j}, \ldots, (R)_{p_2\,j}\big)^t.$$

מכפלתן היא

$$\begin{aligned} &(C)_{i1}(P)_{1j} + (C)_{i2}(P)_{2j} + \cdots + (C)_{i\,p_1}(P)_{p_1\,j} + \\ &+ (D)_{i1}(R)_{1j} + (D)_{i2}(R)_{2j} + \cdots + (D)_{i\,p_2}(R)_{p_2\,j} = (CP)_{ij} + (DR)_{ij} = (CP+DR)_{ij} \end{aligned}$$

וזה בדיוק הרכיב ה־(m_1+i, j) באגף ימין, שהינו $(CP+DR)_{ij}$. בזאת הסתיימה ההוכחה של המקרה הפרטי.

מסקנה 3.31: *תהיינה* $A \in \mathrm{M}_{m\times s}(F)$, $B \in \mathrm{M}_{s\times n}(F)$, *תהיינה* $A_1, \ldots, A_s$ *העמודות של* A, ו־$B_1, \ldots, B_s$ *השורות של* B. *אז*

$$AB = (\, A_1, \quad \ldots \quad , A_s\,) \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_s \end{pmatrix} = (\, \textstyle\sum_{k=1}^{s} A_k B_k\,) \in \mathrm{M}_{m\times n}(F).$$

הוכחה: הפעל את המשפט עם $r=1, t=1, p_1 = \cdots = p_s = 1$. ∎

תרגיל 3.32: *תהיינה* $A_1, \ldots, A_n \in F^m$ *העמודות של* $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$, *ויהיו* $c_1, \ldots, c_n \in F$. *אז*

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1 A_1 + \cdots + c_n A_n.$$

הוכחה: לפי המסקנה, אגף שמאל שווה למטריצה $A_1(c_1) + \cdots + A_n(c_n)$. כעת רק צריך לשים לב ש־$c_i A_i = A_i(c_i)$ לכל i ($A_i(c_i)$ הוא מטריצה מסדר $m \times 1$, מכפלת המטריצה A_i מסדר $m \times 1$ במטריצה (c_i) מסדר 1×1). ∎

$$A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F), \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in F^n = \mathrm{M}_{1\times n}(F), \quad c_1A_1 + \cdots + c_nA_n \in F^m = \mathrm{M}_{1\times m}(F)$$

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = (A_1, \ldots, A_n) \begin{pmatrix} (c_1) \\ \vdots \\ (c_n) \end{pmatrix} = A_1(c_1) + \cdots + A_n(c_n)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} (c) = \begin{pmatrix} a_1 c \\ a_2 c \\ \vdots \\ a_m c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

תרגיל 3.33: *תהיינה* $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ ו־ $P \in \mathrm{M}_m(F)$. *תהיינה* $A_1, \ldots, A_m \in F^n$ השורות של A. אז השורות של PA הן

$$(P)_{i1}A_1 + (P)_{i_2}A_2 + \cdots + (P)_{im}A_m = \sum_{k=1}^{m} (P)_{ik}A_k, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

הוכחה: לפי המשפט, PA היא

$$\begin{pmatrix} ((P)_{11}) & \ldots & ((P)_{1m}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ ((P)_{m1}) & \ldots & ((P)_{mm}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m}((P)_{1k})A_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{m}((P)_{mk})A_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m}(P)_{1k}A_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{m}(P)_{mk}A_k \end{pmatrix} \blacksquare$$

$$(c)(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (ca_1, ca_2, \ldots, c_n) = c(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

תרגיל 3.34: *הוכח כי מטריצת הגושים* $M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \end{array}$ *הפיכה אם ורק אם* A, D *הפיכות ואם זה קורה אז* $N = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \end{array}$ *ההופכי שלה.*

בפרט, $M_0 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \end{array}$ *הפיכה אם ורק אם* A, D *הפיכות ואז* $M_0^{-1} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \end{array}$.

הוכחה: אם M הפיכה אז $M^{-1} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \end{array}$ ומתקיים $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = I_{m+n}$, כלומר, לפי המשפט,

$$\begin{pmatrix} AP+BR & AQ+BS \\ DR & DS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

מכאן

$$AQ+BS=0,\quad DR=0,\quad DS=I_n,\quad AP+BR=I_m.$$

מתוך $DS = I_n$ נסיק ש-D הפיכה ו-$S = D^{-1}$. מכאן, מתוך $DR = 0$, נסיק ש-$R = D^{-1}(DR) = 0$. לכן $AP + BR = I_m$ הופך להיות ל-$AP = I_m$ ומכאן נסיק ש-A הפיכה ו-$P = A^{-1}$. לבסוף, מתוך $AQ + BS = 0$ נסיק כי $Q = -A^{-1}BS = -A^{-1}BD^{-1}$. בסיכום: A, D הפיכות ו-$M^{-1} = N$.

להיפך, אם A, D מטריצות הפיכות, אז לפי המשפט, $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{m+n}$, לכן M הפיכה ו-$M^{-1} = N$. ∎

תרגיל 3.35: *הוכח כי מטריצת הגושים* $M=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & m\end{array}\\ \begin{array}{c} m\\ n\end{array} & \begin{pmatrix}A&B\\C&0\end{pmatrix}\end{array}$ *הפיכה אם ורק אם* B,C *הפיכות ואם זה קורה אז* $N=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n\end{array}\\ \begin{array}{c} n\\ m\end{array} & \begin{pmatrix}0&C^{-1}\\B^{-1}&-B^{-1}AC^{-1}\end{pmatrix}\end{array}$ *ההופכי שלה.*

בפרט, $M_0=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & m\end{array}\\ \begin{array}{c} m\\ n\end{array} & \begin{pmatrix}0&B\\C&0\end{pmatrix}\end{array}$ *הפיכה אם ורק אם* B,C *הפיכות ואז* $M_0^{-1}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n\end{array}\\ \begin{array}{c} n\\ m\end{array} & \begin{pmatrix}0&C^{-1}\\B^{-1}&0\end{pmatrix}\end{array}$.

הוכחה: כמו בתרגיל הקודם. יש לשים לב שסדרי הגושים של N שונים מהסדרים של הגושים ב־M, אך המכפלה MN מוגדרת ומתאימה לתנאי המשפט. ∎

תרגיל 3.36: *הוכח כי קיימת מטריצה הפיכה* $P \in \mathrm{M}_{m+n}(F)$ *כך שמתקיים*

$$.P^{-1} \begin{array}{cc} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \end{array} P = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} n & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} & \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \end{array}$$

הוכחה א': לפי תרגיל 3.35, $\begin{array}{cc} & \begin{matrix} n & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ הפיכה ו־ $\begin{array}{cc} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ ההופכי שלה. לפי המשפט

$$. \begin{array}{cc} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} n & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & D \\ A & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} n & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} n & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} & \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \end{array}$$

4. מרחבים וקטוריים

מרחבים ותת־מרחבים.

הגדרה 4.1: **שדה** היא קבוצה עם שתי פעולות, חיבור וכפל, שמקיימת כללים מסוימים ־ ראה הגדרה 1.4. (איבר של שדה נקרא **סקלר**.)

דוגמאות 4.2: $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. $\mathbb{Z}_p$, ושדה בן 4 איברים בדוגמה 1.5(ג).

הגדרה 4.3: **מרחב וקטורי** מעל שדה F היא קבוצה V, עליה מוגדרות שתי פעולות, חיבור $(+)$ וכפל (ללא סימון) של איברי V (שייקראו וקטורים) בסקלרים, אשר מקיימות את החוקים הבאים:

(ח0) קשירות החיבור:

לכל $u, v \in V$ **קיים** $w \in V$ **יחיד כך ש־**$u + v = w$.

(ח1) אסוציאטיביות החיבור:

$(u + v) + w = u + (v + w)$, **לכל** $u, v, w \in V$.

(ח2) קיום איבר האפס:

קיים איבר ב־V, המסומן 0, **המקיים** $v + 0 = v = 0 + v$, **לכל** $v \in V$.

(ח3) קיום איבר נגדי:

לכל $v \in V$ **קיים איבר** $-v \in V$ **המקיים** $v + (-v) = 0 = (-v) + v$.

(ח4) קומוטטיביות החיבור:

$u + v = v + u$, **לכל** $u, v \in V$.

(כ0) קשירות הכפל:

לכל $v \in V$ **ולכל** $a \in F$ **קיים** $w \in V$ **יחיד כך ש־**$av = w$.

(כ1) חוק הפילוג הוקטורי:

$a(u + v) = au + av$, **לכל** $u, v \in V$ **ולכל** $a \in F$.

(כ2) חוק הפילוג הסקלרי:

$(a + b)v = av + bv$, **לכל** $v \in V$ **ולכל** $a, b \in F$.

(כ3) אסוציאטיביות הכפל בסקלר:

$(ab)v = a(bv)$, **לכל** $v \in V$ **ולכל** $a, b \in F$.

(כ4) $1v = v$ **לכל** $v \in V$. (כאן $1 \in F$ **איבר היחידה של** F.)

דוגמאות 4.4:

(א) $\mathrm{M}_{m\times n}(F)$ הוא מרחב וקטורי מעל F.

(ב) (מקרה פרטי של (א)): $F^m = \mathrm{M}_{m\times 1}(F)$.

(ג) (מקרה פרטי של (ב)): $F = F^1$.

(ד) (יהי $F = \mathbb{R}$.) אוסף כל החצים מהראשית (או: כל הנקודות) במישור או במרחב התלת ממדי.

(ה) אוסף הפולינומים $F[X]$ עם מקדמים ב־F.

(ו) (יהי $F = \mathbb{R}$.) אוסף כל הפונקציות הממשיות (הרציפות) על הקטע $[0,1]$.

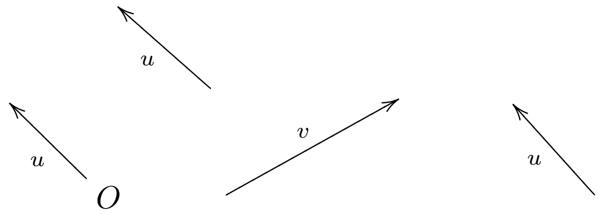
(ז) אוסף כל המשוואות הלינאריות ב־n נעלמים מעל F.

(ח) $\{0\}$.

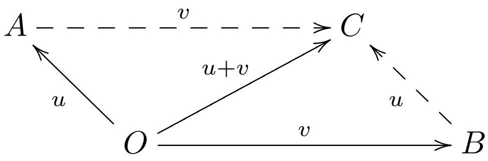
(ט) שדה כלשהו הוא מרחב וקטורי מעל תת שדה שלו; למשל, $\mathbb{C}$ הינו מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. (שוכחים מהכפל ב־$\mathbb{C}$, מתחשבים רק בכפל של אברי $\mathbb{R}$ באברי $\mathbb{C}$.)

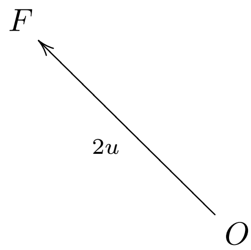
(ד) (יהי $F=\mathbb{R}$.) אוסף כל החצים במישור.

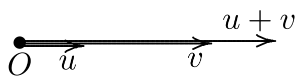
חצים באותו אורך ובאותו כיוון שווים זה לזה.

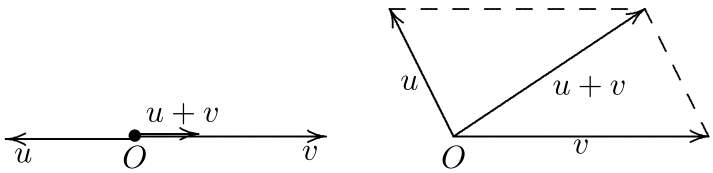


חיבור וכפל בסקלר:









יהי F שדה. **הפולינום** מעל F הוא ביטוי פורמלי מהצורה

$$a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n \qquad (\text{או בכתיב מקוצר: } \sum_{i=0}^{n} a_iX^i)$$

באשר $n \geq 0$ מספר שלם, ו־$a_0, a_1, \ldots, a_n \in F$ איברי F.

למשל, אם $F = \mathbb{R}$, אז

$$2X^0 + 3X^1 + (-8)X^2 + (-1)X^3 + 0X^4 + 1X^5,$$
$$0X^0 + 3X^1 + 0X^2 + \sqrt{2}X^3,$$
$$1X^0$$

הם פולינומים.

הערה: סימון. נהוגים כמה קיצורים ברישום של פולינומים:

(א) אין רושמים את X^0, כלומר, במקום a_0X^0 כותבים רק a_0.

(ב) במקום X^1 כותבים רק X.

(ג) במקום $1X^i$ כותבים רק X^i.

(ד) במקום $+(-a)X^i$ כותבים $-aX^i$.

(ה) משמיטים מחובר מהצורה $0X^i$.

לכן את הדוגמאות לעיל רושמים כך:

$$2 + 3X - 8X^2 - X^3 + X^5,$$
$$3X + \sqrt{2}X^3,$$
$$1$$

לפעמים רושמים את מחוברים סדר ההפוך, מהחזקה הגבוהה לנמוכה:

$$X^5 - X^3 - 8X^2 + 3X + 2,$$
$$\sqrt{2}X^3 + 3X,$$
$$1$$

דרך רישום נוספת: במקום $\sum_{i=0}^{n} a_iX^i$ רושמים $\sum_{i=0}^{\infty} a_iX^i$, כאשר $a_i = 0$ לכל $i > n$ (ולכן הכתיב הראשון הוא הקיצור של הכתיב האחרון). אז פולינום הוא ביטוי פורמלי מהצורה

$$a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 + \ldots \qquad (\text{או בכתיב מקוצר: } \sum_{i=0}^{\infty} a_iX^i)$$

בו שייכים ה־a_i־ים ל־F וכמעט כולם (=פרט למספר סופי) שווים לאפס.

שוויון פולינומים: $\sum_{i=0}^{\infty} a_iX^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_iX^i$ אם ורק אם $a_i = b_i$ לכל i. ∎

הערה: פולינום אינו פונקציה מ־F לתוך F. למשל, אם $F = \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ שדה בן שני איברים, אז $f = 1$ ו־$g = X^2 + X + 1$ שונים זה מזה, אז

$$f = 1$$

$$g = X^2 + X + 1$$

שונים זה מזה, אבל

$$g(0) = 1 = f(0)$$

$$g(1) = 1 + 1 + 1 = 1 = f(1)$$

כלומר, f, g שווים בתור פונקציות. ∎

בפולינום a_n של $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ האיברים a_i נקראים **מקדמי הפולינום**. אם $a_n \neq 0$, אז a_n נקרא **המקדם העליון**. אם $a_n = 1$ אומרים ש**הפולינום מתוקן**.

קבוצת הפולינומים מעל F תסומן $F[X]$. נגדיר עליה חיבור וכפל:

$$\Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i\Big) + \Big(\sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) X^i,$$

$$\Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} b_j X^j\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{i+j=k} a_i b_j\Big) X^k.$$

איבר האפס של $F[X]$ הוא $0 = \sum_{i=0}^{\infty} 0X^i$.

הסימון הזה של הפעולות עלול לכאורה לגרום לבילבול, כי, למשל, לביטוי $X + X^2$ שתי משמעויות: האחת: סכום ב־$F[X]$ של הפולינומים X ו־X^2, והשניה: הפולינום $0X^0 + 1X^1 + 1X^2 + 0X^3 + \cdots$. אך שני הביטוים שווים. באפן דומה aX אפשר להבין כפולינום $0X^0 + aX^1 + 0X^2 + \cdots$ או כמכפלה של הפולינומים a ו־X; שוב, שני הביטוים שווים.

את איברי $F[X]$ נהוג לסמן על ידי אותיות לטיניות קטנות, למשל f, או גם על ידי $f(X)$, אם רוצים להדגיש את התלות של f ב־X.

המעלה $\deg(f)$ של פולינום $f = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i$ מוגדרת כך: $\deg(f) = \max(i \mid a_i \neq 0)$, אם $f \neq 0$, ואילו $\deg 0 = -\infty$.

חשוב להדגיש: מרחב וקטורי אינו, לפי ההגדרה, אוסף של n־יות, ולכן אין משמעות לשאלה "מהו המימד של V?". (לשאלה זו תהיה משמעות מאוחר יותר, אך משמעות אחרת.) זוהי קבוצה כלשהי שעליה הוגדרה פעולת החיבור ופעולת הכפל בסקלר, כך שמתקיימות האקסיומות לעיל. לכאורה אפשר למצוא דוגמאות מאד מוזרות למרחבים וקטורים; אך הדבר אינו קל, בגלל שצריך לספק אקסיומות רבות.

למה 4.5: *יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F.*

(א) *איבר האפס של V הוא יחיד.*

(ב) *נגדי של איבר הוא יחיד.*

(ג) *כלל הצמצום: יהיו $v, u, u' \in V$. אם $v + u = v + u'$ אז $u = u'$.*

(ד) $0v = 0$ *לכל* $v \in V$

(ה) $a0 = 0$ *לכל* $a \in F$.

(ו) *אם* $av = 0$ *אז* $v = 0$ *או* $a = 0$.

(ז) $(-a)v = a(-v) = -(av)$.

הוכחה: (א) יהיו $0, 0'$ שני איברי אפס. אז $0' = 0' + 0 = 0$. (השוויון השמאלי הוא בגלל ש-0 הוא איבר האפס; השוויון הימני הוא בגלל ש-$0'$ הוא איבר האפס.)

(ב) יהיו v', v'' שני נגדיים של $v \in V$. אז

$$v' = v' + 0 = v' + (v + v'') = (v' + v) + v'' = 0 + v'' = v''.$$

(ג) $u = 0 + u = ((-v) + v) + u = (-v) + (v + u)$ ובאותו אופן $u' = (-v) + (v + u')$. לפי הנתון, $u = u'$.

(ד) $0v + 0v = (0 + 0)v = 0v = 0v + 0$. לפי (ג), $0v = 0$.

(ה) $a0 + a0 = a(0 + 0) = a0 = a0 + 0$. לפי (ג), $a0 = 0$.

(ו) נניח $a \neq 0$. (צריך להוכיח כי $v = 0$.) אז $v = 1v = (a^{-1}a)v = a^{-1}(av) = a^{-1}0 = 0$.

(ז) מתקיים $0 = 0v = (a + (-a))v = av + (-a)v$, לכן $(-a)v$ הוא הנגדי של av. כמו כן $0 = a0 = a(v + (-v)) = av + a(-v)$, לכן $a(-v)$ הוא הנגדי של av. ∎

הגדרה 4.6: קבוצה חלקית U של מרחב וקטורי V (מעל שדה F) נקראת **תת־מרחב** של V אם

(א) $0 \in U$;

(ב) U סגורה תחת החיבור, כלומר: אם $u_1, u_2 \in U$ אז גם $u_1 + u_2 \in U$;

(ג) U סגורה תחת הכפל בסקלר, כלומר: אם $u \in U$ ו־$a \in F$ אז גם $au \in U$.

משפט 4.7: *יהי U תת־מרחב של מרחב וקטורי V מעל שדה F. אז U הוא בעצמו מרחב וקטורי מעל F, וזאת ביחס לחיבור ולכפל בסקלר שמושרים מ־V.*

הוכחה: נבהיר תחילה למה הכוונה בפעולה מושרית: אם $u_1, u_2 \in U$, אז החיבור ביניהם מוגדר כחיבור ב־V. אם $u \in U$, $a \in F$ אז הכפל au מוגדר ככפל בסקלר ב־V. הקשירות של הפעולת החיבור נובעת מתנאי (ב); הקשירות של הכפל בסקלר נובעת מתנאי (ג).

קיום איבר האפס נובע מתנאי (א).

קיום איבר נגדי: יהי $u \in U$. אז יש לו נגדי $-u \in V$ (אך מראש לא ברור ש־$u \in U$). אך $-u = (-1)u \in U$, לפי תנאי (ג).

יתר הדרישות של הגדרה 4.3 מתקיימות ב־U כי הן מתקיימות ב־V (כל התכונות שמתקיימות **לכל** איברי V, מתקיימות בפרט לכל איברי U; הבעיה היתה רק עם אותן התכונות שדורשות **קיום** של איבר ב־U, כי מתוך כך שקיים איבר כזה ב־V אי אפשר להסיק שהוא קיים גם ב־U.) ∎

דוגמאות 4.8: דוגמאות לתת־מרחבים.

(א) $\{0\}$, V הם תת־מרחבים של מרחב וקטורי V.

(ב) אוסף כל הפתרונות של מערכת משוואות לינאריות הומוגנית ב־n נעלמים מעל שדה F הוא תת־מרחב של F^n.

(ג) אוסף כל הפולינומים עם מקדם חפשי 0 הוא תת־מרחב של $F[X]$.

(ד) אוסף כל הפולינומים ממעלה $\geq n$ הוא תת־מרחב של $F[X]$.

(ה) אם U_1, U_2 שניהם תת־מרחבים של V אז גם החיתוך שלהם $U_1 \cap U_2$ תת־מרחב של V.

צירופים לינאריים.

הגדרה 4.9: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ויהיו $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$. וקטור $v \in V$ ייקרא **צירוף לינארי של** $v_1, v_2, \ldots, v_k$ אם יש $a_1, a_2, \ldots, a_k \in F$ כך ש־$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k$.

אוסף כל הצירופים הלינאריים של $v_1, v_2, \ldots, v_k$ יסומן $\mathrm{Sp}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. כלומר,

$$\mathrm{Sp}(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \{a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k \mid a_1, a_2, \ldots, a_k \in F\}.$$

דוגמה 4.10: אם V הוא המרחב התלת ממדי, אז $(1,2,3)$ הוא צירוף לינארי של $(1,1,1),(0,1,2)$, אך $(1,1,0)$ אינו צירוף לינארי שלהם,

כי

$$(1,2,3) = 1(1,1,1) + 1(0,1,2)$$

אבל המשוואה הבאה

$$(1,1,0) = a(1,1,1) + b(0,1,2)$$

שקולה ל־

$$a = 1$$
$$a + b = 1$$
$$a + 2b = 0$$

ולזה אין פתרון.

דוגמאות 4.11: (א) אם $v \neq 0$, אז $\mathrm{Sp}(v) = \{av|\ a \in F\}$ מורכב מכל הכפולות של v. בפרט, אם v חץ מהראשית במרחב התלת ממדי, אז $\mathrm{Sp}(v)$ הוא הישר שמונח על חץ זה.

(ב) יהיו u, v שני חצים מהראשית במרחב התלת ממדי, שניהם שונים מ־0 ואינם על אותו ישר דרך הראשית. אז $\mathrm{Sp}(u, v)$ הוא המישור דרך שני החצים (שעובר דרך הראשית).

(ג) להגדרה לעיל יש גם משמעות במקרה $k = 0$. אז $\mathrm{Sp}(\emptyset) = \{0\}$.

משפט 4.12: *יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ויהיו $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$. נסמן $S = \mathrm{Sp}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. אז S הוא התת־מרחב הקטן ביותר שמכיל את $v_1, v_2, \ldots, v_k$. כלומר,*

(א) *S הוא תת־מרחב של V;*

(ב) *$v_1, v_2, \ldots, v_k \in S$;*

(ג) *אם U תת־מרחב של V ו־ $v_1, v_2, \ldots, v_k \in U$ אז $S \subseteq U$.*

הוכחה: (א)

(1) $0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_k \in S$

(2) אם $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k \in S$ ו־$v' = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_kv_k \in S$ אז $v + v' = (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + \cdots + (a_k + b_k)v_k \in S$.

(3) אם $v = a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_kv_k \in S$ ו־$\alpha \in F$ אז $\alpha v = (\alpha a_1)v_1+(\alpha a_2)v_2+\cdots+(\alpha a_k)v_k \in S$.

לכן S תת־מרחב.

(ב) $v_j = 0v_1 + \cdots + 0v_{j-1} + 1v_j + 0v_{j+1} \cdots + 0v_k \in S$.

(ג) צריך להוכיח שלכל $v \in S$ מתקיים $v \in U$.

יהי $v \in S$. אז יש $a_1, a_2, \ldots, a_k \in F$ כך ש־$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k$. כיוון ש־$U$ תת־מרחב של V ו־$v_j \in U$ אז גם $a_jv_j \in U$, לכל $1 \le j \le k$. שוב, כיוון ש־U תת־מרחב של V ו־$a_jv_j \in U$ לכל j, אז גם $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k \in U$. ∎

תרגיל 4.13: אם $u_1,\dots,u_r$ תת־סדרה של $v_1,\dots,v_k$ אז $\mathrm{Sp}(u_1,\dots,u_r)\subseteq\mathrm{Sp}(v_1,v_2,\dots,v_k)$.

הוכחה: אגף ימין הוא תת־מרחב שמכיל את $v_1,v_2,\dots,v_k$, ובפרט את $u_1,\dots,u_r$. לכן לפי המשפט הוא מכיל את אגף שמאל. ∎

תרגיל 4.14: יהי V מרחב וקטורי מעל F. נניח ש־$w_1,\dots,w_m$ הם צירופים לינאריים של $v_1,v_2,\dots,v_n$. אז $\mathrm{Sp}(v_1,\dots,v_n)=\mathrm{Sp}(v_1,\dots,v_n,w_1,\dots,w_m)$.
בפרט, $\mathrm{Sp}(v_1,\dots,v_n)=\mathrm{Sp}(v_1,\dots,v_n,0,\dots,0)$.

הוכחה: ההכלה "$\subseteq$" נובעת מהתרגיל הקודם. אגף שמאל הוא תת־מרחב שמכיל את $v_1,v_2,\dots,v_n$; לפי ההנחה הוא מכיל גם את $w_1,\dots,w_m$. לכן, לפי המשפט, הוא מכיל את אגף ימין. ∎

בהגדרה של $\mathrm{Sp}(v_1,v_2,\dots,v_n)$ אין חשיבות לסדר של $v_1,v_2,\dots,v_n$.

תרגיל 4.15: נתונים $v, v_1, \ldots, v_n \in F^m$. קבע האם v צירוף לינארי של $v_1, \ldots, v_n$ ואם כן, מצא את המקדמים $c_1, \ldots, c_n \in F$ כך ש־$v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$.

פתרון (תיאורטי): תהי A המטריצה ש־$v_1, \ldots, v_n$ עמודותיה. לפי תרגיל 3.32, $v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$ אם ורק אם $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ פתרון של המערכת משוואות לינאריות $AX = v$, כלומר, המערכת שמטריצת המקדמים המורחבת שלה היא $(v_1, v_2, \ldots, v_n, v)$.

בפרט, v צירוף לינארי של $v_1, \ldots, v_n$ אם ורק אם למערכת זו יש פתרון, כלומר, אם ורק אם

$$\operatorname{rk}((v_1, \ldots, v_n)) = \operatorname{rk}((v_1, \ldots, v_n, v)) . \qquad \blacksquare$$

תרגיל 3.32: *תהיינה* $v_1, \ldots, v_n \in F^m$ *העמודות של* $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$*, ויהיו* $c_1, \ldots, c_n \in F$*. אז*

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n .$$

דוגמה 4.16: מספרית (חסרה עדיין).

מסקנה 4.17: *יהיו $v, v_1, \ldots, v_n \in F^m$ ו־$v', v'_1, \ldots, v'_n$, ויהיו $c_1, \ldots, c_n \in F$. נניח ששתי המטריצות הבאות*

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n, v),\ (v'_1, v'_2, \ldots, v'_n, v') \in \mathrm{M}_{m\times(n+1)}(F)$$

שקולות שורות (אחת מתקבלת מהשניה על ידי סדרה של פעולות אלמנטריות). אז

(א) *$v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$ אם ורק אם $v' = c_1v'_1 + \cdots + c_nv'_n$.*

(ב) *v צירוף לינארי של $v_1, \ldots, v_n$ אם ורק אם v' צירוף לינארי של $v'_1, \ldots, v'_n$.*

הוכחה: (א) נובע מהתרגיל לעיל, כי למערכות שקולות אותם הפתרונות. (ב) נובע מ־(א). ∎

תרגיל 4.18: תהי $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ (כך שעמודותיה הן איברי F^m). העמודה ה־j של A היא צירוף לינארי של קודמותיה (ז.א., העמודות שמשמאלה) אם ורק אם העמודה ה־j של המטריצה המדורגת קנונית A' של A אינה מובילה.

הוכחה: נוכל להניח שהעמודה ה־j של A היא העמודה האחרונה, אחרת נשמיט את העמודות שאחריה. (אם נסמן ב־$B, B' \in \mathrm{M}_{m\times j}(F)$ את המטריצות המתקבלות מ־A, A' על ידי ההשמטה, אז B' שקולה ל־B. ראינו ש־B' מדורגת קנונית. לכן היא המטריצה המדורגת קנונית של B.) אז A היא מטריצת מקדמים המורחבת של איזושהי מערכת משוואות לינאריות. לפי התרגיל הקודם, העמודה האחרונה היא צירוף לינארי של האחרות אם ורק אם למערכת זו יש פתרון. זה קורה, כידוע, אם ורק אם העמודה האחרונה של A' אינה מובילה. ∎

דוגמה 2.8:

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & a & 3 \\ 1 & a & (2a-1) & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

לאחר דירוג מתקבלת מטריצה (לא לגמרי מדורגת קנונית):

$$\begin{pmatrix} 1 & & -1 & -(a+3) & 0 \\ 0 & 1 & 2 & (a+2) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 2-a \end{pmatrix}$$

כאשר $\alpha = (3+a)(2-a)$.

הגדרה 4.19: יהי V מרחב וקטורי ותהי $v_1, v_2, \ldots, v_n$ סדרה של איברים ב־V. סדרה זו תיקרא **סדרת יוצרים של** V אם $\mathrm{Sp}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = V$, כלומר, כל $v \in V$ הוא צירוף לינארי של $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

תרגיל 4.20: $e_1, e_2, \ldots, e_m$ סדרת יוצרים של F^m, כי $\mathrm{Sp}(e_1, e_2, \ldots, e_m) = F^m$.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

מסקנה 4.21: *סדרה* $v_1, \ldots, v_n \in F^m$ *היא סדרת יוצרים של* F^m *אם ורק אם* $\mathrm{rk}((v_1, \ldots, v_n)) = m$.

הוכחה: נסמן $A = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$.

נניח $\mathrm{rk}(A) = m$ ויהי $v \in F^m$. אז $m = \mathrm{rk}(A) \leq \mathrm{rk}((A, v) \leq m$ לכן $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}((A, v))$. לפי תרגיל 4.15, v צירוף לינארי של $v_1, \ldots, v_n$.

נניח $\mathrm{rk}(A) < m$. תהי A' המטריצה המדורגת קנונית של A. אז השורה האחרונה של A' היא שורת אפסים. לכן למערכת, שמטריצת מקדמים המורחבת שלה היא (A', e_m), אין פתרון. אפשר להגיע מ־(A', e_m) על ידי פעולות אלמנטריות למטריצה (A, v), עבור איזה $v \in F^m$. אז גם למערכת, שמטריצת מקדמים המורחבת שלה היא (A, v), אין פתרון. לפי תרגיל 4.15, v אינו צירוף לינארי של $v_1, \ldots, v_n$. ∎

הגדרה 4.22: **מרחב השורות** $R(A)$ **של** $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ הוא התת־מרחב של $F^n = \mathrm{M}_{1\times n}(F)$ הנפרש על ידי השורות של A.

מרחב העמודות $C(A)$ **של** $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ הוא התת־מרחב של $F^m = \mathrm{M}_{m\times 1}(F)$ הנפרש על ידי העמודות של A.

משפט 4.23: *תהיינה* $A, B \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$. *תהיינה* $A', B' \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ *המטריצות המדורגות קנונית שלהן, בהתאמה. אז* $R(A) = R(B)$ *אם ורק אם* $A' = B'$.

בהוכחה ניעזר ב:

תרגיל 3.33: *תהיינה* $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ *ו־*$P \in \mathrm{M}_m(F)$. *תהיינה* $A_1, \dots, A_m \in F^n$ *השורות של* A. *אז השורות של* PA *הן*

$$(P)_{i1}A_1 + (P)_{i_2}A_2 + \cdots + (P)_{im}A_m = \sum_{k=1}^{m}(P)_{ik}A_k, \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

הוכחה: נניח $A' = B'$. אז A, B שקולות שורות, ולכן יש $P \in \mathrm{M}_m(F)$ הפיכה כך ש־$B = PA$. תהיינה $A_1, A_2, \dots, A_m$ השורות של A. לפי תרגיל 3.33 השורות של B הן

$$B_i = (P)_{i1}A_1 + (P)_{i_2}A_2 + \cdots + (P)_{im}A_m \in R(A), \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

לכן $R(B) = \mathrm{Sp}(B_1, \dots, B_m) \subseteq R(A)$. באופן דומה נסיק מתוך $A = P^{-1}B$ שמתקיים $R(A) \subseteq R(B)$. מכאן $R(A) = R(B)$.

תרגיל 3.33: *תהיינה* $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ *ו-* $P \in \mathrm{M}_m(F)$. *תהיינה* $A_1,\ldots,A_m \in F^n$ *השורות של* A. *אז השורות של* PA *הן*

$$(P)_{i1}A_1 + (P)_{i_2}A_2 + \cdots + (P)_{im}A_m = \sum_{k=1}^{m}(P)_{ik}A_k, \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

להיפך, נניח $R(A) = R(B)$. כיוון ש-A, A' שקולות שורות, הוכחנו לעיל כי $R(A) = R(A')$. באותו אופן $R(B) = R(B')$. לכן $R(A') = R(B')$.

נסמן $r = \max(\mathrm{rk}(A'), \mathrm{rk}(B'))$. אז $m-r$ השורות האחרונות ב-A', B' הן שורות של אפסים. נסמן ב-A'', B'' את המטריצות מסדר $r \times n$ המתקבלות מ-A', B' על ידי השמטת שורות אלה. אז מתקיים $R(A'') = R(A'), R(B'') = R(B')$, ולכן $R(A'') = R(B'')$ ודי להוכיח כי $A'' = B''$.

בלי הגבלת הכלליות $r = \mathrm{rk}(B') = \mathrm{rk}(B'')$. תהיינה $A_1,\ldots,A_r$ השורות של A'' ותהיינה $B_1,\ldots,B_r$ השורות של B''. כיוון ש-$B_1,\ldots,B_r \in \mathrm{Sp}(A_1,\ldots,A_r)$, יש $c_{ij} \in F$ כך שמתקיים $B_i = c_{i1}A_1 + c_{i_2}A_2 + \cdots + c_{ir}A_r$. נגדיר $P \in \mathrm{M}_r(F)$ על ידי $(P)_{ij} = c_{ij}$. לפי תרגיל 3.33, $B'' = PA''$. לפי מסקנה 3.22, $r = \mathrm{rk}(B'') \leq \mathrm{rk}(P) \leq r$, לכן $\mathrm{rk}(P) = r$, כלומר, P הפיכה. זה אומר ש-A'', B'' שקולות שורות. כיוון שהן מדורגות קנונית, הן שוות (לפי משפט 2.23). ∎

אי תלות לינארית.

הגדרה 4.24: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. סדרה $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ הנה **תלויה לינארית** (**מעל** F) אם קיימים $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$, לא כולם 0, כך ש-$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$.

לפי כך, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ **בלתי תלויה לינארית** (**מעל** F) אם לכל $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$ מתקיים: אם $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$ אז $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

דוגמה 4.25:

(א) $\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \in F^2$ היא תלויה לינארית, כי $0 = (-2)\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$.

(ב) $e_1, e_2, \ldots, e_m \in F^m$ היא בלתי תלויה לינארית.

אכן, יהיו $a_1, a_2, \ldots, a_m \in F$ כך ש־$a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_me_m = 0$. אגף שמאל הוא $(a_1, a_2, \ldots, a_m)^t$. לכן $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$.

הערה 4.26: סדרה ריקה $\emptyset$ נחשבת לבלתי תלויה לינארית.

תרגיל 4.27: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F.

(א) הסדרה v_1 (בת איבר אחד) תלויה לינארית אם ורק אם $v_1 = 0$.

(ב) הסדרה v_1, v_2 (בת שני איברים) תלויה לינארית אם ורק אם v_1 כפולה של v_2 או v_2 כפולה של v_1.

(ג) אם יש j כך ש־$v_j = 0$ אז $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ תלויה לינארית.

פתרון: (א) אם קיים $0 \neq a_1 \in F$ כך ש־$a_1 v_1 = 0$ אז $v_1 = 1v_1 = a_1^{-1}(a_1 v_1) = a_1^{-1} 0 = 0$. להיפך, אם $v_1 = 0$ אז $1v_1 = 0$.

(ב) אם $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$ ו־a_1, a_2 לא שניהם 0, אז, אם למשל $a_2 \neq 0$, מתקיים $a_2 v_2 = (-a_1) v_1$ ומכאן $v_2 = \frac{-a_1}{a_2} v_1$.

להיפך, אם $v_1 = a v_2$, אז $1v_1 + (-a)v_2 = 0$ ומתקיים $1 \neq 0$.

(ג) $0v_1 + \cdots + 0v_{j-1} + 1v_j + 0v_{j+1} + \cdots + 0v_n = 0$. ∎

משפט 4.28: *יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. סדרה $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ תלויה לינארית אם ורק אם יש $1 \leq i \leq n$ כך ש־ $v_i \in \mathrm{Sp}(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1})$.* (עבור $i = 1$ תנאי זה אומר $v_1 \in \mathrm{Sp}(\emptyset) = \{0\}$, כלומר, $v_1 = 0$.)

הוכחה: נניח $v_i \in \mathrm{Sp}(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1})$. אז יש $a_1, \ldots, a_{i-1} \in F$ כך ש־ $v_i = a_1v_1 + \cdots + a_{i-1}v_{i-1}$. מכאן $0 = (-a_1)v_1 + \cdots (-a_{i-1})v_{i-1} + 1v_i$. היות ו־$0 \neq 1$, הסדרה $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ תלויה לינארית.

להיפך, נניח כי $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ תלויה לינארית. אז קיימים $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$, לא כולם 0, כך ש־$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$. יהי i הגדול ביותר עבורו $a_i \neq 0$. אז מתקיים

$a_iv_i = (-a_1)v_1 + (-a_2)v_2 + \cdots + (-a_{i-1})v_{i-1}$ ומכאן

$$v_i = a_i^{-1}(-a_1)v_1 + a_i^{-1}(-a_2)v_2 + \cdots + a_i^{-1}(-a_{i-1})v_{i-1} \in \mathrm{Sp}(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}).$$

∎

המקרה $i = 1$:

הוכחה: נניח $v_1 \in \mathrm{Sp}(\emptyset)$. אז $v_1 = 0$. מכאן $0 = 1v_1$. היות ו־$0 \neq 1$, הסדרה v_1 תלויה לינארית.

להיפך, ... יהי $i = 1$ הגדול ביותר עבורו $a_i \neq 0$. אז מתקיים

$a_1v_1 = 0$ ומכאן

$$v_1 = a_1^{-1}0 \in \mathrm{Sp}(\emptyset).$$

∎

$$0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n = \sum_{i=1}^{n} w_i$$

$$0 + w_1 + w_2 = w_1 + w_2 = \sum_{i=1}^{2} w_i$$

$$0 + w_1 = w_1 = \sum_{i=1}^{1} w_i$$

$$0 = \sum_{i=1}^{0} w_i$$

מסקנה 4.29: *סדרה* $v_1, v_2, \dots, v_n \in F^m$ *בלתי תלויה לינארית אם ורק אם* $n = \mathrm{rk}((v_1, v_2, \dots, v_n))$.

הוכחה: תהי $(v_1', v_2', \dots, v_n')$ המטריצה המדורגת קנונית של $(v_1, v_2, \dots, v_n)$. לפי המשפט, $v_1, v_2, \dots, v_n$ בלתי תלויה לינארית אם ורק אם $v_i \notin \mathrm{Sp}(v_1, v_2, \dots, v_{i-1})$ לכל i. לפי תרגיל 4.18 זה שקול לכך ש־v_i' עמודה מובילה, לכל i. זה אומר שכל העמודות מובילות, כלומר, $n = \mathrm{rk}((v_1, v_2, \dots, v_n))$. ∎

תרגיל 4.18: תהי $A \in \mathrm{M}_{m \times n}(F)$ (כך שעמודותיה הן איברי F^m). העמודה ה־j של A היא צירוף לינארי של קודמותיה (ז.א., העמודות שמשמאלה) אם ורק אם העמודה ה־j של המטריצה המדורגת קנונית A' של A אינה מובילה.

תרגיל 4.30: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. תהי $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ סדרה ותהי $w_1, w_2, \ldots, w_k$ תת־סדרה שלה. אם $w_1, w_2, \ldots, w_k$ תלויה לינארית אז $v_1, v_2, \ldots, v_n$ תלויה לינארית. כלומר, אם $v_1, v_2, \ldots, v_n$ בלתי תלויה לינארית אז $w_1, w_2, \ldots, w_k$ בלתי תלויה לינארית.

הוכחה: יהיו $a_1, \ldots, a_k \in F$ כך ש־$a_1w_1 + \cdots + a_kw_k = 0$. נשלים את אגף שמאל לצירוף לינארי של $v_1, \ldots, v_n$ על ידי הוספת מחוברים מהצורה $0v_j$, באשר v_j אינו בתת־סדרה $w_1, w_2, \ldots, w_k$. לפי ההנחה כל המקדמים באגף שמאל הם 0, בפרט $a_1, \ldots, a_k$. ∎

תרגיל 4.31: תהי $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ מדורגת קנונית. אז השורות השונות מאפס של A בלתי תלויות לינארית (כאיברי $F^n = \mathrm{M}_{1\times n}(F)$).

הוכחה: תהיינה $A_1, A_2, \ldots, A_r$ השורות השונות מאפס של A ויהיו $a_1, a_2, \ldots, a_r \in F$ סקלרים כך ש־$a_1A_1 + a_2A_2 + \cdots + a_rA_r = 0$. (שני האגפים הם שורות מאורך n.) יהי $1 \le j \le n$. הרכיב ה־j בשני האגפים שווה: $a_1(A)_{1j} + a_2(A)_{2j} + \cdots + a_r(A)_{rj} = 0$. בפרט זה נכון, אם j הוא מספר העמודה של העמודה המבילה ה־i, באשר $1 \le i \le r$. אבל אז $(A)_{kj} = 0$ לכל k שונה מ־i ואילו $(A)_{ij} = 1$. לכן $a_i = 0$.
∎

$$
\begin{array}{c}
\\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{rrrrrrrr} 1 & \bullet & 3 & 4 & \bullet & 6 & \bullet & 8 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & -2 & -5 & 0 & -8 & 0 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

משפט 4.32 (משפט ההחלפה): *יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. תהי $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ סדרת יוצרים של V, ותהי $w_1, w_2, \ldots, w_m \in V$ סדרה בלתי תלויה לינארית. אז $m \leq n$ וניתן להחליף m איברים מתוך $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ב־$w_1, w_2, \ldots, w_m$ כך שהסדרה המתקבלת (בת n איברים) היא סדרת יוצרים של V.*

הוכחה: באינדוקציה על m.

אם $m = 0$, אין מה להוכיח.

נניח $m \geq 1$ ונניח שהמשפט נכון עבור $m - 1$.

נתון: $w_1, w_2, \ldots, w_m$ בלתי תלויה לינארית. לכן לפי תרגיל 4.30 גם $w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}$ בלתי תלויה לינארית. לפי הנחת האינדוקציה $m - 1 \leq n$ ובלי הגבלת הכלליות (אחרי סידור מחדש) $w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}, v_m, \ldots, v_n$ היא סדרת יוצרים של V. (שים לב: אם $m - 1 = n$, אז האיבר האחרון בסדרה זו הוא w_{m-1}.) אז גם $w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}, v_m, \ldots, v_n, w_m$ היא סדרת יוצרים של V. היא תלויה לינארית לפי משפט 4.28, כי

$$w_m \in V = \mathrm{Sp}(w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}, v_m, \ldots, v_n),$$

כלומר, w_m צירוף לינארי של קודמיו. לכן גם $w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}, w_m, v_m, \ldots, v_n$ סדרת יוצרים תלויה לינארית של V. לכן (שוב לפי משפט 4.28) יש בה איבר שהוא צירוף לינארי של קודמיו. איבר זה איננו אחד מתוך $w_1, w_2, \ldots, w_m$, כי היא בלתי תלויה לינארית. לכן זה אחד מבין $v_m, \ldots, v_n$. בפרט (כיוון שיש איבר כזה) $m \leq n$. האיבר הנ"ל הוא גם צירוף לינארי של כל יתר איברי הסדרה $w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}, w_m, v_m, \ldots, v_n$. בלי הגבלת הכלליות איבר זה הוא v_m. לפי תרגיל 4.14,

$$\mathrm{Sp}(w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n) = \mathrm{Sp}(w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}, w_m, v_m, \ldots, v_n) = V$$

כלומר, $w_1, w_2, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$ סדרת יוצרים של V. ∎

הגדרה 4.33: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. סדרה $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ נקראת **בסיס** של V אם היא בלתי תלויה לינארית וגם סדרת יוצרים של V.

דוגמה 4.34: (א) $e_1, e_2, \ldots, e_m$ היא בסיס של F^m.

(היא סדרת יוצרים של F^m לפי תרגיל 4.20; היא בלתי תלויה לינארית לפי דוגמה 4.24(ב).)

(ב) יהי $V = R(A)$ מרחב השורות של $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$. אז השורות השונות מאפס של המטריצה המדורגת קנונית A' של A מהוות בסיס של V.

(לפי תרגיל 4.31 הן בלתי תלויות לינארית; לפי תרגיל 4.14 הן פורשות את $R(A')$; לפי משפט 4.23 $R(A) = R(A')$.)

(ג) בסיס למרחב הפולינומים ממעלה $\geq d$ הוא (למשל), $1, X, X^2, \ldots, X^d$.

לכל פולינום f במרחב הזה יש הצגה $f = a_0 1 + a_1 X + \ldots + a_d X^d$; אם $a_0 1 + a_1 X + \ldots + a_d X^d = 0$ אז $a_0 = a_1 = \cdots = a_d = 0$.

מסקנה 4.35: *אם למרחב וקטורי* V *יש בסיס, אז לכל בסיס של* V *אותו מספר איברים. מספר זה ייקרא* **המימד** *של* V *ויסומן* $\dim(V)$.

דוגמה 4.36: (א) **תהי** $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$. **אז** $\dim(R(A)) = \mathrm{rk}(A)$.

(ב) $\dim(F^n) = n$.

משפט 4.37: *יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. סדרה $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ היא בסיס אם ורק אם לכל $v \in V$ יש $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ יחידים כך ש־ $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$.*

הוכחה: ברור ש־"לכל $V \in v$ יש $a_1, a_2, \dots, a_n$ כך ש־$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$" שקול לכך ש־$v_1, v_2, \dots, v_n$ סדרת יוצרים של V. לכן די להראות:

לכל $v \in V$ יש לכל היותר סדרה אחת $a_1, a_2, \dots, a_n$ כך ש־$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ אם ורק אם $v_1, v_2, \dots, v_n$ בלתי תלויה לינארית.

נניח שהתנאי הראשון מתקיים. יהיו $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ כך ש־$0 = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$. אך גם $0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$. לפי היחידות $a_1 = a_2 = \cdots a_n = 0$.

להיפך, נניח ש־$v_1, v_2, \dots, v_n$ בלתי תלויה לינארית. יהי $v \in V$ ויהיו $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$, $b_1, b_2, \dots, b_n \in F$, כך שמתקיים

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = v = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n.$$

אז $(a_1-b_1)v_1+(a_2-b_2)v_2+\cdots+(a_n-b_n)v_n = 0$. לכן $a_1-b_1 = a_2-b_2 = \cdots = a_n-b_n = 0$, ומכאן $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_n = b_n$. ∎

משפט 4.38: *יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. התנאים הבאים על סדרה $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ שקולים זה לזה:*

(1) *$v_1, v_2, \ldots, v_m$ בסיס.*

(2) *$v_1, v_2, \ldots, v_m$ בלתי תלויה לינארית מקסימלית, כלומר, היא בלתי תלויה לינארית ולכל $v \in V$ הסדרה $v_1, v_2, \ldots, v_m, v$ תלויה לינארית.*

(3) *$v_1, v_2, \ldots, v_m$ סדרת יוצרים מינימלית, כלומר, היא סדרת יוצרים, ולכל $1 \leq i \leq m$ הסדרה $v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_m$ איננה סדרת יוצרים.*

הוכחה: (1) $\Leftarrow$(2): $v \in V = \mathrm{Sp}(v_1, v_2, \ldots, v_m)$, לכן v צירוף לינארי של קודמיו בסדרה $v_1, v_2, \ldots, v_m, v$, ולכן סדרה זו תלויה לינארית.

(2) $\Leftarrow$(1): צריך להראות ש־$v_1, v_2, \ldots, v_m$ סדרת יוצרים. יהי $v \in V$. בגלל המקסימליות $v_1, v_2, \ldots, v_m, v$ תלויה לינארית. לכן יש בה איבר שהוא צירוף לינארי של קודמיו. זה אינו אחד מבין $v_1, v_2, \ldots, v_m$ כי הם בלתי תלויים לינארית. לכן זה v.

(1) $\Leftarrow$(3): אם $v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_m$ סדרת יוצרים של V אז v_i צירוף לינארי של קודמיו בסדרה $v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_m, v_i$, ולכן סדרה זו תלויה לינארית, בסתירה לכך ש־$v_1, v_2, \ldots, v_m$ בלתי תלויה לינארית.

(3) $\Leftarrow$(1): צריך להראות ש־$v_1, v_2, \ldots, v_m$ בלתי תלויה לינארית. אילו היא היתה תלויה לינארית, היה אחד מאיבריה v_i צירוף לינארי של קודמיו. בפרט, v_i צירוף לינארי של יתר איברי הסדרה. לכן (תרגיל)

$$\mathrm{Sp}(v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_m) = \mathrm{Sp}(v_1, \ldots, v_m) = V,$$

סתירה. ∎

הגדרה 4.39: מרחב וקטורי V נקרא **נוצר סופית** אם יש לו סדרת יוצרים.

משפט 4.40: *יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית. אז יש לו בסיס. יתר על כן,*

(1) *כל סדרת יוצרים של V מכילה תת־סדרה שהיא בסיס.*

(2) *כל סדרה בלתי תלויה לינארית ב־ V ניתן להשלים לבסיס של V.*

יהי $n = \dim(V)$.

(3) *כל סדרת יוצרים בת n איברים ב־ V היא בסיס של V.*

(4) *כל סדרה בלתי תלויה לינארית בת n איברים ב־ V היא בסיס של V.*

הוכחה: (1) נשמיט איברים מסדרת היוצרים עד שנקבל סדרת יוצרים מינימלית. לפי המשפט הקודם היא בסיס.

(2) לפי ההנחה יש ל־V סדרת יוצרים בת n איברים. נוסיף איברים לסדרה הבלתי תלויה לינארית, עד שנקבל סדרה בלתי תלויה מקסימלית. (תהליך ההוספה חייב להסתיים לפני שבסדרה יהיו יותר מ־n איברים, לפי משפט ההחלפה.) לפי המשפט הקודם היא בסיס.

(3) נבחר תת־סדרה של הסדרה המקורית שהיא בסיס, לפי (1). לפי מסקנה 4.35 יש בו n איברים, כמו בסדרה המקורית. לכן הסדרה המקורית היא הבסיס הזה.

(4) נשלים את הסדרה הנתונה לבסיס, לפי (2). לפי מסקנה 4.35 יש בו n איברים, כמו בסדרה המקורית. לכן הסדרה המקורית היא הבסיס הזה. ∎

תרגיל 4.41: מציאת בסיס של תת־מרחב U של F^m מתוך סדרת יוצרים נתונה $v_1, v_2, \ldots, v_n$. כמובן, $U = \mathrm{Sp}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

(1) רשום את הוקטורים כעמודות של מטריצה $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$. תהי A' המטריצה המדורגת קנונית של A. אם מספרי העמודות המובילות ב־A' הם $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$, אז $v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_r}$ הוא בסיס של U.

אכן, אף אחד מבין איברי סדרה זו אינו צירוף לינארי של קודמיו (תרגיל 4.18), לכן סדרה זו בלתי תלויה לינארית (משפט 4.28). קל לראות שבמטריצה מדורגת קנונית כל עמודה לא מובילה היא צירוף לינארי של העמודות המובילות שלפניה. לכן לפי מסקנה 4.17(ב) כל העמודות של A שמספריהן מם מספרי העמודות הלא מובילות של A' הם צירופים לינאריים של $v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_r}$. לפי תרגיל 4.14, $U = \mathrm{Sp}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \mathrm{Sp}(v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_r})$.

(2) רשום את הוקטורים כשורות של מטריצה $B \in \mathrm{M}_{n\times m}(F)$. תהי B' המטריצה המדורגת קנונית של B. אז $U = R(B) = R(B')$, לכן השורות השונות מאפס מהוות בסיס של U. כמובן, בסיס זה איננו בהכרח מתוך הסדרה הנתונה.

מסקנה 4.42: $\dim C(A) = \dim R(A) = \mathrm{rk}(A)$

תרגיל 4.43: מציאת בסיס של מרחב הפתרונות של מערכת משוואות לינאריות הומוגניות $AX = 0$.

בלי הגבלת הכלליות $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ מדורגת קנונית. יהי $r = \mathrm{rk}(A)$ ויהי $s = n - r$. יהיו $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ מספרי העמודות המובילות ויהיו $j_1 < j_2 < \cdots < j_s$ מספרי העמודות הלא מובילות. כדי לפשט את הסימון, נרשום את העמודות המובילות של A כראשונות, כלומר נחליף את סדר העמודות מ־$1, 2, \ldots, n$ ל־$i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s$. במלים אחרות, נחליף את סדר המשתנים מ־$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ל־$X_{i_1}, \ldots, X_{i_r}, X_{j_1}, \ldots, X_{j_s}$. בפתרונות שנמצא (איברי בסיס למרחב הפתרונות), ייצגו r הרכיבים הראשונים את הרכיבים $i_1, \ldots, i_r$, ו־s הרכיבים האחרונים את הרכיבים $j_1, \ldots, j_s$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & a_{1\,r+1} & \ldots & a_{1\,n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a_{2\,r+1} & \ldots & a_{2\,n} \\ \ldots & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{r\,r+1} & \ldots & a_{r\,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{rlll} X_1 = & -a_{1\,r+1}X_{r+1} & -\cdots & -a_{1\,n}X_n \\ X_2 = & -a_{2\,r+1}X_{r+1} & -\cdots & -a_{2\,n}X_n \\ & & \ldots & \\ X_r = & -a_{r\,r+1}X_{r+1} & -\cdots & -a_{r\,n}X_n \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1\,r+1} & \dots & a_{1\,n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2\,r+1} & \dots & a_{2\,n} \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{r\,r+1} & \dots & a_{r\,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{rccc} X_1 = & -a_{1\,r+1}X_{r+1} & -\cdots & -a_{1\,n}X_n \\ X_2 = & -a_{2\,r+1}X_{r+1} & -\cdots & -a_{2\,n}X_n \\ & & \dots & \\ X_r = & -a_{r\,r+1}X_{r+1} & -\cdots & -a_{r\,n}X_n \end{array}$$

ואז קבוצת הפתרון היא, כפי שלמדנו,

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} -a_{1\,r+1}c_{r+1} - \cdots - a_{1\,n}c_n \\ -a_{2\,r+1}c_{r+1} - \cdots - a_{2\,n}c_n \\ \vdots \\ -a_{r\,r+1}c_{r+1} - \cdots - a_{r\,n}c_n \\ c_{r+1} \\ c_{r+2} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \middle| \; c_{r+1}, \dots, c_n \in F \right\}$$

$$P=\left\{\begin{pmatrix}-a_{1\,r+1}c_{r+1}-\cdots-a_{1\,n}c_n\\-a_{2\,r+1}c_{r+1}-\cdots-a_{2\,n}c_n\\\vdots\\-a_{r\,r+1}c_{r+1}-\cdots-a_{r\,n}c_n\\c_{r+1}\\c_{r+2}\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}\;\middle|\;c_{r+1},\ldots,c_n\in F\right\}$$

$$=\left\{c_{r+1}\begin{pmatrix}-a_{1\,r+1}\\-a_{2\,r+1}\\\vdots\\-a_{r\,r+1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+c_{r+2}\begin{pmatrix}-a_{1\,r+2}\\-a_{2\,r+2}\\\vdots\\-a_{r\,r+2}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+c_n\begin{pmatrix}-a_{1\,n}\\-a_{2\,n}\\\vdots\\-a_{r\,n}\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\;\middle|\;c_{r+1},\ldots,c_n\in F\right\}$$

$$=\mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix}-a_{1\,r+1}\\-a_{2\,r+1}\\\vdots\\-a_{r\,r+1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-a_{1\,r+2}\\-a_{2\,r+2}\\\vdots\\-a_{r\,r+2}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}-a_{1\,n}\\-a_{2\,n}\\\vdots\\-a_{r\,n}\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right)$$

קל לראות ש־$s=n-r$ העמודות האלה בלתי תלויות לינארית. לכן הן בסיס של P.

איך אפשר לאפיין את איברי הבסיס הזה?

לעמודה הראשונה יש 1 במקום המשתנה הלא מוביל הראשון ו־0 במקום יתר המשתנים הלא מובילים; המשתנים המובילים נקבעים על ידי בחירה זו, בגלל שעמודה היא פתרון של המערכת.

לעמודה השניה יש 1 במקום המשתנה הלא מוביל השני ו־0 במקום יתר המשתנים הלא מובילים; המשתנים המובילים נקבעים על ידי בחירה זו, בגלל שעמודה היא פתרון של המערכת.

וכן הלאה...

קל לראות שאם נשמיט מאיברי הבסיס את הרכיבים שמתאימים לעמודות מובילות, נקבל את העמודות $e_1,e_2,\ldots,e_s\in F^s$. אם נשמיט מהם את הרכיבים שמתאימים לעמודות הלא מובילות, ונכפיל אותם ב־(-1), נקבל את עמודות הלא מובילות של A, ללא שורות האפסים. ∎

דוגמה 4.44: מצא בסיס למרחב הפתרונות P של

$$\begin{array}{cccccccc} {\scriptstyle 1} & \bullet & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 4} & \bullet & {\scriptstyle 6} & \bullet & {\scriptstyle 8} \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & -8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

המטריצה המצומצמת של המערכת כבר מדורגת קנונית; העמודות הלא מובילות הן חמש העמודות $1, 3, 4, 6, 8$.

נבחר, אם כן, חמשה פתרונות פרטיים u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 מהצורה $(c_1, c_2, \ldots, c_8)^t$ שיהוו בסיס ל-P:

בחירה $c_1 = 1, c_3 = 0, c_4 = 0, c_6 = 0, c_8 = 0$ נותנת $u_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^t$.

בחירה $c_1 = 0, c_3 = 1, c_4 = 0, c_6 = 0, c_8 = 0$ נותנת $u_2 = (0, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0)^t$.

בחירה $c_1 = 0, c_3 = 0, c_4 = 1, c_6 = 0, c_8 = 0$ נותנת $u_3 = (0, 5, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^t$.

בחירה $c_1 = 0, c_3 = 0, c_4 = 0, c_6 = 1, c_8 = 0$ נותנת $u_4 = (0, 8, 0, 0, 4, 1, 0, 0)^t$.

בחירה $c_1 = 0, c_3 = 0, c_4 = 0, c_6 = 0, c_8 = 1$ נותנת $u_5 = (0, 3, 0, 0, 2, 0, 7, 1)^t$.

חמשת הוקטורים האלה בלתי תלויים לינארית, כפי שקל לראות מהתבוננות ברכיבים $1, 3, 4, 6, 8$ שלהם.

∎

$$\big(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\big) = \begin{array}{c|ccccc} & \overset{u_1}{1} & \overset{u_1}{3} & \overset{u_1}{4} & \overset{u_1}{6} & \overset{u_1}{8} \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet^2 & 0 & 2 & 5 & 8 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \bullet^5 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \bullet^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & \bullet & 3 & 4 & \bullet & 6 & \bullet & 8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & -8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \overset{u_1}{1} & \overset{u_1}{3} & \overset{u_1}{4} & \overset{u_1}{6} & \overset{u_1}{8} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \bullet^2 \\ 3 \\ 4 \\ \bullet^5 \\ 6 \\ \bullet^7 \\ 8 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \overset{u_1}{1} & \overset{u_1}{3} & \overset{u_1}{4} & \overset{u_1}{6} & \overset{u_1}{8} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \bullet^2 \\ 3 \\ 4 \\ \bullet^5 \\ 6 \\ \bullet^7 \\ 8 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

מסקנה 4.45: *תהי* $AX = 0$ *מערכת משוואות הומוגניות ב־*n *נעלמים. יהי* P *מרחב הפתרונות שלה. אז* $\dim P = n - \mathrm{rk}(A)$.

משפט 4.46: *יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה F ויהי U תת־מרחב שלו. אז*

(א) U *נוצר סופית, ו־* $\dim U \leq \dim V$.

(ב) *אם* $\dim U = \dim V$ *אז* $U = V$.

הוכחה: נסמן $n = \dim V$.

(א) כל סדרה בלתי תלויה לינארית ב־U היא גם סדרה בלתי תלויה לינארית ב־V, לכן בת $\leq n$ איברים (משפט ההחלפה). מכאן שיש ב־U סדרה בלתי תלויה מקסימלית. לפי משפט 4.38 היא בסיס. בפרט U נוצר סופית. יש בבסיס הנ"ל $\leq n$ איברים, לכן $\dim U \leq n = \dim V$.

(ב) יהי $u_1, u_2, \ldots, u_n$ בסיס של U. אז $u_1, u_2, \ldots, u_n$ סדרה בלתי תלויה לינארית ב־U, ולכן גם ב־V. היא בת n איברים, לכן לפי משפט 4.40 היא בסיס של V. מכאן $U = \mathrm{Sp}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = V$. ∎

תרגיל 4.47: $F[X]$ אינו נוצר סופית.

אכן, לו היתה לו סדרת יוצרים סופית, נאמר, בת n איברים, אז כל סדרה בלתי תלויה לינארית בו היתה בת n איברים לכל היותר. אך $1, X, X^2, \dots, X^n$ בלתי תלויה לינארית בת $n+1$ איברים, סתירה.

הוכחה אחרת:

תהי

$$f_1, f_2, \dots, f_k \in F[X]$$

סדרת כלשהי ב־$F[X]$. נראה שהיא איננה סדרת יוצרים של $F[X]$, כלומר, שיש $f \in F[X]$ כך ש־$f \notin \mathrm{Sp}(f_1, \dots, f_k)$.

יהי $m = \max(\deg f_1, \dots, \deg f_k)$. אם $c_1, \dots, c_k \in F$ אז $\deg(c_1 f_1 + \cdots + c_k f_k) \leq m$.

יהי $f = X^{m+1}$, אז $\deg f > m$. לכן $f \neq c_1 f_1 + \cdots + c_k f_k$, כלומר, $f \notin \mathrm{Sp}(f_1, \dots, f_k)$. ∎

דוגמה 4.48: מהם כל התת־מרחבים של המרחב התלת ממדי $\mathbb{R}^3$?

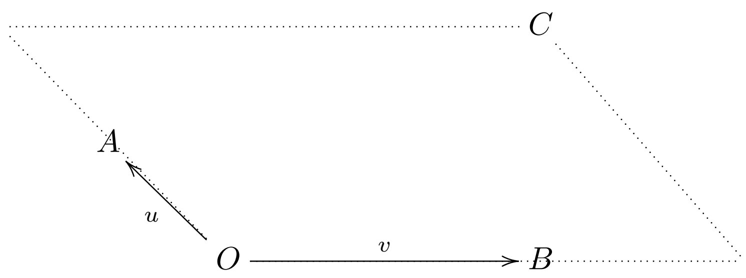
הם מארבעה סוגים:

(א) ממימד 3: כל המרחב (לפי משפט 4.46(ב)).

(ב) ממימד 2: מישורים דרך הראשית.

(ג) ממימד 1: ישרים דרך הראשית.

(ד) ממימד 0: מרחב האפס $\{0\}$ (נקודת הראשית).



סכומים של תת־מרחבים.

הגדרה 4.49: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ויהיו U,W שני תת־מרחבים שלו. נגדיר

$$U+W=\{u+w|\ u\in U, w\in W\}.$$

משפט 4.50: *יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ויהיו U,W שני תת־מרחבים שלו.*

(א) $U+W$ *תת־מרחב של* V.

(ב) $U,W\subseteq U+W$.

(ג) *אם* V' *תת־מרחב של* V *כך ש־* $U,W\subseteq V'$*, אז* $U+W\subseteq V'$.

(ד) *אם* $U=\mathrm{Sp}(u_1,u_2,\ldots,u_m), W=\mathrm{Sp}(w_1,w_2,\ldots,w_n)$*, אז*

$$U+W=\mathrm{Sp}(u_1,u_2,\ldots,u_m,w_1,w_2,\ldots,w_n).$$

הוכחה:

(א) $U+W$ תת־מרחב של V.

(א) $0 \in U, W$ לכן $0 = 0 + 0 \in U + W$.

יהיו $u + w, u' + w' \in U + W$ (באשר $u, u' \in U, w, w' \in W$). אז $u + u' \in U, w + w' \in W$, (כי U, W תת־מרחבים), לכן $(u + w) + (u' + w') = (u + u') + (w + w') \in U + W$.

יהי $u + w \in U + W$ (באשר $u \in U, w \in W$) ויהי $a \in F$. אז $au \in U, aw \in W$, (כי U, W תת־מרחבים), לכן $a(u + w) = au + aw \in U + W$.

(ב) $U, W \subseteq U + W$.

(ב) יהי $u \in U$. אז $u = u + 0 \in U + W$. לכן $U \subseteq U + W$. באופן דומה $W \subseteq U + W$.

(ג) אם V' תת־מרחב של V כך ש־$U, W \subseteq V'$, אז $U + W \subseteq V'$.

(ג) יהי $u + w \in U + W$ (באשר $u \in U, w \in W$). אז $u, w \in V'$, לכן $u + w \in V'$. לכן $U + W \subseteq V'$.

(ד) אם $U = \mathrm{Sp}(u_1, u_2, \ldots, u_m), W = \mathrm{Sp}(w_1, w_2, \ldots, w_n)$, אז

$$U + W = \mathrm{Sp}(u_1, u_2, \ldots, u_m, w_1, w_2, \ldots, w_n).$$

(ד) (משתמשים משפט 4.12.) אגף ימין הוא תת־מרחב של V. הוא מכיל את $u_1, u_2, \ldots, u_m$, לכן את U. באופן דומה הוא מכיל את W. לפי (ג) הוא מכיל את $U + W$.

להיפך, $U + W$ הוא תת־מרחב של V. לפי (ב) הוא מכיל את U לכן את $u_1, u_2, \ldots, u_m$. באופן דומה הוא מכיל את $w_1, w_2, \ldots, w_n$. לכן הוא מכיל אגף ימין. ∎

את (א), (ב), (ג) ניתן לסכם כך: $U + W$ הוא התת מרחב הקטן ביותר של V אשר מכיל את U ואת W.

משפט 4.51 (משפט המימד): *יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה F ויהיו U, W שני תת־מרחבים שלו. אז*

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

הוכחה: לפי המשפט הקודם $U, W \subseteq U+W \subseteq V$ תת־מרחבים של מרחב נוצר סופית. לפי משפט 4.46 הם נוצרים סופית. יהיו $r = \dim(U \cap W)$, $m = \dim(U)$, $n = \dim(W)$. צריך להוכיח: $\dim(U+W) = m+n-r$.

נבחר

(א) בסיס $v_1, v_2, \ldots, v_r$ של $U \cap W$, ונשלים אותו

(ב) לבסיס $v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_m$ של U; וגם

(ג) לבסיס $v_1, v_2, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_n$ של W.

אז לפי משפט 4.50(ד)

$$\begin{aligned} U+W =& \mathrm{Sp}(v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_n) \\ =& \mathrm{Sp}(v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_m, w_{r+1}, \ldots, w_n) \end{aligned}$$

לכן די להוכיח: $v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_m, w_{r+1}, \ldots, w_n$ בלתי תלויה לינארית.

נוכיח זאת:

יהיו $a_1, a_2, \ldots, a_r, b_{r+1}, \ldots, b_m, c_{r+1}, \ldots, c_n \in F$ כך ש־

$$.a_1v_1 + a_2v_2 \cdots + a_rv_r + b_{r+1}u_{r+1} \cdots + b_mu_m + c_{r+1}w_{r+1} + \cdots + c_nw_n = 0 \qquad (1)$$

אז

$$.a_1v_1 + a_2v_2 \cdots + a_rv_r + b_{r+1}u_{r+1} \cdots + b_mu_m = (-c_{r+1})w_{r+1} + \cdots + (-c_n)w_n \qquad (2)$$

נסמן את שני האגפים של (2) (ששוים זה לזה) ב־v. אגף שמאל הוא צירוף לינארי של איברי U, לכן $v \in U$. אגף ימין הוא צירוף לינארי של איברי W, לכן $v \in W$. לכן $v \in U \cap W$.

כיוון ש־$v_1, v_2, \ldots, v_r$ בסיס של $U \cap W$, יש $a'_1, a'_2, \ldots, a'_r \in F$ כך ש־ $v = a'_1v_1 + a'_2v_2 \cdots + a'_rv_r$. מכאן ומאגף שמאל של (2) מקבלים

$$v = a'_1v_1 + a'_2v_2 \cdots + a'_rv_r + 0u_{r+1} \cdots + 0u_m$$
$$v = a_1v_1 + a_2v_2 \cdots + a_rv_r + b_{r+1}u_{r+1} \cdots + b_mu_m$$

אך לפי יחידות ההצגה של וקטור לפי הבסיס $v_1, v_2, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_m$ של U (משפט 4.37) מקבלים $.b_{r+1} = 0, \ldots, b_m = 0$

נציב זאת במשוואה (1) ונקבל

$$.a_1v_1 + a_2v_2 \cdots + a_rv_r + c_{r+1}w_{r+1} + \cdots + c_nw_n = 0$$

היות ו־ $v_1, v_2, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_n$ בסיס של W ולכן בלתי תלויה לינארית,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_r = c_{r+1} = \cdots = c_n = 0 \qquad \blacksquare$$

תרגיל 4.52: יהיו U, W שני תת־מרחבים של $\mathbb{R}^{10}$ ממימד 9, שונים זה מזה. אז $\dim(U \cap W) = 8$.

הוכחה: $U + W$ תת־מרחב של $\mathbb{R}^{10}$, לכן לפי משפט 4.46(א), $\dim(U + W) \leq \dim(\mathbb{R}^{10}) = 10$. לפי משפט המימד, $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$, לכן $9 + 9 - \dim(U \cap W) \leq 10$, ומכאן $\dim(U \cap W) \geq 8$.

מצד שני $U \cap W$ תת־מרחב של U, לכן לפי משפט 4.46(א), $\dim(U \cap W) \leq \dim(U) = 9$. אילו היה כאן שוויון, אז לפי משפט 4.46(ב), היה $U \cap W = U$, ולכן $U \subseteq U \cap W \subseteq W$. היות ו־$\dim(U) = \dim(W) = 9$, נובע מכאן לפי משפט 4.46(ב), $U = W$, בסתירה לנתון.

מתוך $\dim(U \cap W) \geq 8$, $\dim(U \cap W) < 9$ נובע $\dim(U \cap W) = 8$. ∎

יהיו $U, W \subseteq F^n$ שני תת־מרחבים של F^n. כיצד מוצאים בסיס לחיתוך $U \cap W$?

נניח ש־U הוא בדיוק מרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגניות

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}X_1 & + & a_{12}X_2 & + & \cdots & + & a_{1n}X_n & = 0 \\ a_{21}X_1 & + & a_{22}X_2 & + & \cdots & + & a_{2n}X_n & = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}X_1 & + & a_{m2}X_2 & + & \cdots & + & a_{mn}X_n & = 0 \end{array}$$

ו־W הוא מרחב הפתרונות של המערכת

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{m+1\,1}X_1 & + & a_{m+1\,2}X_2 & + & \cdots & + & a_{m+1\,n}X_n & = 0 \\ a_{m+2\,1}X_1 & + & a_{m+2\,2}X_2 & + & \cdots & + & a_{m+2\,n}X_n & = 0 \\ \cdots \\ a_{m'1}X_1 & + & a_{m'2}X_2 & + & \cdots & + & a_{m'n}X_n & = 0 \end{array}$$

נצרף את שתי המערכות למערכת אחת, בת m' משוואות. אז ברור שמרחב הפתרונות שלה הוא $U \cap W$.

למדנו כיצד למצוא בסיס למרחב הפתרונות הזה, וזה נותן תשובה לבעיה.

על כן עלינו להסביר את התרגיל הבא

תרגיל 4.53: יהיו $v_1,\ldots,v_m \in F^n$. נסמן $U=\mathrm{Sp}(v_1,\ldots,v_m)$. מצא מערכת משוואות לינאריות הומוגניות $BX=0$, כך ש־U מרחב הפתרונות שלה.

רעיון: $(c_1,c_2,\ldots,c_n)^t$ הוא פתרון של $a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n=0$ אם ורק אם $(a_1,a_2,\ldots,a_n)^t$ הוא פתרון של $c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_nX_n=0$. במלים אחרות,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=0$$

פתרון: תהי $A\in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ ששורותיה הן $v_1^t,\ldots,v_m^t$. נתבונן במערכת $AX=0$ של m משוואות לינאריות הומוגניות ב־n נעלמים. יהי $P\subseteq F^n$ מרחב הפתרונות שלה. למדנו כיצד למצוא בסיס ל־P, נאמר, $w_1,\ldots,w_s\in F^n$.

תהי $B\in \mathrm{M}_{s\times n}(F)$ ששורותיה הן $w_1^t,\ldots,w_s^t$.

טענה: *U הוא מרחב הפתרונות של המערכת $BX=0$ (של s משוואות לינאריות הומוגניות ב־n נעלמים).*

טענה: *U הוא מרחב הפתרונות של המערכת $BX = 0$ (של s משוואות ליניאריות הומוגניות ב־n נעלמים).*

הוכחה: יהי U' מרחב הפתרונות של $BX = 0$. אנו נראה כי (א) $U \subseteq U'$; (ב) $\dim U = \dim U'$. מכאן, לפי משפט 4.46, $U = U'$.

(א) נשים לב ש־$A^t = (v_1, \dots, v_m)$ ו־$B^t = (w_1, \dots, w_s)$. היות ו־$w_1, \dots, w_s$ פתרונות של $AX = 0$, מתקיים $Aw_1 = 0, \dots, Aw_s = 0$. מכאן $AB^t = 0$. לכן $BA^t = (AB^t)^t = 0$. זה אומר ש־$Bv_1 = 0, \dots, Bv_m = 0$. בפרט, $v_1, \dots, v_m$ פתרונות של $BX = 0$, כלומר, $v_1, \dots, v_m \in U'$. מכאן $U = \mathrm{Sp}(v_1, \dots, v_m) \subseteq U'$.

(ב) נסמן $r = \dim(U)$. כמובן, $s = \dim P$ (כי s הוא מספר איברי בסיס של P).

כיוון ש־U הוא מרחב העמודות של A^t, מתקיים $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^t) = \dim(U) = r$. לכן $s = n - r$.

העמודות $w_1, \dots, w_s$ של B^t הן בלתי תלויות ליניארית (כי הן בסיס של P), לכן הן בסיס למרחב העמודות של B^t. לכן $\mathrm{rk}(B) = \mathrm{rk}(B^t) = s$. מכאן $\dim U' = n - s = n - (n - r) = r = \dim U$. ∎

תזכורת:

אם $C, (w_1, \dots, w_s)$ מטריצות שניתן להכפיל אז $C(w_1, \dots, w_s) = (Cw_1, \dots, Cw_s)$.

משפט 4.54: *יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. יהיו U, W שני תת־מרחבים שלו. התנאים הבאים שקולים זה לזה:*

(א) $V = U + W$ ו־ $U \cap W = \{0\}$.

(ב) *לכל $v \in V$ יש הצגה אחת ויחידה $v = u + w$, באשר $w \in W$ ו־ $u \in U$.*

הוכחה: ברור שהתנאי $V = U + W$ שקול לכך שלכל $v \in V$ יש הצגה $v = u + w$, באשר $w \in W$ ו־$u \in U$.
לכן די להוכיח: $U \cap W = \{0\}$ שקול ל־

(*) לכל $v \in V$ יש לכל היותר הצגה אחת $v = u + w$, באשר $w \in W$ ו־$u \in U$.

נוכיח זאת: נניח כי $U \cap W = \{0\}$ ותהיינה

$$u, u' \in U,\ w, w' \in W \qquad\qquad , v = u' + w' \qquad , v = u + w$$

שתי הצגות. אז $u + w = u' + w'$ ומכאן $u - u' = w' - w$. אגף ימין הוא ב־W, אגף שמאל הוא ב־U, ושניהם שווים, לכן הם ב־$U \cap W = \{0\}$. לכן $u - u' = 0 = w' - w$. מכאן $u = u'$, $w = w'$. לכן (*) מתקיים.

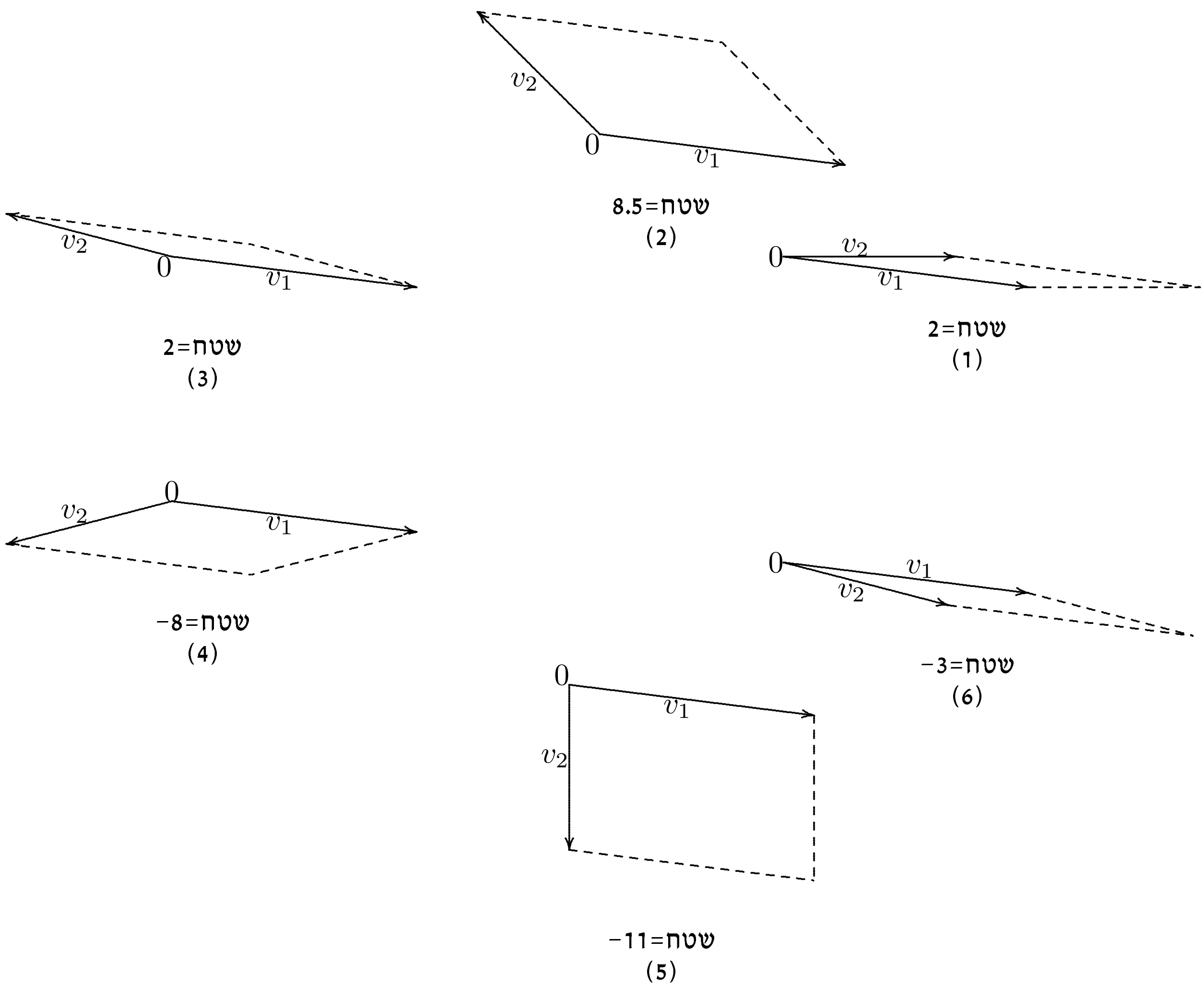
להיפך, נניח (*). כיוון ש־U, W תת מרחבים, הם מכילים את 0, ולכן $\{0\} \subseteq U \cap W$. כדי להוכיח את ההכלה ההפוכי, יהי $v \in U \cap W$. אז $0 = 0 + 0$ ו־$0 = v + (-v)$ הן שתי הצגות של 0 כסכום של איבר מ־U ואיבר מ־W. לפי היחידות $v = 0$. לכן $U \cap W = \{0\}$. ∎

הגדרה 4.55: נאמר ש־V **הוא סכום ישר של** U, W אם V, U, W מקיימים את התנאים השקולים של משפט 10.54.
סימון: $V = U \oplus W$. ∎

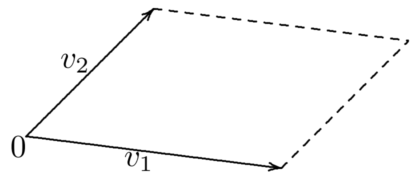
פונקציות הנפח.

מוטיבציה:

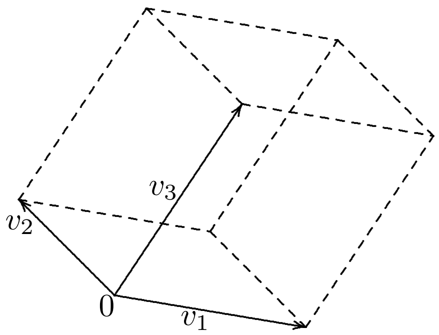
(1) עבור זוג וקטורים v_1, v_2 במישור נסמן ב־$\mathcal{N}(v_1, v_2)$ את השטח (המסומן) של המקבילית הנקבעת על ידי v_1, v_2, כחצים מהראשית. (השטח נחשב לחיובי אם הזוית בין v_1 ל־v_2 היא חיובית, כלומר, נגד כיוון השעון.)



(2) באופן דומה עבור שלשה של וקטורים v_1, v_2, v_3 במרחב נסמן ב־$\mathcal{N}(v_1, v_2, v_3)$ את הנפח (המסומן) של המקבילון הנקבע על ידי v_1, v_2, v_3, כחצים מהראשית.



(1)



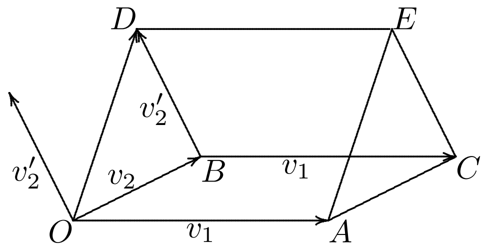
(2)

(3) כיצד לחשב אותם? האם יש הכללות של המושגים האלה ל־$\mathbb{R}^n$? ואולי אף ל־F^n, כאשר F שדה כלשהו?

הערה 5.1: תכונות של פונקצית הנפח. (נדון רק במקרה של וקטורים במישור.)

(א) $\mathcal{N}(v_1,v_2)+\mathcal{N}(v_1,v_2')=\mathcal{N}(v_1,v_2+v_2')$

אכן, בציור הבא (בו כל הוקטורים הם במישור דף הנייר) $\overrightarrow{OD}=v_2+v_2'$



ומתקיים (כאשר $\Box$ מציין את שטח המקבילית שמימינו ו־$\triangle$ את שטח המשולש שמימינו)

$$\mathcal{N}(v_1,v_2)+\mathcal{N}(v_1,v_2')=\Box(OACB)+\Box(BCED)=$$

$$\Box(OACB)+\Box(BCED)+\triangle(OBD)-\triangle(ACE)=\Box(OAED)=\mathcal{N}(v_1,v_2+v_2')$$

באופן דומה $\mathcal{N}(v_1,v_2)+\mathcal{N}(v_1',v_2)=\mathcal{N}(v_1+v_1',v_2)$

(ב) $\mathcal{N}(av_1,v_2)=a\mathcal{N}(v_1,v_2)=\mathcal{N}(v_1,av_2)$ לכל $a\in F$.

(ג) אם $v_1=v_2$ אז $\mathcal{N}(v_1,v_2)=0$

(ד) $\mathcal{N}(e_1,e_2)=1$ כאן $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, e_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. (כלומר, שטח ריבוע היחידה הוא 1.)

הגדרה 5.2: יהי F שדה. פונקציה $\mathcal{N}$ שמתאימה לכל n וקטורים $v_1, v_2, \ldots, v_n \in F^n$ ערך בשדה $\mathcal{N}(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in F$ נקראת **פונקצית נפח** על F^n אם

(א) $\mathcal{N}$ **מולטילינארית:**

(א') לכל $1 \leq i \leq n$ ולכל $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_i' \in F^n$

$$\mathcal{N}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + v_i', v_{i+1}, \ldots, v_n) =$$
$$\mathcal{N}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) + \mathcal{N}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

(א'') לכל $1 \leq i \leq n$, לכל $v_1, v_2, \ldots, v_n \in F^n$ ולכל $a \in F$

$$\mathcal{N}(v_1, \ldots, v_{i-1}, av_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) = a\mathcal{N}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n).$$

(ב) אם שניים (לפחות) מבין הוקטורים $v_1, v_2, \ldots, v_n$ שווים, אז $\mathcal{N}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0$

(ג) $\mathcal{N}$ **מנורמלת:** $\mathcal{N}(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$

עבור $A \in \mathrm{M}_n(F)$ נגדיר $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, באשר $v_1, v_2, \ldots, v_n$ שורותיה של A. אז, למשל, תנאי (ג) הוא $\mathcal{N}(I_n) = 1$.

דוגמה 5.3: **נניח $n=2$. נגדיר $\mathcal{N}\big((a,b),(c,d)\big) = ad-bc$ בכתיב של מטריצות: $\mathcal{N}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad-bc$ זוהי פונקצית נפח.**

אכן (נבדוק כאן רק את התכונה (א'); השאר קל יותר לבדיקה):

$$\mathcal{N}\big((a,b)+(a',b'),(c,d)\big) = \mathcal{N}\big((a+a',b+b'),(c,d)\big) = (a+a')d-(b+b')c =$$
$$(ad-bc)+(a'd-b'c) = \mathcal{N}\big((a,b),(c,d)\big) + \mathcal{N}\big((a',b'),(c,d)\big) \quad \blacksquare$$

מעתה תהי $\mathcal{N}$ פונקצית נפח, $A \in \mathrm{M}_n(F)$ מטריצה, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ שורותיה.

תרגיל 5.4: אם ב־A שורת אפסים אז $\mathcal{N}(A) = 0$.

הוכחה: נניח $v_i = 0$. אז

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(v_1, \ldots, v_{i-1}, 0v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) = 0\mathcal{N}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = 0 \quad \blacksquare$$

משפט 5.5: *תהי $\mathcal{P}$ פעולה אלמנטרית. אז $\mathcal{N}(\mathcal{P}(A)) = \beta \cdot \mathcal{N}(A)$, באשר* $\beta = \begin{cases} -1 & \text{אם } \mathcal{P} = \mathcal{P}_{kl} \\ \alpha & \text{אם } \mathcal{P} = \mathcal{P}_k(\alpha) \\ 1 & \text{אם } \mathcal{P} = \mathcal{P}_{kl}(\lambda) \end{cases}$.

הוכחה: (א) נניח $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{kl}$. נעשה חישוב שלכאורה אינו קשור להוכחה:

$$\begin{array}{rl} 0 = & \mathcal{N}(v_1, \ldots, v_{k-1}, \quad v_k + v_l, \quad v_{k+1}, \ldots, v_{l-1}, \quad v_k + v_l, \quad v_{l+1}, \ldots, v_n) \\ = & \mathcal{N}(v_1, \ldots, v_{k-1}, \quad v_k, \quad v_{k+1}, \ldots, v_{l-1}, \quad v_k, \quad v_{l+1}, \ldots, v_n) \\ + & \mathcal{N}(v_1, \ldots, v_{k-1}, \quad v_k, \quad v_{k+1}, \ldots, v_{l-1}, \quad v_l, \quad v_{l+1}, \ldots, v_n) \\ + & \mathcal{N}(v_1, \ldots, v_{k-1}, \quad v_l, \quad v_{k+1}, \ldots, v_{l-1}, \quad v_k, \quad v_{l+1}, \ldots, v_n) \\ + & \mathcal{N}(v_1, \ldots, v_{k-1}, \quad v_l, \quad v_{k+1}, \ldots, v_{l-1}, \quad v_l, \quad v_{l+1}, \ldots, v_n) \end{array}$$

המחובר הראשון והרביעי הם 0, השני הוא $\mathcal{N}(A)$, והשלישי $\mathcal{N}(\mathcal{P}_{kl}(A))$. לכן $0 = \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(\mathcal{P}_{kl}(A))$.

(ב) נניח $\mathcal{P} = \mathcal{P}_k(\alpha)$. אז $\mathcal{N}(\mathcal{P}_k(\alpha)(A)) = \alpha\mathcal{N}(A)$ מהתכונה (א") של $\mathcal{N}$ בהגדרה 5.2.

(ג) נניח $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{kl}(\lambda)$. נשתמש בתכונות (א'), (א"), (ב) של $\mathcal{N}$ בהגדרה 5.2:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{N}(\mathcal{P}_{kl}(\lambda)(A)) & = & \mathcal{N}(v_1, \ldots, v_{k-1}, \quad v_k, \quad v_{k+1}, \ldots, v_{l-1}, \quad v_l + \lambda v_k, \quad v_{l+1} \ldots, v_n) \\ & = & \mathcal{N}(v_1, \ldots, v_{k-1}, \quad v_k, \quad v_{k+1}, \ldots, v_{l-1}, \quad v_l, \quad v_{l+1} \ldots, v_n) \\ & + & \lambda\mathcal{N}(v_1, \ldots, v_{k-1}, \quad v_k, \quad v_{k+1}, \ldots, v_{l-1}, \quad v_k, \quad v_{l+1} \ldots, v_n) \\ & = & \mathcal{N}(A) + \lambda 0 \quad = \quad \mathcal{N}(A) \end{array}$$ ∎

מסקנה 5.6: *אם* $\mathcal{P}$ *פעולה אלמנטרית אז* $\mathcal{N}(A) \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{N}(\mathcal{P}(A)) \neq 0$.

הוכחה: לפי המשפט, $\mathcal{N}(\mathcal{P}(A)) = \beta\mathcal{N}(A)$, באשר β הוא -1 או α או 1. בכל מקרה, $\beta \neq 0$. ∎

משפט 5.7: A *הפיכה (כלומר* $\mathrm{rk}(A) = n$*) אם ורק אם* $\mathcal{N}(A) \neq 0$.

הוכחה: תהי A' המטריצה המדורגת קנונית של A. היא התקבלה מ-A על ידי סדרה של פעולות אלמנטריות.

אם A הפיכה אז $A' = I_n$, לכן $\mathcal{N}(A') = 1 \neq 0$, ולכן, לפי מסקנה 5.6, $\mathcal{N}(A) \neq 0$.

אם A אינה הפיכה אז ב-A' יש שורת אפסים, לכן, לפי תרגיל 5.4, $\mathcal{N}(A') = 0$, ולכן, לפי מסקנה 5.6, $\mathcal{N}(A) = 0$. ∎

מסקנה 5.8: *תהי E מטריצה אלמנטרית המתאימה לפעולה אלמנטרית $\mathcal{P}$. אז $\mathcal{N}(E) = \beta$, באשר β כמו במשפט 5.5.*

הוכחה: לפי ההגדרה, $E = \mathcal{P}(I_n)$. נציב $A = I_n$ במשפט 5.5: $\mathcal{N}(E) = \beta \cdot \mathcal{N}(I_n) = \beta$. ∎

מסקנה 5.9: *אם E מטריצה אלמנטרית, אז $\mathcal{N}(EA) = \mathcal{N}(E)\mathcal{N}(A)$*

הוכחה: אם E מתאימה לפעולה אלמנטרית $\mathcal{P}$, אז $EA = \mathcal{P}(A)$. לפי משפט 5.5 $\mathcal{N}(\mathcal{P}(A)) = \beta\mathcal{N}(A)$, באשר $\beta \in F$ רשום במשפט (תלוי ב־$\mathcal{P}$). לפי מסקנה 5.8, $\beta = \mathcal{N}(E)$. ∎

$$\beta = \begin{cases} -1 & \mathcal{P} = \mathcal{P}_{kl} \quad \text{אם} \\ \alpha & \mathcal{P} = \mathcal{P}_k(\alpha) \text{ אם} \\ 1 & \mathcal{P} = \mathcal{P}_{kl}(\lambda) \text{ אם} \end{cases}$$

משפט 5.10 (משפט המכפלה): אם $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$, אז $\mathcal{N}(AB) = \mathcal{N}(A)\mathcal{N}(B)$

הוכחה: (1) אם $\mathrm{rk}(A) < n$, אז $\mathrm{rk}(AB) \leq \mathrm{rk}(A) < n$ ולכן $\mathcal{N}(AB) = 0$, $\mathcal{N}(A) = 0$, ומכאן הנוסחה.

(2) אם $\mathrm{rk}(A) = n$, אז A הפיכה, ולכן מכפלה של מטריצות אלמנטריות, נאמר $A = E_k \cdots E_1$. נראה $\mathcal{N}(E_k \cdots E_1 B) = \mathcal{N}(E_k \cdots E_1)\mathcal{N}(B)$ באינדוקציה על k.

עבור $k = 1$ זוהי מסקנה 5.9.

נניח נכונות עבור $k - 1$. לפי מסקנה 5.9 והנחת האינדוקציה

$$\mathcal{N}(E_k E_{k-1} \cdots E_1 B) = \mathcal{N}(E_k)\mathcal{N}(E_{k-1} \cdots E_1 B) = \mathcal{N}(E_k)\mathcal{N}(E_{k-1} \cdots E_1)\mathcal{N}(B) =$$

$$\mathcal{N}(E_k E_{k-1} \cdots E_1)\mathcal{N}(B)$$ ∎

משפט 5.11: *לכל* n *יש לכל היותר פונקצית נפח אחת* $\mathcal{N}$.

הוכחה: תהיינה $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ שתי פונקציות נפח. נראה שלכל $A \in \mathrm{M}_n(A)$ מתקיים $\mathcal{N}_1(A) = \mathcal{N}_2(A)$.

(1) אם A אינה הפיכה אז $\mathcal{N}_1(A) = 0 = \mathcal{N}_2(A)$ לפי משפט 5.7.

(2) אם A אלמנטרית אז $\mathcal{N}_1(A) = \mathcal{N}_2(A)$ לפי מסקנה 5.8.

(3) אם A הפיכה, אז היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות $A = E_k \cdots E_1$, ולכן לפי משפט המכפלה

$$\mathcal{N}_1(A) = \mathcal{N}_1(E_k) \cdots \mathcal{N}_1(E_1) = \mathcal{N}_2(E_k) \cdots \mathcal{N}_2(E_1) = \mathcal{N}_2(A). \quad \blacksquare$$

משפט 5.12: $\mathcal{N}(A^t) = \mathcal{N}(A)$

הוכחה: (1) אם A אינה הפיכה אז גם A^t אינה הפיכה, ולכן שני האגפים הם 0, לפי משפט 5.7.

(2) נניח ש-A אלמנטרית, כלומר $A = \mathcal{P}(I_n)$, באשר $\mathcal{P}$ פעולה אלמנטרית.

אם $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{kl}$ או $\mathcal{P} = \mathcal{P}_k(\alpha)$ אז $A^t = A$ ולכן $\mathcal{N}(A^t) = \mathcal{N}(A)$.

אם $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{kl}(\lambda)$ אז גם A^t מטריצה אלמנטרית; היא מתאימה לפעולה $\mathcal{P}_{lk}(\lambda)$. לפי מסקנה 5.8 $\mathcal{N}(A^t) = 1 = \mathcal{N}(A)$

(3) אם A הפיכה, אז היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות $A = E_k \cdots E_1$, ולכן $A^t = E_1^t \cdots E_k^t$. לכן לפי (2),

$$\mathcal{N}(A^t) = \mathcal{N}(E_1^t) \cdots \mathcal{N}(E_k^t) = \mathcal{N}(E_1) \cdots \mathcal{N}(E_k) = \mathcal{N}(E_k \cdots E_1) = \mathcal{N}(A) \quad \blacksquare$$

$\mathcal{P}_{kl}$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & & k & & & l & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ l \\ \\ \\ \\ \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 0 & & \cdots & 1 & & \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & \cdots & 0 & & \\
 & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

$\mathcal{P}_k(\alpha)$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & & k & & & & & & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & \alpha & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\mathcal{P}_{kl}(\lambda)$$

$$E$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & k & & l & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ l \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & 1 & & & & & \\
 & & 1 & \cdots & 0 & & \\
 & & & 1 & & & \\
 & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
 & & & 1 & & & \\
 & & \lambda & \cdots & 1 & & \\
 & & & & & 1 & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

$$E^t$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & k & & l & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ l \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & 1 & & & & & \\
 & & 1 & \cdots & \lambda & & \\
 & & & 1 & & & \\
 & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
 & & & 1 & & & \\
 & & 0 & \cdots & 1 & & \\
 & & & & & 1 & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\mathcal{P}_{lk}(\lambda)$$

דטרמיננטה.

משפט 5.13: *לכל n קיימת פונקצית נפח יחידה (על מטריצות מסדר $n \times n$). היא נקראת* **הדטרמיננטה***. סימון:* $\det(A)$ או $|A|$, באשר $A \in \mathrm{M}_n(F)$.

הוכחה: היחידות הוכחה במשפט 5.11, לכן די למצוא פונקצית נפח אחת לכל n. דבר זה נעשה באינדוקציה על n.

עבור $n = 1$ נגדיר $|(a)| = a$. קל לראות שלפונקציה זו יש התכונות של פונקצית נפח.

(עבור $n = 2$ נגדיר $\mathcal{N}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$; זוהי פונקצית נפח - ראה דוגמה 5.3.)

נניח, באינדוקציה, שהגדרנו פונקצית נפח (עם הסימון $|A|$) למטריצות מסדר $(n-1) \times (n-1)$.

תהי $A \in \mathrm{M}_n(F)$. עבור $1 \leq i, j \leq n$ נסמן ב־A_{ij} את **המינור ה־**(i,j) של A, דהיינו, המטריצה מסדר $(n-1) \times (n-1)$ שמתקבלת מ־A על ידי מחיקת השורה ה־i והעמודה ה־j. (להבדיל מ־$(A)_{ij}$, שמסמן את הרכיב של A בשורה ה־i בעמודה ה־j.) אז נבחר $1 \leq j \leq n$ *כלשהו(!)* ונגדיר

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} (A)_{ij} \, |A_{ij}| \, . \tag{1}$$

נותר להוכיח, שזוהי פונקצית נפח.

(א') יהי $1 \leq k \leq n$. תהיינה $A, B, C \in \mathrm{M}_n(F)$ מטריצות שנבדלות זו מזו רק בשורה ה־k, כאשר השורה ה־k של C היא סכום השורות ה־k של A, B. צריך להוכיח: $|C| = |A| + |B|$.

נראה תחילה שלכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים

$$(C)_{ij}|C_{ij}| = (A)_{ij}|A_{ij}| + (B)_{ij}|B_{ij}| \tag{2}$$

אם $i \neq k$, אז $(A)_{ij} = (B)_{ij} = (C)_{ij}$. כמו כן, גם המינורים $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathrm{M}_{n-1}(F)$ נבדלים זה מזה רק בשורה אחת, ושורה זו ב־C_{ij} היא סכום השורות המתאימות ב־A_{ij}, B_{ij}. לכן לפי הנחת האינדוקציה, $|C_{ij}| = |A_{ij}| + |B_{ij}|$. מכאן (2).

אם $i = k$, אז $A_{ij} = B_{ij} = C_{ij}$ ואילו $(C)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$ (כי אלה רכיבים בשורה ה־k). מכאן (2).

לכן

$$\begin{aligned}|C| &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}(C)_{ij}|C_{ij}| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\big((A)_{ij}|A_{ij}| + (B)_{ij}|B_{ij}|\big)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}(A)_{ij}|A_{ij}| + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}(B)_{ij}|B_{ij}| = |A| + |B|\end{aligned}$$

(א״) יהי $1 \leq k \leq n$ ויהי $a \in F$. תהיינה $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$ מטריצות שנבדלות זו מזו רק בשורה ה־k, כאשר השורה ה־k של B היא הכפולה ב־a של השורה ה־k של A. צריך להוכיח: $|B| = a|A|$.

נראה תחילה שלכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים

$$(B)_{ij}|B_{ij}| = a(A)_{ij}|A_{ij}| \tag{3}$$

אם $i \neq k$, אז $(B)_{ij} = (A)_{ij}$. כמו כן, גם המינורים $A_{ij}, B_{ij} \in \mathrm{M}_{n-1}(F)$ נבדלים זה מזה רק בשורה אחת, ושורה זו ב־B_{ij} היא הכפולה ב־a של השורה המתאימה ב־A_{ij}. לכן לפי הנחת האינדוקציה, $|B_{ij}| = a|A_{ij}|$. מכאן (3).

אם $i = k$, אז $A_{ij} = B_{ij}$ ואילו $(B)_{ij} = a(A)_{ij}$ (כי אלה רכיבים בשורה ה־k). מכאן (3).

לכן

$$|B| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}(B)_{ij}|B_{ij}| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a(A)_{ij}|A_{ij}| = a\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}(A)_{ij}|A_{ij}| = a|A|$$

(ב) תהי $A \in \mathrm{M}_n(F)$ ונניח שיש לה שתי שורות זהות: השורה ה־k והשורה ה־l, באשר $k < l$. נראה ש־$|A| = 0$.

יהי $1 \leq i \leq n$. אם $i \neq k, l$ אז גם במינור A_{ij} שתי שורות זהות, ולכן, לפי הנחת האינדוקציה, $|A_{ij}| = 0$. כמו כן $(A)_{kj} = (A)_{lj}$ (בגלל שאלה רכיבים בשורות הזהות). קל לראות שאת המינור A_{kj} אפשר לקבל מהמינור A_{lj} על ידי מחיקת השורה ה־k והוספתה אחרי השורה ה־$(l-1)$. מחיקה והוספה אלה שקולות להחלפת השורה ה־k ב־A_{lj} עם $(l-1-k)$ שורות שאחריה (שמספריהן $k+1, k+2, \ldots, l-1$). כל החלפה כזו מכפילה ב־(-1) את הדטרמיננטה של המינור. לכן $|A_{kj}| = (-1)^{l-1-k}|A_{lj}|$. לכן

$$\begin{aligned}
|A| &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}(A)_{ij}|A_{ij}| = (-1)^{k+j}(A)_{kj}|A_{kj}| + (-1)^{l+j}(A)_{lj}|A_{lj}| = \\
&= (-1)^{k+j}(-1)^{l-1-k}(A)_{lj}|A_{lj}| + (-1)^{l+j}(A)_{lj}|A_{lj}| = \\
&= ((-1)^{l+j-1} + (-1)^{l+j})(A)_{lj}|A_{lj}| = 0
\end{aligned}$$

v_i' היא השורה v_i בלי הרכיב ה־j:

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ v_k = v_l \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_{l-1} \\ v_k = v_l \\ v_{l+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad A_{lj} = \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_{k-1}' \\ v_k' = v_l' \\ v_{k+1}' \\ \vdots \\ v_{l-1}' \\ v_{l+1}' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} \qquad A_{kj} = \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_{k-1}' \\ v_{k+1}' \\ \vdots \\ v_{l-1}' \\ v_k' = v_l' \\ v_{l+1}' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix}$$

(ג) נראה שאם $A = I_n$ אז $|A| = 1$. אכן, $A_{jj} = I_{n-1}$, לכן לפי הנחת האינדוקציה $|A_{jj}| = 1$. כמו כן $(A)_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$. לכן

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} (A)_{ij} |A_{ij}| = (-1)^{j+j} (A)_{jj} |A_{jj}| = (-1)^{2j} 1 \cdot 1 = 1.$$

הוכחנו שלפונקציה המוצעת כל התכונות של פונקציית נפח, לכן היא פונקציית נפח. ∎

הערה 5.14: לפי היחידות של פונקציית הנפח, ההגדרה (1) איננה תלויה בבחירת j. לכן (1) נותן n אפשרויות שונות לחישוב הדטרמיננטה. קוראים לה **נוסחת הפיתוח של הדטרמיננטה לפי העמודה ה־**j.

דוגמה 5.15: חישוב דטרמיננטות לפי ההגדרה במשפט.

(א) נִקח $j = 1$:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a\,|d| + (-1)^{2+1} c\,|b| = ad - bc$$

(ב) נִקח, למשל, $j = 2$:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= (-1)^{1+2} b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = \\ &= -b(di - gf) + e(ai - gc) - h(af - dc) = \\ &= aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd \end{aligned}$$

דרך לזכור את הנוסחה:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd$$

(ג) אם $n = 4$ אז

$$|A| = \sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+1} (A)_{i1} \, |A_{i1}|$$

וכל אחד מארבעת המחוברים באגף ימין אפשר לכתוב, לפי דוגמה (ב) כסכום של 6 מכפלות של הרכיבים של A. מכאן ש־$|A|$ הוא סכום של 24 מחוברים, כל אחד מכפלה של 4 רכיבים של A. ראה גם דוגמה 5.18 להלן.

(שים לב שארבעת הרכיבים האלה הם תמיד משורות שונות ומעמודות שונות של A. מספר המכפלות של ארבעה רכיבים שיש להן תכונה זו הוא בדיוק 24. לכן כל המכפלות האלה מופיעות בפיתוח הדטרמיננטה. מחציתן מופיעות עם סימן $+$ ומחציתן עם סימן $-$. נדון בעניין זה במשפט 5.26.)

תרגיל 5.16: $A^t{}_{ij} = (A_{ji})^t$ לכל $1 \le i, j \le n$.

הוכחה: אגף שמאל נוצר מ־A על ידי הפיכת שורות לעמודות ומחיקת השורה ה־i והעמודה ה־j. אגף ימין נוצר מ־A על ידי מחיקת השורה ה־j והעמודה ה־i והפיכת שורות לעמודות. ברור ששניהם שווים. ∎

משפט 5.17 (פיתוח הדטרמיננטה לפי השורה ה־i): *יהי* $1 \le i \le n$. *אז לכל* $A \in \mathrm{M}_n(F)$

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (A)_{ij} \, |A_{ij}| \tag{4}$$

הוכחה: נשתמש בנוסחת הפיתוח של $|A^t|$ לפי העמודה ה־i ובתרגיל 5.16:

$$|A| = |A^t| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} (A^t)_{ji} |A^t_{ji}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (A)_{ij} |A_{ij}|$$

ההגדרה המקורית של הדטרמיננטה, לעיל:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} (A)_{ij} \, |A_{ij}| . \tag{1}$$

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} (A)_{ji} \, |A_{ji}| . \tag{1'}$$

דוגמה 5.18: נקח $i=4$: $|A| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{4+j}(A)_{4j}\left|A_{4j}\right|$

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
=& -a_{41}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + a_{42}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} - a_{43}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} + a_{44}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
=& -a_{41}\big(a_{12}a_{23}a_{34} + a_{22}a_{33}a_{14} + a_{32}a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}a_{32} - a_{24}a_{33}a_{12} - a_{34}a_{13}a_{22}\big) \\
&+ a_{42}\big(a_{11}a_{23}a_{34} + a_{21}a_{33}a_{14} + a_{31}a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}a_{31} - a_{24}a_{33}a_{11} - a_{34}a_{13}a_{21}\big) \\
&- a_{43}\big(a_{11}a_{22}a_{34} + a_{21}a_{32}a_{14} + a_{31}a_{12}a_{24} - a_{14}a_{22}a_{31} - a_{24}a_{32}a_{11} - a_{34}a_{12}a_{21}\big) \\
&+ a_{44}\big(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}\big) \\
=& -a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\
&+ a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} \\
&- a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} \\
&+ a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} \\
&+ a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}
\end{aligned}
$$

דטרמיננטה בעזרת תמורות.

הגדרה 5.19: יהי n מספר טבעי ונסמן $J_n := \{1, 2, \ldots, n\}$. **תמורה על** J_n היא העתקה $\sigma\colon J_n \to J_n$ שהינה חד חד ערכית ועל. במילים אחרות, $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ היא סדרת כל האיברים של J_n, אבל לא בהכרח באותו סדר. קבוצת כל התמורות על J_n תסומן S_n. אם $\sigma, \tau \in S_n$ אז גם $\sigma\tau := \sigma \circ \tau \in S_n$. יש $n!$ תמורות ב־S_n. ∎

סימון 5.20: רישום של תמורה. דוגמה עבור $n = 8$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 4 & 8 & 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ (מתחת כל $i \in J_n$ עומד $\sigma(i)$). הסימון $(k\ l)$ מסמן את התמורה שמחליפה בין k ו־l ומשאירה את שאר איברי J_n במקומם. ∎

דוגמה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

הגדרה 5.21: יהי F שדה ותהי $\sigma \in S_n$.

(א) **המטריצה של תמורה** σ היא $P(\sigma) := (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \in \mathrm{M}_n(F)$.

(ב) **הסימן** $\mathrm{Sign}(\sigma)$ של $\sigma \in S_n$ הוא $\det(P(\sigma))$. (אפשר להראות שהוא אינו תלוי ב־F.) ∎

הערה 5.22: (א) אם $A \in \mathrm{M}_n(F)$ **מטריצת תמורה**, כלומר, $A = P(\sigma)$ עבור איזה $\sigma \in S_n$, אז

(*) בכל עמודה של A יש רק רכיב אחד שונה מאפס, הוא 1, והוא במיקום אחר בכל עמודה.

להיפך, אם A מקיימת את (*) אז $A = P(\sigma)$ עבור איזה $\sigma \in S_n$.

(ב) אם A מטריצת תמורה אז מינור של רכיב 1 בה הוא גם מטריצת תמורה. זה נובע מאפיון (*).

(ג) אם A מטריצת תמורה אז $|A| = \pm 1$. זה נובע מ־(ב) באינדוקציה על n.

(ד) $\mathrm{Sign}(\sigma) = \pm 1$ לכל $\sigma \in S_n$. אומרים ש־σ **זוגית** אם $\mathrm{Sign}(\sigma) = 1$ **ואי זוגית** אם $\mathrm{Sign}(\sigma) = -1$.

(ה) אם $\sigma = 1$ אז $\mathrm{Sign}(\sigma) = 1$. אכן, $P(\sigma) = I_n$, לכן $|P(\sigma)| = 1$.

(ו) אם $\sigma = (k\ l)$ אז $\mathrm{Sign}(\sigma) = -1$. אכן, $P(\sigma) = E_{kl}$, לכן לפי משפט **5.5**, $|P(\sigma)| = -1$. ∎

$$
P(\sigma) = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 4 & 8 & 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}
$$

משפט 5.23: *תהיינה* $\sigma, \tau \in S_n$. אז $P(\sigma)P(\tau) = P(\sigma\tau)$ ולכן $\operatorname{Sign}(\sigma)\operatorname{Sign}(\tau) = \operatorname{Sign}(\sigma\tau)$.

הוכחה: נסמן $A = P(\sigma)$. אז $Ae_j = e_{\sigma(j)}$ לכל $j \in J_n$. לכן

$$P(\sigma)P(\tau) = A(e_{\tau(1)}, \ldots, e_{\tau(n)}) = (Ae_{\tau(1)}, \ldots, Ae_{\tau(n)}) = (e_{\sigma(\tau(1))}, \ldots, e_{\sigma(\tau(n))}) =$$
$$= (e_{(\sigma\tau)(1)}, \ldots, e_{(\sigma\tau)(n)}) = P(\sigma\tau).$$

כעת נפעיל את משפט המכפלה על שוויון זה: $|P(\sigma\tau)| = |P(\sigma)| \cdot |P(\tau)|$. ∎

משפט 5.24: *תהי* $\sigma \in S_n$*. אז* $P(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$*, באשר* $N(\sigma) = \#\{(i,j)|\ i < j,\ \sigma(i) > \sigma(j)\}$.

הוכחה: לכל $1 \leq i \leq n$ תהי $P_i \in \mathrm{M}_i(F)$ המטריצה שמורכבת מהעמודות $1, \dots, i$ והשורות $\sigma(1), \dots, \sigma(i)$ של $P(\sigma)$ (כלומר, P_i מתקבלת מ־$P(\sigma)$ על ידי מחיקת יתר השורות והעמודות).

אז $P_1 = (1)$, $P_n = P(\sigma)$, ופיתוח לפי העמודה האחרונה נותן $|P_i| = (-1)^{i+\sigma(i)-Z(i)}|P_{i-1}|$, באשר $Z(i)$ הוא מספר השורות ב־$P(\sigma)$ לפני השורה $\sigma(i)$ שנמחקו כדי לקבל את P_i מתוך $P(\sigma)$, כלומר, $Z(i) = \#\{j > i|\ \sigma(j) < \sigma(i)\}$. לכן

$$\mathrm{Sign}(\sigma) = |P(\sigma)| = (-1)^{n+\sigma(n)}(-1)^{n-1+\sigma(n-1)-Z(n-1)} \cdots (-1)^{2+\sigma(2)-Z(2)} \cdot 1 .$$

נשים לב ש־$Z(n) = 0$ ו־ $Z(1) = \sigma(1) - 1$ (=מספר השורות שלפני השורה $\sigma(1)$), לכן את המשוואה לעיל אפשר לכתוב כך:

$$\mathrm{Sign}(\sigma) = (-1)^{n+\sigma(n)-Z(n)}(-1)^{n-1+\sigma(n-1)-Z(n-1)} \cdots (-1)^{2+\sigma(2)-Z(2)}(-1)^{1+\sigma(1)-Z(1)} .$$

$$=(-1)^{(1+\cdots+n)+(\sigma(1)+\cdots+\sigma(n))-(Z(1)+\cdots+Z(N))} = (-1)^{Z(1)+\cdots+Z(N)} = (-1)^{N(\sigma)} \quad \blacksquare$$

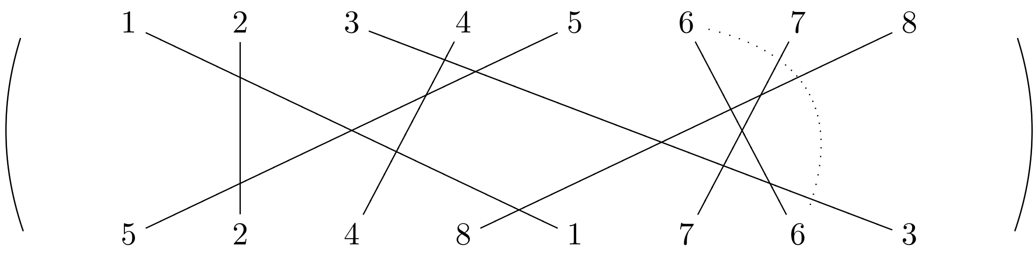
הערה 5.25: חישוב מהיר של הסימן. נרשום $\sigma \in S_n$ כמו בהערה 5.20

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 4 & 8 & 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

ונחבר כל $k \in J_n$ בשורה העליונה עם k בשורה התחתונה בקו כמעט ישר, כך שאין שלושה קווים שנחכים בנקודה אחת (וכל שני קווים נחתכים לכל היותר בנקודה אחת). אז $N(\sigma)$ הוא מספר נקודות החיתוך של הקווים.

אכן, לכל $1 \leq i \leq n$, מהאיבר בשורה התחתונה שנמצא במקום ה־i (זהו $\sigma(i)$) יוצא קו - נסמנו L_i - לאיבר שנמצא במקום ה־$\sigma(i)$ בשורה העליונה. לכן אם $i < j$ אז L_i, L_j נחתכים אם ורק אם $\sigma(i) > \sigma(j)$. לכן $N(\sigma)$ הוא מספר החיתוכים של הקווים. ∎

דוגמה:



$N(\sigma) = 14$ (זוגי), לכן $\mathrm{Sign}(\sigma) = +1$.

משפט 5.26: *תי* $A \in \mathrm{M}_n(F)$. *אז* $|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{Sign}(\sigma)(A)_{1\,\sigma(1)}(A)_{2\,\sigma(2)} \cdots (A)_{n\,\sigma(n)}$.

הוכחה: נסמן את אגף ימין של המשוואה לעיל ב־$\mathcal{N}(A)$ ונראה ש־$\mathcal{N}$ פונקצית נפח.

(א') יהי $1 \leq k \leq n$. תהיינה $A, B, C \in \mathrm{M}_n(F)$ מטריצות שנבדלות זו מזו רק בשורה ה־k, כאשר השורה ה־k של C היא סכום השורות ה־k של A, B. צריך להוכיח: $\mathcal{N}(C) = \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B)$ ואכן,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(C) &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{Sign}(\sigma)(C)_{1\,\sigma(1)} \cdots \big((A)_{k\,\sigma(k)} + (B)_{k\,\sigma(k)}\big) \cdots (C)_{n\,\sigma(n)} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{Sign}(\sigma)(A)_{1\,\sigma(1)} \cdots (A)_{k\,\sigma(k)} \cdots (A)_{n\,\sigma(n)} + \\ &+ \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{Sign}(\sigma)(B)_{1\,\sigma(1)} \cdots (B)_{k\,\sigma(k)} \cdots (B)_{n\,\sigma(n)} = \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B)\end{aligned}$$

(א") יהי $1 \le k \le n$ ויהי $a \in F$. תהיינה $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$ מטריצות שנבדלות זו מזו רק בשורה ה־k, כאשר השורה ה־k של B היא הכפולה ב־a של השורה ה־k של A. צריך להוכיח: $\mathcal{N}(B) = a\mathcal{N}(A)$ ואכן

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(B) &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{Sign}(\sigma)(A)_{1\,\sigma(1)} \cdots \big(a(A)_{k\,\sigma(k)}\big) \cdots (A)_{n\,\sigma(n)} = \\ &= a \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{Sign}(\sigma)(A)_{1\,\sigma(1)} \cdots (A)_{k\,\sigma(k)} \cdots (A)_{n\,\sigma(n)} = a\mathcal{N}(A)\end{aligned}$$

(ב) תהי $A \in \mathrm{M}_n(F)$ שיש לה שתי שורות זהות: השורה ה־k והשורה ה־l, באשר $k < l$. צריך להוכיח: $\mathcal{N}(A) = 0$. תהי $\tau = (k\ l) \in S_n$ אז $\mathrm{Sign}(\tau) = -1$ ו־$\tau^2 = 1$. אם $\sigma \in S_n$ זוגית, אז $\rho = \sigma\tau$ אי זוגית, לפי משפט 5.23. כל תמורה אי זוגית ρ היא מהצורה הזאת, כי $\rho = (\rho\tau)\tau$ ו־$\rho\tau$ זוגית, והיא מהצורה הזאת עבור σ יחידה, כי אם $\sigma_1\tau = \sigma_2\tau$ אז $\sigma_1 = \sigma_1\tau\tau = \sigma_2\tau\tau = \sigma_2$.

לכן $\mathcal{N}(A) = \Sigma_1 + \Sigma_2$, באשר $\Sigma_1 = \sum_{\sigma\ \text{זוגית}} \mathrm{Sign}(\sigma)(A)_{1\,\sigma(1)} \cdots (A)_{n\,\sigma(n)}$ ו־

$$\Sigma_2 = \sum_{\sigma\ \text{זוגית}} \mathrm{Sign}(\sigma\tau)(A)_{1\,\sigma\tau(1)} \cdots (A)_{k\,\sigma\tau(k)} \cdots (A)_{l\,\sigma\tau(l)} \cdots (A)_{n\,\sigma\tau(n)} =$$

$$\sum_{\sigma\ \text{זוגית}} \mathrm{Sign}(\sigma)\,\mathrm{Sign}(\tau)(A)_{1\,\sigma(1)} \cdots (A)_{k\,\sigma(l)} \cdots (A)_{l\,\sigma(k)} \cdots (A)_{n\,\sigma(n)} =$$

$$-\sum_{\sigma\ \text{זוגית}} \mathrm{Sign}(\sigma)(A)_{1\,\sigma(1)} \cdots (A)_{l\,\sigma(l)} \cdots (A)_{k\,\sigma(k)} \cdots (A)_{n\,\sigma(n)} = -\Sigma_1$$

לכן $\mathcal{N}(A) = \Sigma_1 + \Sigma_2 = 0$.

(ג) אם $A = I_n$ אז $(A)_{i\,\sigma(i)} \neq 0$ רק אם $\sigma(i) = i$. לכן $(A)_{1\,\sigma(1)} \cdots (A)_{n\,\sigma(n)} \neq 0$ רק אם $\sigma = 1$. מכאן $\mathcal{N}(A) = \mathrm{Sign}(1)(A)_{1\,1} \cdots (A)_{n\,n} = 1 \cdot 1 = 1$.

לכן $\mathcal{N}$ פונקצית נפח. בגלל יחידותה, $\mathcal{N}$ היא הדטרמיננטה. ∎

מסקנה 5.27: *יהי F שדה ויהי R תת חוג שלו (תת חקבוצה של F שמכילה את $0,1$ וסגורה תחת החיבור, החיסור והכפל ב־F). אם $A \in \mathrm{M}_n(F)$ וכל רכיבי A הם ב־R אז $\det(A) \in R$.*

הוכחה: לפי משפט 5.26, $\det(A)$ הוא סכום של מכפלות של רכיבי A ונגדיים של מכפלות כאלה. ∎

שימושים של דטרמיננטה.

הגדרה 5.28: תהי $A \in \mathrm{M}_n(F)$. **המטריצה המצורפת ל-**A $\operatorname{adj} A \in \mathrm{M}_n(F)$ מוגדרת על ידי

$$((\operatorname{adj} A)^t)_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}| \qquad \text{כלומר} \qquad (\operatorname{adj} A)_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ji}|. \qquad \blacksquare$$

דוגמה 5.29: אם $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ אז $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

אם $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ אז $(\operatorname{adj} A)^t = \begin{pmatrix} ei-fh & fg-di & dh-eg \\ hc-bi & ai-cg & bg-ah \\ bf-ec & dc-af & ae-bd \end{pmatrix}$.

לכן $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} ei-fh & hc-bi & bf-ec \\ fg-di & ai-cg & dc-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{pmatrix}$.

תרגיל 5.30: $\operatorname{adj} A^t = (\operatorname{adj} A)^t$.

הוכחה: $(\operatorname{adj} A^t)_{ij} = (-1)^{i+j}|{A^t}_{ji}| = (-1)^{i+j}|(A_{ij})^t| = (-1)^{i+j}|A_{ij}| = ((\operatorname{adj} A)^t)_{ij}$. $\blacksquare$

משפט 5.31: *תהי* $A \in \mathrm{M}_n(F)$.

(א) $$A \operatorname{adj} A = |A| I_n = \begin{pmatrix} |A| & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |A| \end{pmatrix}$$

(ב) $\operatorname{adj} A \; A = |A| I_n$.

הוכחה: (א) יהיו $1 \le i, j \le n$. צריך להוכיח: $(A \operatorname{adj} A)_{ij} = \begin{cases} |A| & i = j \\ 0 & i \ne j \end{cases}$.

$$(A \operatorname{adj} A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} (\operatorname{adj} A)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} (A)_{ik} |A_{jk}|.$$

אם $i = j$, הביטוי באגף ימין הוא בדיוק הפיתוח של $|A|$ לפי השורה ה־j, לכן שווה ל־$|A|$.

אם $i \ne j$, תהי A' המטריצה המתקבלת מ־A, אם רושמים את השורה ה־i של A במקום השורה ה־j של A. אז ב־A' שתי שורות זהות, לכן $|A'| = 0$. כמו כן, לכל k,

$$A'_{jk} = A_{jk}, \qquad (A')_{jk} = (A)_{ik}.$$

אם נציב זאת בחישוב לעיל, נקבל (פיתוח של A' לפי השורה ה־j)

$$(A \operatorname{adj} A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} (A')_{jk} |A'_{jk}| = |A'| = 0$$

(ב) $\text{adj}\, A\; A = |A| I_n$.

(ב) לפי תרגיל 5.30 ולפי (א) מיושם על A^t,

$$(\text{adj}\, A\; A)^t = A^t (\text{adj}\, A)^t = A^t (\text{adj}\, A^t) = |A^t| I_n = |A| I_n = (|A| I_n)^t.$$

ומכאן הטענה. ∎

תוצאה 5.32: אם $|A| \neq 0$ *אז* $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A$.

דוגמה 5.33: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

משפט 5.34 (Cramer): *תהי $AX=b$ מערכת של n משוואות ליניאריות ב־n נעלמים מעל שדה F. נניח $|A|\neq 0$. אז למערכת פתרון יחיד $c=(c_1,c_2,\ldots,c_n)^t$ הנתון על ידי הנוסחה $c_i=\frac{|A_i|}{|A|}$ באשר $A_i\in \mathrm{M}_n(F)$ מתקבלת מ־A על ידי החלפת העמודה ה־i של A בעמודה b.*

הוכחה: אם $|A|\neq 0$ אז A הפיכה ולכן למערכת יש פתרון יחיד c. אז $Ac=b$ ולכן $c=A^{-1}b$. לפי תוצאה 5.32, $c=\frac{1}{|A|}(\mathrm{adj}\,A)b$. נניח $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)^t\in F^n$ ונסמן $B=A_i$. לפי כלל הכפל של מטריצות,

$$c_i=\frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{adj}\,A)_{ik}b_k=\frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}|A_{ki}|b_k=\frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}|B_{ki}|(B)_{ki}=\frac{1}{|A|}|B|$$

השוויון האחרון נובע מפיתוח של $|B|$ לפי העמודה ה־i. ∎

דוגמה 5.35: **למערכת**

$$2X + 3Y = 4$$
$$5X + 6Y = 1$$

פתרון יחיד $(c_1, c_2)^t$, **באשר**

$$.c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{4 \cdot 6 - 3 \cdot 1}{2 \cdot 6 - 3 \cdot 5} = -7, \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot 1 - 4 \cdot 5}{2 \cdot 6 - 3 \cdot 5} = 6$$

6. העתקות לינאריות

דברים כלליים אודות העתקות בין קבוצות:

סימון 6.1: $T\colon V\to W$ או $V\xrightarrow{T}W$ מסמן העתקה בשם T שמעתיקה איברי קבוצה V לתוך הקבוצה W. אפשר גם לכתוב $V\to W$ אם אין רוצים לציין את שם ההעתקה במפורש. לכל $x\in V$, הסימון $T(x)$ מסמן את האיבר בקבוצה W אליו מועתק x. איבר זה נקרא **התמונה של** x **תחת** T.

גם הסימון $\mapsto$ נועד להגדיר העתקה, בלי לציין את שמה. למשל, ההעתקה $x\mapsto x^2$ היא ההעתקה שמעתיקה כל איבר לריבוע שלו.

שים לב לשוני: מימין ומשמאל ל־$\to$ עומדות קבוצות, בעוד שמימין ומשמאל ל־$\mapsto$ עומדים איברים!

עבור תת קבוצה U של V, הסימון $T(U)$ מסמן את הקבוצה $\{T(u)|\ u\in U\}$. בפרט:

$\operatorname{Im}T=T(V)=\{T(v)|\ v\in V\}$ היא **התמונה של** T.

העתקת הזהות $1_V\colon V\to V$ של קבוצה V מוגדרת על ידי $1_V(v)=v$ לכל $v\in V$.

שתי העתקות $S,T\colon V\to W$ הן שוות אם $S(v)=T(v)$ לכל $v\in V$.

הרכבה של העתקות: תהיינה $S\colon U \to V,\ T\colon V \to W$ שתי העתקות. נגדיר העתקה $T \circ S\colon U \to W$ על ידי $T \circ S(u) = T(S(u))$ לכל $u \in U$.

תהיינה $U \xrightarrow{S} V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{R} X$ שלוש העתקות. אז $R \circ (T \circ S) = (R \circ T) \circ S$. אכן, לכל $s \in S$ מתקיים

$$\Big(R \circ (T \circ S)\Big)(s) = R\Big((T \circ S)(s)\Big) = R\Big(T\big(S(s)\big)\Big)$$
$$\Big((R \circ T) \circ S\Big)(s) = \Big(R \circ T\Big)\big(S(s)\big) = R\Big(T\big(S(s)\big)\Big)$$

נעיר שלא בהכרח $T \circ S = S \circ T$.

הגדרה 6.2: העתקה $T\colon V \to W$ נקראת

(א) **חד חד ערכית** (חח"ע) אם לכל $v, v' \in V$ מתקיים: אם $T(v) = T(v')$ אז $v = v'$.

(ב) **על**, אם לכל $w \in W$ יש $v \in V$ כך ש־$T(v) = w$.

אם $T\colon V \to W$ חח"ע ועל, יש לה העתקה **הופכית** $T^{-1}\colon W \to V$ אשר מוגדרת באופן הבא: לכל $w \in W$, $T^{-1}(w)$ הוא אותו האיבר היחיד של V עבורו $T(v) = w$. (איבר v כזה קיים כי T על; הוא יחיד כי T חח"ע.) קל לראות שגם T^{-1} חח"ע ועל. כמו כן $T^{-1} \circ T = 1_V$ ו־$T \circ T^{-1} = 1_W$.

הגדרה 6.3: יהיו V, W שני מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F. העתקה $T\colon V \to W$ נקראת **לינארית** אם היא

(1) שומרת חיבור: $T(v+v') = T(v) + T(v')$, לכל $v, v' \in V$.

(2) שומרת כפל בסקלר: $T(\alpha v) = \alpha T(v)$, לכל $v \in V$ ולכל $\alpha \in F$.

דוגמאות 6.4: (א) נגדיר $T\colon F^2 \to F^3$ על ידי $T((x,y)) = (2x+3y, x-y, -x)$. אז T לינארית.

אכן, היא שומרת חיבור:

$$\begin{aligned}T((x,y)+(x',y')) &= T((x+x', y+y')) = \\ &= (2(x+x')+3(y+y'), (x+x')-(y+y'), -(x+x')) \\ &= (2x+3y, x-y, -x) + (2x'+3y', x'-y', -x') = T((x,y)) + T((x',y'))\end{aligned}$$

והיא שומרת כפל בסקלר:

$$\begin{aligned}T(\alpha(x,y)) &= T((\alpha x, \alpha y)) = \\ &= (2\alpha x + 3\alpha y, \alpha x - \alpha y, -\alpha x) = \alpha(2x+3y, x-y, -x) = \alpha T((x,y)).\end{aligned}$$

(ב) העתקת הזהות $1_V\colon V\to V$ של מרחב וקטורי V היא לינארית.

$$1_V(v+v')=v+v'=1_V(v)+1_V(v') \qquad 1_V(\alpha v)=\alpha v=\alpha 1_V(v)$$

(ג) אם V,W מרחבים וקטוריים כלשהם מעל שדה F, **העתקת האפס** $S\colon V\to W$ המוגדרת על ידי $S(v)=0$ לכל $v\in V$, היא לינארית.

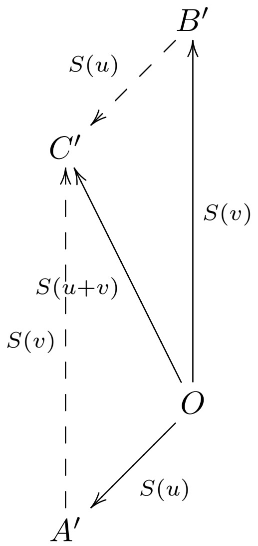
$$S(v+v')=0=0+0=S(v)+S(v') \qquad S(\alpha v)=0=\alpha 0=\alpha S(v)$$

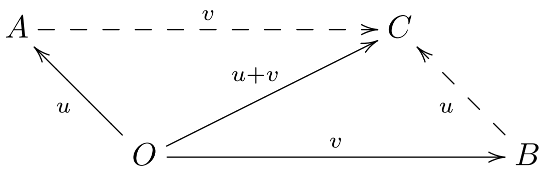
(ד) הנגזרת $D\colon F[X] \to F[X]$ היא העתקה לינארית. היא מוגדרת על ידי $D\Big(\sum_{i=0}^n a_i X^i\Big) = \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1}$.

$$D\Big(\sum_{i=0}^n a_i X^i + \sum_{i=0}^n b_i X^i\Big) = D\Big(\sum_{i=0}^n (a_i + b_i) X^i\Big) = \sum_{i=1}^n i(a_i + b_i) X^{i-1} =$$
$$= \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1} + \sum_{i=1}^n i b_i X^{i-1} = D\Big(\sum_{i=0}^n a_i X^i\Big) + D\Big(\sum_{i=0}^n b_i X^i\Big)$$

$$D\Big(\alpha \sum_{i=0}^n a_i X^i\Big) = D\Big(\sum_{i=0}^n \alpha a_i X^i\Big) = \sum_{i=1}^n i \alpha a_i X^{i-1} = \alpha \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1} = \alpha D\Big(\sum_{i=0}^n a_i X^i\Big)$$

(ה) הסיבוב $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ במישור סביב הראשית 0 בזווית נתונה θ היא העתקה לינארית.





(ו) יהי W מרחב וקטורי מעל F ויהיו $w_1,\dots,w_n \in W$. נגדיר $T\colon F^n \to W$ על ידי $T\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}\right) = c_1w_1 + \cdots + c_nw_n$. אז T לינארית. אכן, היא שומרת חיבור:

$$T\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} c_1 + c'_1 \\ \vdots \\ c_n + c'_n \end{pmatrix}\right) =$$
$$(c_1 + c'_1)w_1 + \cdots + (c_n + c'_n)w_n = c_1w_1 + c'_1w_1 + \cdots + c_nw_n + c'_nw_n =$$
$$= c_1w_1 + \cdots + c_nw_n + c'_1w_1 + \cdots + c'_nw_n = T\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix}\right).$$

באופן דומה מראים שהיא שומרת כפל בסקלר.

(ז) יהי F שדה ותהי $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ מטריצה. נגדיר העתקה $T_A\colon F^n \to F^m$ על ידי $T_A(v) = Av$ לכל $v \in F^n$. אז T_A לינארית.

אכן, לפי תכונות הכפל של מטריצות $A(v+v') = Av + Av'$ ו־$A(av) = a(Av)$ לכל $v, v' \in F^n$ ולכל $a \in F$. ∎

למה 6.5: *תהי* $T\colon V\to W$ *העתקה לינארית של מרחבים וקטוריים מעל שדה* F*. אז*

(א) $T(0)=0$.

(ב) $T(-v)=-T(v)$ *לכל* $v\in V$.

(ג) $T(a_1v_1+\cdots+a_nv_n)=a_1T(v_1)+\cdots+a_nT(v_n)$ *לכל* $v_1,\dots v_n\in V$ *ולכל* $a_1,\dots a_n\in F$.

הוכחה: **(א)** $0+T(0)=T(0)=T(0+0)=T(0)+T(0)$, ולפי כלל הצמצום $T(0)=0$.

(ב) $T(-v)+T(v)=T(-v+v)=T(0)=0$, לכן $T(-v)=-T(v)$.

(ג) באינדוקציה על n. ∎

עבור $n=1$ זוהי התכונה $T(a_1v_1)=a_1T(v_1)$ של השמירה על הכפל.

עבור $n=2$:

$$T(a_1v_1+a_2v_2)=T(a_1v_1)+T(a_2v_2)=a_1T(v_1)+a_2T(v_2)$$

עבור n כלשהו:

$$T\Big(\sum_{i=1}^{n}a_iv_i\Big)=T\Big(\sum_{i=1}^{n-1}a_iv_i+a_nv_n\Big)=T\Big(\sum_{i=1}^{n-1}a_iv_i\Big)+T(a_nv_n)=$$
$$\sum_{i=1}^{n-1}a_iT(v_i)+a_nT(v_n)=\sum_{i=1}^{n}a_iT(v_i)$$

הגדרה 6.6: העתקה לינארית חח"ע ועל נקראת **איזומורפיזם**. שני מרחבים וקטוריים הם **איזומורפיים** אם יש איזומורפיזם ביניהם. ∎

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ויהי $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיסו. אז לכל $v \in V$ יש $a_1, \ldots, a_n \in F$ יחידים כך ש־$v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ (משפט 4.37). ה־n־יה $[v]_\mathcal{B} := (a_1, \ldots, a_n)^t \in F^n$ נקראת **וקטור הקואורדינטות של v לפי $\mathcal{B}$**.

דוגמאות : (א) יהי $\mathcal{B} = \left(w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ בסיס של $\mathbb{R}^2$. אז $\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, כי

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2w_1 + 4w_2.$$

(ב) יהי F שדה כלשהו ויהי $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ הבסיס הסטרנדרטי של F^n. יהי $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. אז $[v]_\mathcal{B} = v$, כי $v = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$.

משפט 6.7: *יהי* $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ *בסיס סדור של* V. *אז* $[v]_\mathcal{B} \mapsto v$ *הוא איזומורפיזם* $V \to F^n$.

הוכחה: יהיו $v, v' \in V$ ויהי $a \in F$. אז שי $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_n \in F$ כך ש־

$$v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n, \qquad v' = a'_1v_1 + \cdots + a'_nv_n.$$

אז

$$v + v' = (a_1 + a'_1)v_1 + \cdots + a(a_n +'_n)v_n, \qquad av = aa_1v_1 + \cdots + aa_nv_n.$$

לכן $[v]_\mathcal{B} = (a_1, \dots, a_n)^t$, $[v']_\mathcal{B} = (a'_1, \dots, a'_n)^t$,

$$[v + v']_\mathcal{B} = ((a_1 + a'_1), \dots, (a_n + a'_n))^t = (a_1, \dots, a_n)^t + (a'_1, \dots, a'_n)^t = [v]_\mathcal{B} + [v']_\mathcal{B},$$

$$[av]_\mathcal{B} = (aa_1, \dots, aa_n)^t = a(a_1, \dots, a_n)^t = a[v]_\mathcal{B}.$$

לכן T לינארית.

נראה ש־T חד חד ערכית. נניח כי v, v' לעיל מקיימים $[v]_\mathcal{B} = [v']_\mathcal{B}$. אז $a_i = a'_i$ לכל i. לכן $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = v'$.

נראה ש־T על. יהי $(a_1, \dots, a_n)^t \in F^n$. נגדיר $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$. אז $[v]_\mathcal{B} = (a_1, \dots, a_n)^t$.

∎

מסקנה 6.8: *כל מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה F איזומורפי ל־ F^n, עבור איזה n.*

תרגיל 6.9: *אם T איזומורפיזם אז גם T^{-1} איזומורפיזם.*

הוכחה: נניח כי $T\colon V \to W$, באשר V, W מרחבים וקטוריים מעל F. כבר ציינו ש־T^{-1} חד חד ערכית ועל. נראה שהיא לינארית. יהיו $w, w' \in W$ ו־$a \in F$.

נסמן $v = T^{-1}(w)$, $v' = T^{-1}(w')$. אז, לפי הגדרת T^{-1}, מתקיים $T(v) = w$, $T(v') = w'$. בגלל ש־T לינארית, $T(v+v') = w+w'$, $T(av) = aw$, לכן, לפי הגדרת T^{-1}, מתקיים $T^{-1}(w+w') = v+v'$, $T^{-1}(aw) = av$, דהיינו, $T^{-1}(w + w') = T^{-1}(w) + T^{-1}(w')$, $T^{-1}(aw) = aT^{-1}(w)$. ∎

הערה 6.10: איזומורפיזם הוא מעין זיהוי בין מרחבים וקטוריים. כל דבר (שקשור לאלגברה לינארית) שנכון לאחד המרחבים, נכון גם לגבי השני. חלקים (ד), (ה) של המשפט הבא מדגימים זאת. ∎

משפט 6.11: *תהי* $T\colon V\to W$ *העתקה לינארית. יהיו* $v_1,\dots,v_m\in V$*. אז*

(א) $T(\mathrm{Sp}(v_1,\dots,v_m))=\mathrm{Sp}(T(v_1),\dots,T(v_m))$.

(ב) *אם* $v_1,\dots,v_m$ *סדרת יוצרים של* V *אז* $T(v_1),\dots,T(v_m)$ *סדרת יוצרים של* $T(V)$.

(ג) *אם* $T(v_1),\dots,T(v_m)$ *בלתי תלויה לינארית, אז גם* $v_1,\dots v_m$ *בלתי תלויה לנארית.*

(ד) *אם* T *איזומורפיזם, אז* $v_1,\dots v_m$ *בסיס של* V *אם ורק אם* $T(v_1),\dots,T(v_m)$ *בסיס של* W.

(ה) *אם* T *איזומורפיזם, אז* V *נוצר סופית אם ורק אם* W *נוצר סופית, ואז* $\dim V=\dim W$.

הוכחה: יהי F השדה מעליו V,W מרחבים וקטוריים.

(א) $T(\mathrm{Sp}(v_1,\ldots,v_m)) = \mathrm{Sp}(T(v_1),\ldots,T(v_m))$.

(א) אגף שמאל הוא אוסף כל הוקטורים מהצורה $T(a_1v_1+\cdots+a_mv_m)$, באשר $a_1,\ldots,a_m \in F$. אגף ימין הוא אוסף כל הוקטורים מהצורה $a_1T(v_1)+\cdots+a_mT(v_m)$, באשר $a_1,\ldots,a_m \in F$. לפי למה 6.5(ג), שני האגפים שווים.

(ב) אם $v_1,\ldots,v_m$ סדרת יוצרים של V אז $T(v_1),\ldots,T(v_m)$ סדרת יוצרים של $T(V)$.

(ב) לפי הנתון, $\mathrm{Sp}(v_1,\ldots,v_m) = V$. לפי (א), $T(V) = \mathrm{Sp}(T(v_1),\ldots,T(v_m))$, כלומר, $T(v_1),\ldots,T(v_m)$ סדרת יוצרים של $T(V)$.

(ג) אם $T(v_1),\ldots,T(v_m)$ בלתי תלויה לינארית, אז גם $v_1,\ldots,v_m$ בלתי תלויה לנארית.

(ג) נניח, בשלילה, ש־$v_1,\ldots,v_m$ תלויה לינארית. אז יש $a_1,\ldots,a_m \in F$, לא כולם אפס, כך ש־$a_1v_1+\cdots a_mv_m = 0$ אז $T(a_1v_1+\cdots a_mv_m) = T(0)$ לפי למה 6.5, $a_1T(v_1)+\cdots a_mT(v_m) = 0$. כיוון ש־$a_1,\ldots,a_m \in F$, לא כולם אפס, אם $T(v_1),\ldots,T(v_m)$ תלויה לינארית, סתירה.

(ד) אם T איזומורפיזם, אז $v_1,\ldots,v_m$ בסיס של V אם ורק אם $T(v_1),\ldots,T(v_m)$ בסיס של W.

(ד) נניח כי $v_1,\ldots,v_m$ בסיס של V. אז היא סדרת יוצרים של V ובלתי תלויה לינארית. לפי (ב), $T(v_1),\ldots,T(v_m)$ סדרת יוצרים של W. כיוון ש־$v_1 = T^{-1}(T(v_1)),\cdots,v_m = T^{-1}(T(v_m))$, לפי (ג) עבור T^{-1}, הסדרה $T(v_1),\ldots,T(v_m)$ היא בלתי תלויה לינארית. לכן היא בסיס.

הטענה הפוכה נובעת מכאן על ידי החלפת התפקידים בין T ו־T^{-1}.

(ה) אם T איזומורפיזם, אז V נוצר סופית אם ורק אם W נוצר סופית, ואז $\dim V = \dim W$.

(ה) נניח ש־V נוצר סופית. יהי $v_1,\ldots,v_m$ בסיסו. לפי (ד) $T(v_1),\ldots,T(v_m)$ בסיס של W. לכן W נוצר ופית ו־$\dim V = \dim W = m$. הטענה הפוכה נובעת מכאן על ידי החלפת התפקידים בין T ו־T^{-1}.

∎

הגדרה 6.12: יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל שדה F ותהי $T\colon V \to W$ העתקה לינארית.

(א) **הגרעין** $\operatorname{Ker} T$ של T היא הקבוצה $\operatorname{Ker} T = \{v \in V |\ T(v) = 0\}$

(ב) **התמונה** $\operatorname{Im} T$ של T היא הקבוצה

$$\operatorname{Im} T = \{w \in W |\ T(v) = w \text{ כך ש־} v \in V \text{ קיים}\} = \{T(v) |\ v \in V\} = T(V).$$

למה 6.13: *תהי* $T\colon V\to W$ *העתקה לינארית.*

(א) $\operatorname{Ker} T$ *הוא תת מרחב של* V. *ממדו נקרא* **האפסות של** T.

(ב) *יהי* U *תת מרחב של* V. *אז* $T(U)$ *תת מרחב של* W. *בפרט* $\operatorname{Im} T$ *תת מרחב של* W. *ממדו נקרא* **הדרגה של** T.

הוכחה: בדיקה ישירה, לפי ההגדרות. ∎

(א) $0\in\operatorname{Ker} T$, כי $T(0)=0$.

אם $v,v'\in\operatorname{Ker} T$ אז $T(v+v')=T(v)+T(v')=0+0=0$, לכן $v+v'\in\operatorname{Ker} T$.

אם $v\in\operatorname{Ker} T$ ו־$a\in F$ אז $T(av)=aT(v)=a0=0$, לכן $av\in\operatorname{Ker} T$.

(ב) יהיו $w,w'\in T(U)$ ויהי $a\in F$. אז יש $u,u'\in U$ כך ש־$T(u)=w,\,T(u')=w'$. בגלל ש־U תת מרחב, $0,u+u',au\in U$. מכאן

$0=T(0)\in T(U)$,

$w+w'=T(u)+T(u')=T(u+u')\in T(U)$,

לכן $aw=aT(u)=t(au)\in T(U)$.

משפט 6.14: *תהי* $T\colon V \to W$ *העתקה לינארית. אז* T *חח"ע אם ורק אם* $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.

הוכחה: נניח כי T חח"ע. יהי $v \in \operatorname{Ker} T$. אז $T(v) = 0 = T(0)$ ולכן $v = 0$. מכאן $\operatorname{Ker} T \subseteq \{0\}$. ההכלה ההפוכה נכונה לכל העתקה לינארית (גם אם אינה חח"ע), לכן $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.

להיפך, נניח כי $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. יהיו $v, v' \in V$ כך ש-$T(v) = T(v')$. אז

$$T(v - v') = T(v) - T(v') = 0,$$

ולכן $v - v' \in \operatorname{Ker} T = \{0\}$, כלומר $v - v' = 0$. מכאן $v = v'$. לכן T חח"ע. ∎

דוגמאות 6.15: אם $T\colon V \to W$ העתקת האפס, אז $\operatorname{Ker} T = V$ ואילו $\operatorname{Im} T = 0$, לכן $\dim \operatorname{Ker} T = \dim V$ ואילו $\dim \operatorname{Im} T = 0$.

אם $T\colon V \to V$ העתקת הזהות, אז $\operatorname{Ker} T = 0$ ואילו $\operatorname{Im} T = V$ לכן $\dim \operatorname{Ker} T = 0$ ואילו $\dim \operatorname{Im} T = \dim V$.

אם $V = \mathbb{R}_n[X]$ מרחב הפולינומים ממעלה $\leq n$ מעל $\mathbb{R}$ (תזכורת: $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$) ו־ $T\colon V \to V$ הנגזרת, אז $\operatorname{Ker} T = \mathbb{R} = \mathbb{R}_0[X]$ ואילו $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. ולכן $\dim \operatorname{Ker} T = 1$ ואילו $\dim \operatorname{Im} T = n$.

בדוגמאות אלה $\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$. דבר זה נכון באופן כללי:

$D\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) = \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1}$.

$D\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{b_i}{i+1} X^{i+1}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i$.

משפט 6.16 (משפט המימד): *יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל שדה F ותהי $T\colon V \to W$ העתקה לינארית. נניח כי V נוצר סופית (כלומר, יש לו בסיס). אז $\operatorname{Ker} T, \operatorname{Im} T$ נוצרים סופית ומתקיים $\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$.*

הוכחה: *הוכחה:* $\operatorname{Ker} T$ הוא תת מרחב של V, לכן גם הוא נוצר סופית. יהי $v_1, \ldots, v_m$ בסיסו. זוהי בפרט סדרה בלתי תלויה לינארית ב־V, ולכן ניתן להשלים אותה לבסיס של V, נאמר

$$v_1, \ldots, v_m, v_{m+1} \ldots, v_n.$$

היות ו־$\dim V = n,\ \dim \operatorname{Ker} T = m$, עלינו להוכיח: $\dim \operatorname{Im} T = n - m$. לשם כך די אם נוכיח:

טענה: $T(v_{m+1}), \ldots, T(v_n)$ הוא בסיס של $\operatorname{Im} T$.

טענה: $T(v_{m+1}),\dots,T(v_n)$ הוא בסיס של $\operatorname{Im} T$.

נראה תחלה שזאת סדרת יוצרים: יהי $w \in \operatorname{Im} T$. אז יש $v \in V$ כך ש־$w = T(v)$. כיוון ש־$v_1,\dots,v_n$ סדרת יוצרים של V, קיימים $a_1,\dots,a_n \in F$ כך ש־$v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$. נפעיל T על שני האגפים ונשתמש בלמה 6.5. אז

$$w = T(v) = a_1T(v_1) + \cdots + a_mT(v_m) + a_{m+1}T(v_{m+1}) + \cdots + a_nT(v_n).$$

אך $T(v_1) = \cdots T(v_m) = 0$, כי $v_1,\dots,v_m$ בגרעין של T. לכן

$$w = a_{m+1}T(v_{m+1}) + \cdots + a_nT(v_n).$$

נראה שהסדרה בלתי תלויה לינארית: יהיו $a_{m+1},\dots,a_n \in F$ כך שמתקיים

$$a_{m+1}T(v_{m+1}) + \cdots + a_nT(v_n) = 0.$$

בגלל הלינאריות, אגף שמאל שווה ל־ $T(a_{m+1}v_{m+1}+\cdots+a_nv_n)$. לכן $a_{m+1}v_{m+1}+\cdots+a_nv_n \in \operatorname{Ker} T$. מכאן שקיימים $a_1,\dots,a_m \in F$ כך ש־

$$a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = a_{m+1}v_{m+1} + \cdots + a_nv_n,$$

כלומר

$$(-a_1)v_1 + \cdots + (-a_m)v_m + a_{m+1}v_{m+1} + \cdots + a_nv_n = 0.$$

אך $v_1,\dots,v_n$ בלתי תלויה לינארית, לכן $a_{m+1} = \cdots = a_n = 0$. ∎

מסקנה 6.17: *יהיו V, W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית בעלי אותו מימד מעל שדה F ותהי $T\colon V \to W$ העתקה לינארית. אז T חח"ע אם ורק אם T על.*

הוכחה: ההעתקה T חח"ע אם ורק אם $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. היות ותמיד $\{0\} \subseteq \operatorname{Ker} T$ תת מרחבים, זה שקול לשוויון הממדים $0 = \dim\{0\} = \dim \operatorname{Ker} T$.

ההעתקה T על אם ורק אם $\operatorname{Im} T = W$. היות ותמיד $\operatorname{Im} T \subseteq W$ תת מרחבים, זה שקול לשוויון הממדים $\dim \operatorname{Im} T = \dim W = \dim V$.

לכן צריך להוכיח: $\dim \operatorname{Ker} T = 0$ אם ורק אם $\dim \operatorname{Im} T = \dim V$. וזה אכן נובע מהנוסחה $\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$ של משפט 6.16. ∎

הגדרה 6.18: **יהיו V,W שני מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F, יהי $\mathcal{A}=(v_1,\dots,v_n)$ בסיס של V, ויהי $\mathcal{B}=(w_1,\dots,w_m)$ בסיס של W. לכל העתקה לינארית $T\colon V\to W$ נגדיר מטריצה $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}\in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ על ידי**

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}=\big([T(v_1)]_{\mathcal{B}},\dots,[T(v_n)]_{\mathcal{B}}\big).$$

במלים אחרות: אם $A=(a_{ij})\in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ אז $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}=A$ אם ורק אם

$$T(v_j)=a_{1j}w_1+\cdots+a_{mj}w_m,\qquad j=1,\dots,n.$$

דוגמאות 6.19: (א) נגדיר $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ על ידי $T(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x-y \\ x+3z \end{pmatrix}$. אז T לינארית. (בדוק!) יהיו $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ בסיס של $\mathbb{R}^3$, ו־$\mathcal{B} = (w_1, w_2)$ בסיס של $\mathbb{R}^2$, באשר

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad , w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

אז

$$T(v_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, T(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, T(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

בדיקה קלה מראה כי

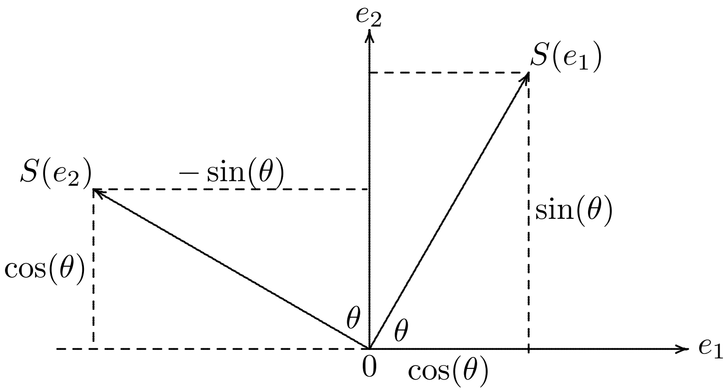
$$T(v_1) = -w_1, \quad T(v_2) = -2w_1 + 4w_2, \quad T(v_3) = -w_1 + w_2,$$

לכן

$$[T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ב) יהי $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ הסיבוב במישור סביב הראשית 0 בזוית נתונה θ, ויהי $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$. נזכור שלכל $v \in \mathbb{R}^2$ מתקיים: $[v]_{\mathcal{B}} = v$. (זה לא יהיה נכון בבסיס אחר!) לכן

$$[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \big([S(e_1)]_{\mathcal{B}}, [S(e_2)]_{\mathcal{B}}\big) = \big(S(e_1), S(e_2)\big) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$



(ג) תהי $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ ותהי $T_A \colon F^n \to F^m$ ההעתקה $v \mapsto Av$. יהיו $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ הבסיסים הסטנדרטיים של F^n, F^m, בהתאמה. אז, היות ו־Ae_j היא העמודה ה־j של A,

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \big([Ae_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [Ae_n]_{\mathcal{B}}\big) = \big(Ae_1, \dots, Ae_n\big) = A.$$

(ד) תהי $0 \colon V \to W$ העתקת האפס ויהיו $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ בסיסים כלשהם. אז $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = 0 = (0)$.

(ה) יהי V מרחב וקטורי ממימד n, תהי $1_V \colon V \to V$ העתקת הזהות ויהי $\mathcal{B}$ בסיס כלשהו של V. אז $[1_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_n$.

אכן, אם $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ אז $[1_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = ([v_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [v_n]_{\mathcal{B}})$. ומתקיים

$$v_j = 0v_1 + \cdots + 0v_{j-1} + 1v_j + 0 + v_{j+1} + \cdots + 0v_n$$

לכן $[v_j]_{\mathcal{B}} = e_j$. מכאן $[1_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = (e_1, \dots, e_n) = I_n$.

משפט 6.20: *בתנאים ובסימונים של ההגדרה 6.18, לכל $v \in V$ מתקיים*

$$[T(v)]_{\mathcal{B}} = [T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{A}}.$$

הוכחה: נניח

$$[v]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in F^n, \qquad [T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m\times n}(F).$$

אז $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$ ולכן $T(v) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \cdots + c_nT(v_n)$, ואילו

$$[T(v_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, [T(v_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \dots, [T(v_n)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m. \\ T(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ &\dots \\ T(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

נכפיל משוואות אלה ב־$c_1, c_2, \dots, c_n$ בהתאמה ונחבר אותן:

$$\begin{aligned} T(v) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \cdots + c_nT(v_n) &= \\ &= (a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n)w_1 \\ &+ (a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n)w_2 \\ &\dots\dots\dots \\ &+ (a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n)w_m. \end{aligned}$$

מכאן שהעמודה $[T(v)]_{\mathcal{B}}$ היא

$$[T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

דוגמה 6.21: יהי $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ הסיבוב במישור סביב הראשית 0 בזוית θ, ויהי $\mathcal{B}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$. נזכור שלכל $v \in \mathbb{R}^2$ מתקיים: $[v]_{\mathcal{B}} = v$. אז

$$S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left[S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

תרגיל 6.22: *תהי* $T\colon V \to W$ *העתקה לינארית, ויהיו* $\mathcal{A}$ *בסיס של* V *ו־*$\mathcal{B}$ *בסיס של* W.

(א) $\operatorname{rk}[T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = \dim \operatorname{Im} T$.

(ב) T *איזומורפיזם אם ורק אם* $[T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ *הפיכה.*

הוכחה: **יהי** $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$, **ו־**$\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$. **אז** $[T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$. **נזכור שההעתקה** $\varphi\colon W \to F^m$ **הנתונה על ידי** $w \mapsto [w]_{\mathcal{B}}$ **היא איזומורפיזם. מתקיים**

$$C([T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}) = \mathrm{Sp}([T(v_1)]_{\mathcal{B}}, \ldots, [T(v_n)]_{\mathcal{B}}) = \mathrm{Sp}(\varphi(T(v_1), \ldots, \varphi(T(v_n))) =$$
$$\varphi(\mathrm{Sp}(T(v_1), \ldots, T(v_n))) = \varphi(T(\mathrm{Sp}((v_1), \ldots, v_n))) = \varphi(T(V)) = \varphi(\operatorname{Im} T)$$

כלומר, φ **מעתיקה את** $\operatorname{Im} T$ **על מרחב העמודות של** $[T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$. **הצמצום של** φ **ל־**$\operatorname{Im} T$ **הוא, אם כן, איזומורפיזם** $\operatorname{Im} T \to C([T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}})$. **לכן לפי משפט 6.11(ה),** $\operatorname{rk}[T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = \dim C([T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}) = \dim \operatorname{Im} T$. **מכאן (א).**

(ב) תהי $C = [T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$. **אם** T **איזומורפיזם, אז** $m = \dim W = \dim V = n$, **ולכן** $C \in \mathrm{M}_n(F)$, **ומתקיים** $\operatorname{rk} C = \dim \operatorname{Im} T = \dim W = n$ **לכן** C **הפיכה. אם** C **הפיכה, אז** $C \in \mathrm{M}_n(F)$, **ו־**$\dim \operatorname{Im} T = \operatorname{rk} C = n = \dim W$, **ולכן** T **על. כיוון ש־**$\dim V = \dim W$, **היא גם חח"ע.** ∎

משפט 6.23: *יהיו V, W שני מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F. יהי $v_1, \ldots, v_n$ בסיס של V, ותהי $w_1, \ldots, w_n$ סדרה של איברי W. אז קיימת העתקה לינארית יחידה $T\colon V \to W$ המקיימת*

$$T(v_1) = w_1, \ldots, T(v_n) = w_n. \tag{1}$$

הוכחה: נניח לרגע ש־T כזו אכן קיימת. יהי $v \in V$ כלשהו. אז, כיוון ש־$v_1, \ldots, v_n$ בסיס של V, קיימים $a_1, \ldots, a_n \in F$ יחידים כך ש־

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n. \tag{2}$$

כיוון ש־T לינארית, $T(v) = a_1 T(v_1) + \cdots + a_n T(v_n)$. וכיוון שהיא מקיימת (1),

$$T(v) = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n. \tag{3}$$

אגף ימין במשוואה זו אינו תלוי כלל ב־T! (הוא אמנם תלוי בבסיס הנתון וב־v, אך לא ב־T.) מכאן היחידות של T.

(ביתר פירוט, אם גם T' העתקה לינארית שמקיימת (1), אז עבור $v \in V$ שמקיים (2), $T'(v)$ חייב להיות אגף ימין של (3) ולכן $T(v) = T'(v)$. זה נכון לכל $v \in V$, לכן $T = T'$.)

קיום: נגדיר T על ידי (3), לכל $v \in V$, באשר $a_1, \dots, a_n$ באים מההצגה (2) של v.
אז T מקיימת (1): אכן, יהי $1 \leq j \leq n$, אז

$$v_j = 0v_1 + \cdots + 0v_{j-1} + 1v_j + 0v_{j+1} + \cdots + 0v_n.$$

לכן לפי ההגדרה (3) של T,

$$T(v_j) = 0w_1 + \cdots + 0w_{j-1} + 1w_j + 0w_{j+1} + \cdots + 0w_n = w_j..$$

כמו כן T לינארית. אכן, נראה כאן רק שהיא שומרת כפל בסקלר (שמירת החיבור מראים באופן דומה). יהי $v \in V$ ויהי $\alpha \in F$. יהיו $a_1, \dots, a_n \in F$ כך שמתקיים (2). אז

$$\alpha v = (\alpha a_1)v_1 + \cdots + (\alpha a_n)v_n.$$

לכן לפי ההגדרה (3) של T,

$$T(\alpha v) = (\alpha a_1)w_1 + \cdots + (\alpha a_n)w_n = \alpha(a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n) = \alpha T(v). \blacksquare$$

הגדרה 6.24: יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל שדה F. תהיינה $T, S\colon V \to W$ העתקות לינאריות ויהי $\alpha \in F$. נגדיר העתקות $T + S,\ \alpha T\colon V \to W$ על ידי $(T+S)(v) = T(v) + S(v)$, לכל $v \in V$, ו־$(\alpha T)(v) = \alpha T(v)$, לכל $v \in V$.

טענה: $T + S,\ \alpha T$ הן העתקות לינאריות.

הוכחה: נוכיח, לגבי שתי ההעתקות, כי הן שומרות כפל בסקלר (באופן דומה מוכיחים גם שהן שומרות חיבור): יהיו $v \in V$ ו־$\beta \in F$. (שים לב שהאות α תפוסה כבר!) אז

$$(T+S)(\beta v) =^1 T(\beta v) + S(\beta v) =^2 \beta T(v) + \beta S(v) =^3$$
$$=^3 \beta(T(v) + S(v)) =^1 \beta\big((T+S)(v)\big),$$

כאשר השוויונות מוסברים כך:

(1) לפי הגדרת $T + S$.

(2) S, T שומרות כפל בסקלר.

(3) אחד מחוקי הפילוג במרחבים וקטוריים.

כמו כן

$$\begin{aligned}(\alpha T)(\beta v) &=^1 \alpha\big(T(\beta v)\big) =^2 \alpha(\beta T(v)) =^3 (\alpha\beta)\big(T(v)\big) =^4 (\beta\alpha)\big(T(v)\big) =^3 \\ &=^3 \beta\big(\alpha T(v)\big) =^1 \beta\big((\alpha T)(v)\big),\end{aligned}$$

כאשר השוויונות מוסברים כך:

(1) לפי הגדרת αT.

(2) T שומרת כפל בסקלר.

(3) חוק האסוציאטיביות של הכפל בסקלר ב־V.

(4) חוק החילוף של הכפל ב־F. $\blacksquare$

הגדרה 6.25: יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל שדה F. נסמן ב־$L(V,W)$ את קבוצה כל ההעתקות הלינאריות מ־V ל־W.

משפט 6.26: *$L(V,W)$ הוא מרחב וקטורי, ביחס לפעולות חיבור והכפל בסקלר שהגדרנו לעיל.*

הוכחה: צריך להוכיח את כל האקסיומות של מרחב וקטורי. נראה כאן רק אקסיומה אחת. למשל אסוציאטיביות של החיבור: צריך להוכיח כי לכל $S,T,R \in L(V,W)$ מתקיים

$$(S+T)+R = S+(T+R).$$

ואכן, יהי $v \in V$. אז

$$((S+T)+R)(v) = (S+T)(v) + R(v) = (S(v)+T(v)) + R(v)$$
$$(S+(T+R))(v) = S(v) + (T+R)(v) = S(v) + (T(v)+R(v))$$

ושני הביטויים שווים בגלל האסוציאטיביות של החיבור ב־W. ∎

איבר האפס ב־$L(v,W)$: העתקת האפס $0\colon V \to W$.

משפט 6.27: *יהיו V, W שני מרחבים וקטוריים מעל שדה F. נניח $\dim V = n,\ \dim W = m$, ויהיו $\mathcal{A}$ בסיס של V ו־$\mathcal{B}$ בסיס של W. ההעתקה $\psi\colon L(V,W) \to \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ הנתונה על ידי $T \mapsto [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ הינה איזומורפיזם.*

הוכחה: יהי $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$.

(א) ψ לינארית: תהיינה $T, T' \in L(V,W)$ ויהי $\alpha \in F$. אז

$$
\begin{aligned}
[T+T']_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} &= \big([(T+T')(v_1)]_{\mathcal{B}}, \ldots, [(T+T')(v_n)]_{\mathcal{B}}\big) = \\
&= \big([T(v_1)+T'(v_1)]_{\mathcal{B}}, \ldots, [T(v_n)+T'(v_n)]_{\mathcal{B}}\big) = \\
&= \big([T(v_1)]_{\mathcal{B}}+[T'(v_1)]_{\mathcal{B}}, \ldots, [T(v_n)]_{\mathcal{B}}+[T'(v_n)]_{\mathcal{B}}\big) = \\
&= \big([T(v_1)]_{\mathcal{B}}, \ldots, [T(v_n)]_{\mathcal{B}}\big) + \big([T'(v_1)]_{\mathcal{B}}, \ldots, T'(v_n)]_{\mathcal{B}}\big) = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} + [T']_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}
\end{aligned}
$$

לכן ψ שומרת חיבור. השתמשנו במשפט 6.9, לפיו ההעתקה $w \mapsto [w]_{\mathcal{B}}$ שומרת חיבור.

באופן דומה מוכיחים ש־ψ שומרת כפל בסקלר, כלומר, $[\alpha T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \alpha [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.

(ב) ψ על: תהי $C \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$. לפי משפט 6.9, ההעתקה $[w]_\mathcal{B} \mapsto w$ היא על F^m. לכן יש $w_1,\ldots,w_n \in W$ כך ש־$[w_1]_\mathcal{B},\ldots,[w_n]_\mathcal{B}$ הן העמודות של C. לפי משפט 6.23 יש $T \in L(V,W)$ כך ש־$T(v_1) = w_1,\ldots,T(v_n) = w_n$. מכאן

$$\psi(T) = [T]_\mathcal{B}^\mathcal{A} = \big([T(v_1)]_\mathcal{B},\ldots,[T(v_n)]_\mathcal{B}\big) = \big([w_1]_\mathcal{B},\ldots,[w_n]_\mathcal{B}\big) = C.$$

(ג) ψ חח"ע: נניח $[T]_\mathcal{B}^\mathcal{A} = [T']_\mathcal{B}^\mathcal{A}$. צריך להוכיח שלכל $v \in V$ מתקיים $T(v) = T'(v)$.
ואכן, $[T(v)]_\mathcal{B} = [T]_\mathcal{B}^\mathcal{A}[v]_\mathcal{A} = [T']_\mathcal{B}^\mathcal{A}[v]_\mathcal{A} = [T'(v)]_\mathcal{B}$ לפי משפט 6.9 ההעתקה $[w]_\mathcal{B} \mapsto w$ היא חח"ע, לכן $T(v) = T'(v)$. ∎

מסקנה 6.28: $\dim L(V,W) = (\dim V) \times (\dim W)$

הוכחה: נניח $\dim V = n,\ \dim W = m$. לפי משפט 6.11(ה),

$\dim L(V,W) = \dim \mathrm{M}_{m\times n}(F) = m \times n$. ∎

למה 6.29: *תהיינה* $U \xrightarrow{S} V \xrightarrow{T} W$ *העתקות לינאריות של מרחבים וקטוריים מעל שדה* F*. אז ההעתקת ההרכבה* $T \circ S\colon U \to W$ *הינה לינארית.*

הוכחה: נראה רק ש-$T \circ S$ שומרת כפל בסקלר (שמירת החיבור - באופן דומה).

יהי $u \in U$ ויהי $\alpha \in F$. אז

$$(T \circ S)(\alpha u) =^1 T\big(S(\alpha u)\big) =^2 T\big(\alpha S(u)\big) =^3 \alpha T\big(S(u)\big) =^1 \alpha (T \circ S)(u)$$

כאשר (1) נובע מההגדרה של $T \circ S$; (2) נובע מהלינאריות של S; (3) נובע מהלינאריות של T. ∎

$$\begin{aligned}(T \circ S)(u + u') =& ^1 T\big(S(u+u')\big) =^2 T\big(S(u) + S(u')\big) =^3 T\big(S(u)\big) + T\big(S(u')\big) =^1 \\ =& (T \circ S)(u) + (T \circ S)(u')\end{aligned}$$

כאשר (1) נובע מההגדרה של $T \circ S$; (2) נובע מהלינאריות של S; (3) נובע מהלינאריות של T. ∎

משפט 6.30: *תהיינה* $U \xrightarrow{S} V \xrightarrow{T} W$ *העתקות לינאריות של מרחבים וקטוריים מעל שדה* F. *יהיו* $\mathcal{A}$ *בסיס של* U; $\mathcal{B}$ *בסיס של* V; $\mathcal{C}$ *בסיס של* W. *אז*

$$[T \circ S]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}} = [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} [S]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}.$$

$$\begin{array}{ccc} n & m & k \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} & \mathcal{C} \\ U & V & W \end{array}$$ אז $[S]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$, $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \in \mathrm{M}_{k\times m}(F)$, $[T \circ S]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}} \in \mathrm{M}_{k\times n}(F)$.

הוכחה: נניח כי $\mathcal{A} = (u_1, \ldots, u_n)$. נשים לב ש־$[u_j]_{\mathcal{A}} = e_j$, לכל $1 \le j \le n$, כי

$$u_j = 0u_1 + \cdots + 0u_{j-1} + 1u_j + 0u_{j+1} + \cdots + 0u_n.$$

כעת

$$\begin{aligned}
[T \circ S]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}} &=^1 \left([T(S(u_1))]_{\mathcal{C}}, \ldots, [T(S(u_n))]_{\mathcal{C}}\right) =^2 \left([T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}[S(u_1)]_{\mathcal{B}}, \ldots, [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}[S(u_n)]_{\mathcal{B}}\right) \\
&=^3 \left([T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}[S]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}[u_1]_{\mathcal{A}}, \ldots, [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}[S]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}[u_n]_{\mathcal{A}}\right) =^4 \left([T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}[S]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}e_1, \ldots, [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}[S]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}e_n\right) \\
&=^5 [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}[S]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

כאשר

(1) נובע מההגדרה של $T \circ S$ ומהגדרת המטריצה של העתקה לינארית לפי בסיסים $\mathcal{A}, \mathcal{C}$;

(2) נובע מהכלל $[T(v)]_{\mathcal{C}} = [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}[v]_{\mathcal{B}}$ לכל $v \in V$;

(3) נובע מהכלל $[S(u)]_{\mathcal{B}} = [S]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}[u]_{\mathcal{A}}$ לכל $u \in U$;

(4) נובע מההערה לפני המשוואה;

(5) נובע מכך שלכל מטריצה M, הוקטור Me_j הוא העמודה ה־j של M. ∎

הגדרה 6.31: יהי V מרחב וקטורי מעל F. יהי $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס שלו ותהי $\mathcal{B}' = (v'_1, \ldots, v'_n)$ סדרה של איברי V. **מטריצת המעבר** מ־$\mathcal{B}$ ל־$\mathcal{B}'$ היא המטריצה $P = (p_{ij}) \in \mathrm{M}_n(F)$ עבורה מתקיים

$$1 \le j \le n \qquad v'_j = p_{1j}v_1 + p_{2j}v_2 + \cdots + p_{nj}v_n. \qquad (*)$$

במלים אחרות

$$P = \big([v'_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [v'_n]_{\mathcal{B}}\big) \in \mathrm{M}_n(F).$$

דוגמה 6.32: מטריצת המעבר מ־$\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ ל־$\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ היא $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -2\end{pmatrix}$.

אכן,

$$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

תרגיל 6.33: *יהי V מרחב וקטורי מעל F. יהי $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס שלו ותהי $P = (p_{ij}) \in \mathrm{M}_n(F)$ מטריצה. אז קיימת סדרה $\mathcal{B}' = (v'_1, \ldots, v'_n)$ של איברי V כך ש־P היא מטריצת המעבר מ־$\mathcal{B}$ ל־$\mathcal{B}'$.*

פתרון: נגדיר את $v'_1, \ldots, v'_n$ על ידי $(*)$. ∎

משפט 6.34: *בסימונים של ההגדרה, P הפיכה אם ורק אם $\mathcal{B}'$ בסיס.*

הוכחה: P הפיכה $\Leftrightarrow$ $\dim(\mathrm{Sp}([v_1']_{\mathcal{B}}, \ldots, [v_n']_{\mathcal{B}})) = \dim(C(P)) = \operatorname{rk} P = n$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Sp}([v_1']_{\mathcal{B}}, \ldots, [v_n']_{\mathcal{B}}) = F^n$ $\Leftrightarrow$ $[v_1']_{\mathcal{B}}, \ldots, [v_n']_{\mathcal{B}}$ בסיס של F^n.

אך האיזומורפיזם $V \to F^n$ הנתון על ידי $v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$ וגם ההופכי שלו $F^n \to V$ מעתיקים בסיסים לבסיסים. לכן $[v_1']_{\mathcal{B}}, \ldots, [v_n']_{\mathcal{B}}$ בסיס של F^n $\Leftrightarrow$ $v_1', \ldots, v_n'$ בסיס של V. ∎

מעתה נניח כי $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ שניהם בסיסים ו־P מטריצת המעבר מ־$\mathcal{B}$ ל־$\mathcal{B}'$.

הערה 6.35: מטריצת המעבר מ־$\mathcal{B}$ ל־$\mathcal{B}'$ היא $[1_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, ומטריצת המעבר מ־$\mathcal{B}'$ ל־$\mathcal{B}$ היא ההפכי שלה $[1_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

אכן, השוויון הראשון נובע ממהגדרות, והשני מ־ $[1_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[1_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = [1_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_n$. ∎

$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$,

$\mathcal{B}' = (v_1', \ldots, v_n')$

$$[1_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \big([1_V(v_1')]_{\mathcal{B}}, \ldots, [1_V(v_n')]_{\mathcal{B}}\big) = \big([v_1']_{\mathcal{B}}, \ldots, [v_n']_{\mathcal{B}}\big) = P$$

מסקנה 6.36: *יהי* $v \in V$. *אז*

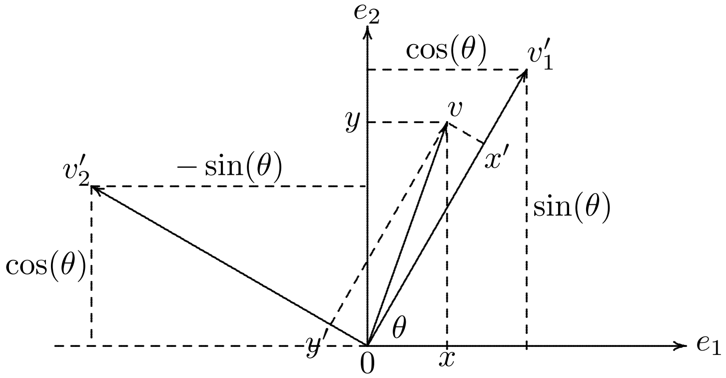
(א) $[v]_{\mathcal{B}} = P[v]_{\mathcal{B}'}$

(ב) $[v]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[v]_{\mathcal{B}}$

הוכחה: **(א) לפי משפט 6.20**, $[v]_{\mathcal{B}} = [1_V(v)]_{\mathcal{B}} = [1_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}'} = P[v]_{\mathcal{B}'}$. **(ב)** – **דומה.** ∎

דוגמה 6.37: יהי $V = \mathbb{R}^2$, ותהי P מטריצת המעבר מהבסיס הסטנדרטי $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ לבסיס $\mathcal{B}' = \left(v_1' = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, v_2' = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right)$ שמתקבל מ־$\mathcal{B}$ על ידי הסיבוב בזוית θ. אז מטריצת המעבר מ־$\mathcal{B}$ ל־$\mathcal{B}'$ היא $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. יהי v וקטור בעל קואורדינטות x', y' לפי $\mathcal{B}'$. אז

$$v = [v]_{\mathcal{B}} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{pmatrix}..$$



משפט 6.38 (נוסחת המעבר): *תהי $T\colon V \to W$ העתקה לינארית. יהיו:*

$\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ בסיסים סדורים של V, ותהי P מטריצת המעבר מ־$\mathcal{A}$ ל־$\mathcal{A}'$;

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ בסיסים סדורים של W. ותהי Q מטריצת המעבר מ־$\mathcal{B}$ ל־$\mathcal{B}'$. אז

$$[T]^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{B}'} = Q^{-1}[T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}P.$$

הוכחה: $T = 1_W \circ T \circ 1_V$, לכן לפי משפט 6.30, $[T]^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{B}'} = [1_W]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}[T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}[1_V]^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}}$. ∎

מרחבים וקטוריים והעתקות: $W \xleftarrow[1_W]{} W \xleftarrow[T]{} V \xleftarrow[1_V]{} V$

בסיסים: $\mathcal{B}' \qquad \mathcal{B} \qquad \mathcal{A} \qquad \mathcal{A}'$

דוגמה 6.39: יהי $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ השיקוף ביחס לציר דרך הראשית שעובר דרך v_1' מהדוגמה הקודמת. אז

$$T(v_1') = v_1', \quad T(v_2') = -v_2'$$

ולכן $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
יהיו $\mathcal{A} = \mathcal{B}, \mathcal{A}' = \mathcal{B}'$.
אז $P = Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. מכאן $P^{-1} = Q^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. לכן

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = [T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}P$$

ולכן

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} =& P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

מכאן נובע

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= [T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}]_{\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos 2\theta + y\sin 2\theta \\ x\sin 2\theta - y\cos 2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

מסקנה 6.40: *(בתנאי המשפט)* $\mathrm{rk}[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'} = \mathrm{rk}[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$

הוכחה: הכפלה במטריצות הפיכות (מימין או משמאל) אינה משנה את דרגת המטריצה. ∎

הגדרה 6.41: מטריצות $C, C' \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ נקראות **שקולות** (**־שורות ועמודות**) אם יש $P \in \mathrm{M}_n(F)$, $Q \in \mathrm{M}_m(F)$ הפיכות כך ש־$C' = Q^{-1}CP$.

המשפט הקודם אומר: אם C, C' מטריצות של אותה העתקה לינארית T, כל אחת לפי זוג בסיסים משלה, אז C, C' שקולות. נראה שגם ההיפך נכון:

משפט 6.42: *תהי $T\colon V\to W$ העתקה לינארית. יהיו $\mathcal{A},\mathcal{B}$ בסיסים סדורים של V,W, בהתאמה, ותהי $C=[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$. תהי $C'\in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$. אם C,C' שקולות, אז יש בסיסים סדורים $\mathcal{A}',\mathcal{B}'$ של V,W, בהתאמה, כך ש-* $C'=[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}$.

הוכחה: נתון ש-$C'=Q^{-1}CP$, באשר $P\in \mathrm{M}_n(F)$, $Q\in \mathrm{M}_m(F)$ הפיכות. לפי המשפט הקודם די למצוא בסיסים $\mathcal{A}',\mathcal{B}'$ של V,W, בהתאמה, כך ש-P היא מטריצת המעבר מ-$\mathcal{A}$ ל-$\mathcal{A}'$ ו-Q היא מטריצת המעבר מ-$\mathcal{B}$ ל-$\mathcal{B}'$. אבל הם קיימים לפי תרגיל 6.33 ולפי משפט 6.34. ∎

משפט 6.43: *מטריצות* $C,C'\in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ *שקולות אם ורק אם* $\operatorname{rk}C=\operatorname{rk}C'$. *בפרט, אם* $\operatorname{rk}C=r$, *אז* C *שקולה ל־* $\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{pmatrix}=(e_1,\dots,e_r,0\dots,0)$.

הוכחה: נניח $C'=Q^{-1}CP$, באשר $P\in \mathrm{M}_n(F)$, $Q\in \mathrm{M}_m(F)$ הפיכות. הכפלה במטריצה הפיכה אינה משנה את הדרגה, לכן $\operatorname{rk}C=\operatorname{rk}C'$.

להיפך, נניח כי $r=\operatorname{rk}C=\operatorname{rk}C'$. נראה תחילה ש־$C$ שקולה ל־$\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{pmatrix}$.

נתבונן ב־$C^t\in \mathrm{M}_{n\times m}(F)$. קיימת $P_1\in \mathrm{M}_n(F)$ הפיכה כך ש־P_1C^t מדורגת קנונית. אז $\operatorname{rk}P_1C^t=\operatorname{rk}C^t=\operatorname{rk}C$, ולכן $n-r$ השורות האחרונות של P_1C^t הן 0. לכן $n-r$ העמודות האחרונות של $(P_1C^t)^t=CP_1^t$ הן 0.

כעת קיימת $Q_1\in \mathrm{M}_m(F)$ הפיכה כך ש־$Q_1CP_1^t$ מדורגת קנונית. גם היא מדרגה r וגם $n-r$ העמודות האחרונות שלה הן 0. לכן r העמודות הראשונות שלה הן המבילות. מכאן $Q_1CP_1^t=(e_1,\dots,e_r,0\dots,0)$.

נסמן $P=P_1^t$ ו־$Q=Q_1^{-1}$. אז Q,P הפיכות ו־$\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{pmatrix}=(e_1,\dots,e_r,0\dots,0)=Q^{-1}CP$.

באותו אופן קיימות Q',P' הפיכות כך ש־$\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{pmatrix}=Q'^{-1}C'P'$. לכן $Q'^{-1}C'P'=Q^{-1}CP$. נכפיל שוויון זה מימין ב־P'^{-1} ומשמאל ב־Q'. נקבל $C'=Q'Q^{-1}CPP'^{-1}=(QQ'^{-1})C(PP'^{-1})$. כיוון ש־$QQ'^{-1},PP'^{-1}$ הפיכות, C,C' שקולות. ∎

הגדרה 6.44: מטריצות $C, C' \in \mathrm{M}_n(F)$ נקראות **דומות** אם יש $P \in \mathrm{M}_n(F)$ הפיכה כך ש-$C' = P^{-1}CP$.

בדומה למשפטים לעיל אפשר להוכיח:

משפט 6.45: *יהי V מרחב וקטורי עם בסיס $\mathcal{B}$, תהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית ותהי $C = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.*

(א) *יהי $\mathcal{B}'$ בסיס של V. אז $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$ דומה ל-C.*

(ב) *תהי $C' \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$ דומה ל-C. אז יש בסיס $\mathcal{B}'$ של V כך ש-$C' = [T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$.*

הוכחה: (א) לפי משפט 6.38 (נוסחת המעבר עם $\mathcal{A} = \mathcal{B}, \mathcal{A}' = \mathcal{B}'$) מתקיים $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}P$, באשר P מטריצת המעבר מ-$\mathcal{B}$ ל-$\mathcal{B}'$.

(ב) נתון ש-$C' = P^{-1}CP$, באשר $P \in \mathrm{M}_m(F)$ הפיכה. לפי נוסחת המעבר די למצוא בסיס $\mathcal{B}'$ של V כך ש-P היא מטריצת המעבר מ-$\mathcal{B}$ ל-$\mathcal{B}'$. אבל הוא קיים לפי תרגיל 6.33 ולפי משפט 6.34. ∎

המקבילה של משפט 6.43 לדמיון (במקום השקילות) של מטריצות היא מסובכת יותר. זהו אחד הנושאים המרכזיים באלגברה לינארית 2 (צורת ז'ורדן, צורות קנוניות).

משפט 6.46 (משפט האפסיות של Sylvester): *תהיינה* $U \xrightarrow{S} V \xrightarrow{T} W$ *העתקות לינאריות של מרחבים וקטוריים מעל שדה* F*. נניח ש־*U, V *נוצרים סופית. אז*

(א) $\dim \mathrm{Ker}(T \circ S) \le \dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Ker}(S)$;

(ב) $\mathrm{rk}(T \circ S) \ge \mathrm{rk}(T) + \mathrm{rk}(S) - \dim V$.

הוכחה: (א) אם $u \in \mathrm{Ker}(S)$ אז $u \in \mathrm{Ker}(T \circ S)$, כי $(T \circ S)(u) = T(S(u)) = T(0) = 0$. לכן $\mathrm{Ker}(S) \subseteq \mathrm{Ker}(T \circ S) \subseteq U$. הגרעינים האלה הם תת מרחבים של U ולכן נוצרים סופית.

נבחר בסיס $u_1, \dots . u_r$ של $\mathrm{Ker}(S)$,

נשלים אותו לבסיס $u_1, \dots, u_r, \dots, u_q$ של $\mathrm{Ker}(T \circ S)$,

ונשלים אותו לבסיס $u_1, \dots, u_r, \dots, u_q, \dots, u_m$ של U.

בהוכחה של משפט המימד (משפט 6.16) הראינו (בטענה) שהסדרה $S(u_{r+1}), \dots, S(u_q), \dots, S(u_m)$ היא בסיס של $\mathrm{Im}\, S$. בפרט $S(u_{r+1}), \dots, S(u_q)$ בלתי תלויה לינארית. אבל איבריה בתוך $\mathrm{Ker}(T)$, כי $u_{r+1}, \dots, u_q \in \mathrm{Ker}(T \circ S)$. לכן $\dim \mathrm{Ker}(T) \ge q - r = \dim \mathrm{Ker}(T \circ S) - \dim \mathrm{Ker}(S)$. מכאן (א).

(ב) לפי משפט המימד,

$\dim \mathrm{Ker}(T \circ S) = \dim U - \mathrm{rk}(T \circ S)$,

$\dim \mathrm{Ker}(S) = \dim U - \mathrm{rk}(S)$,

ו־$\dim \mathrm{Ker}(T) = \dim V - \mathrm{rk}(T)$.

לכן, לפי (א), $\dim U - \mathrm{rk}(T \circ S) \le \dim V - \mathrm{rk}(T) + \dim U - \mathrm{rk}(S)$. מכאן (ב). ∎

מסקנה 6.47: *תהיינה* $A \in \mathrm{M}_{m\times p}(F),\ B \in \mathrm{M}_{p\times n}(F)$ *מטריצות. אז* $\mathrm{rk}(AB) \geq \mathrm{rk}(A)+\mathrm{rk}(B)-p$.

הוכחה: נבחר מרחבים וקטוריים U,V,W מעל F בעלי מימדים n,p,m ובסיסים $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$, בהתאמה. לפי משפט 6.27 יש העתקות לינארית $U \xrightarrow{S} V \xrightarrow{T} W$ כך ש- $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = A$, $[S]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = B$. לפי משפט 6.30, $[T\circ S]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}} = AB$. לכן, לפי תרגיל 6.22(א), $\mathrm{rk}(T)=\mathrm{rk}(A)$, $\mathrm{rk}(S)=\mathrm{rk}(B)$, ו-$\mathrm{rk}(T\circ S)=\mathrm{rk}(AB)$.
לכן הטענה נובעת ממשפט 6.46(ב). ■

משפט 6.46(ב): $\mathrm{rk}(T\circ S) \geq \mathrm{rk}(T)+\mathrm{rk}(S)-\dim V$.

מרחבים וקטוריים והעתקות:

בסיסים וממדים:

$$\begin{tikzcd}
W & V \arrow[l, "T"'] & U \arrow[l, "S"'] \arrow[ll, bend right, "T\circ S"'] \\[-20pt]
\mathcal{C} & \mathcal{B} & \mathcal{A} \\[-25pt]
m & p & n
\end{tikzcd}$$

7. מרחבים דואליים

נקבע שדה F כלשהו. יהי $e_1, e_2, \ldots, e_n$ הבסיס הסטנדרטי של F^n.

יהי V מרחב וקטורי מעל F. נזכור ש־F הוא מרחב וקטורי מעל עצמו ($F \cong F^1$).

הגדרה 7.1: **פונקציונָל** (**לינארי**) **על** V הוא העתקה לינארית $F \to V$. קבוצת כל הפונקציונלים על V תיקרא **המרחב הדואלי של** V ותסומן V^*. ∎

הערה 7.2: לפי משפט **6.26**, $V^* = L(V, F)$ הוא מרחב וקטורי מעל F. לפי מסקנה **6.28**, אם V נוצר סופית, אז $\dim V^* = \dim V$. ∎

דוגמאות 7.3: (א) יהי $V = F^n$. אגף שמאל של כל משוואה לינארית ("תבנית לינארית")

$$a_1X_1 + \ldots + a_nX_n = b$$

מגדיר פונקציונל $\psi \in V^*$ הנתון על ידי

$$.\psi(v) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = (a_1, \ldots, a_n)(x_1, \ldots, x_n)^t$$

באשר $v = (x_1, \ldots, x_n)^t$.

כל $\varphi \in V^*$ הוא מהצורה הזאת. אכן, נסמן $a_i = \varphi(e_i)$, לכל $1 \leq i \leq n$ ונגדיר ψ כמו לעיל, אז $\varphi(e_i) = a_i = \psi(e_i)$ לכל i, לכן $\varphi = \psi$ לפי היחידות במשפט 6.23.

קבוצת הפתרונות של המשוואה הלינארית לעיל היא $\{v \in V |\ \psi(v) = b\}$.

(ב) יהי $V = F[X]$ מרחב הפולינומים. כל $a \in F$ מגדיר **פונקציונל ההצבה** φ_a הנתון על יד $\varphi_a(f = \sum_i a_iX^i) = f(a) = \sum_i a_ia^i$. ∎

הגדרה 7.4: *הדלתא של קרוֶנקר.* $\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$. אם $a_1, \dots, a_n \in F$, אז $\sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = a_j$. ∎

משפט 7.5: *יהי* $\dim V = n < \infty$ *ויהי* $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ *בסיס של* V. *אז קיים בסיס יחיד* $\mathcal{B}^* = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *של* V^* *כך ש-* $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$ *לכל* $1, \dots, i, j \leq n$. *בסיס זה נקרא* **הבסיס הדואלי של** $\mathcal{B}$.

הוכחה: לפי משפט 6.23 קיימים פונקציונלים יחידים $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$ כך ש- $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$ לכל $1 \leq i, j \leq n$. נותר להוכיח ש-$(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ בסיס של V^*. לשם כך נראה :

(*) לכל $\varphi \in V^*$ יש הצגה יחידה $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$, באשר $a_i \in F$ לכל i.

ואכן, יהיו $a_1, \dots, a_n \in F$ כלשהם ויהי $\psi = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$. אז

$\psi(v_j) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(v_j) = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = a_j$, לכן, לפי היחידות במשפט 6.23,

$$\psi = \varphi \;\Leftrightarrow\; \psi(v_j) = \varphi(v_j) \text{ לכל } j \;\Leftrightarrow\; a_j = \varphi(v_j) \text{ לכל } j$$

ומכאן הקיום והיחידות של $a_1, \dots, a_n$. ∎

תרגיל 7.6: *בסימונים של המשפט יהי* $v \in V$. *אז* $[v]_{\mathcal{B}} = (\varphi_1(v), \dots, \varphi_n(v))^t$.

הוכחה: נניח $v = \sum_i a_i v_i$, באשר $a_i \in F$. אז $\varphi_j(v) = \sum a_i \varphi_j(v_i) = \sum a_i \delta_{ij} = a_j$ לכל j. ∎

כעת יהי $V^{**} = (V^*)^*$ המרחב הדואלי של המרחב הדואלי V^* של V.

משפט 7.7: *(א) כל $v \in V$ מגדיר $\bar{v} \in V^{**}$ באופן הבא: $\bar{v}(\varphi) = \varphi(v)$ לכל $\varphi \in V^*$.*

(ב) ההעתקה $\bar{v} \mapsto v$ היא העתקה לינארית $V \to V^{**}$.

(ג) אם V נוצר סופית, אז $\bar{v} \mapsto v$ היא איזומורפיזם.

הוכחה: (א) יהי $v \in V$ ויהיו $\varphi, \varphi' \in V^*$ ו־$a \in F$. אז

$$\bar{v}(\varphi + \varphi') = (\varphi + \varphi')(v) = \varphi(v) + \varphi'(v) = \bar{v}(\varphi) + \bar{v}(\varphi')$$

$$\bar{v}(a\varphi) = (a\varphi)(v) = a\varphi(v) = a\bar{v}(\varphi)$$

(ב) ההעתקה היא לינארית: יהיו $v_1, v_2 \in V$ ויהי $a \in F$. אז לכל $\varphi \in V^*$

$$\overline{v_1 + v_2}(\varphi) = \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \bar{v}_1(\varphi) + \bar{v}_2(\varphi) = (\bar{v}_1 + \bar{v}_2)(\varphi)$$

$$\overline{av_1}(\varphi) = \varphi(av_1) = a\varphi(v_1) = a\bar{v}_1(\varphi) = (a\bar{v}_1)(\varphi)$$

לכן $\overline{v_1 + v_2} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$ ו־$\overline{av_1} = a\bar{v}_1$.

ההעתקה היא חד חד ערכית: יהי $v \in V$ כך ש־$\bar{v} = 0$. נניח בשלילה ש־$v \neq 0$ ונשלים את v לבסיס $v_1 = v, v_2, \ldots, v_n$ של V. יהי $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ הבסיס הדואלי של V^*. אז $0 = \bar{v}(\varphi_1) = \varphi_1(v) = \delta_{11} = 1$, סתירה.

ההעתקה היא על: לפי הערה 7.2, $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$. לפי מסקנה 6.17, כיוון שהיא חד חד ערכית, היא על. ∎

הערה 7.8: (א) האיזומורפיזם במשפט הינו "טבעי", אינו תלוי בבחירת בסיסים.

(ב) אם V איננו נוצר סופית, $v \mapsto \bar{v}$ היא עדיין חד חד ערכית אבל לא על. לא נוכיח זאת כאן. ∎

הגדרה 7.9: תהי $S \subseteq V$ קבוצה ויהי $\varphi \in V^*$. נאמר ש־φ **מאפס את** S אם $\varphi(v) = 0$ לכל $v \in S$. **המאפס של** S היא הקבוצה S^0 של כל הפונקציונלים שמאפסים את S, כלומר $S^0 = \{\varphi \in V^* |\ \varphi(v) = 0 \text{ לכל } v \in S\}$.
∎

דוגמאות 7.10: (א) $V^0 = \{0\}$, $\{0\}^0 = V^*$. ∎

למה 7.11: *תהיינה* $S, T \subseteq V$ *קבוצות.*

(א) S^0 *הוא תת מרחב של* V^*.

(ב) אם $S \subseteq T$ אז $T^0 \subseteq S^0$.

(ג) $S^0 = (\mathrm{Sp}(S))^0$.

הוכחה: לפי ההגדרות:

(א) פונקציונל האפס נמצא ב־S^0. יהיו $\varphi, \varphi' \in S^0$ ויהי $a \in F$. אז לכל $s \in S$

$$(\varphi + \varphi')(s) = \varphi(s) + \varphi'(s) = 0 + 0 = 0$$

$$(a\varphi)(s) = a\varphi(s) = a \cdot 0 = 0$$

לכן $\varphi + \varphi', a\varphi \in S^0$.

(ב) יהי $\varphi \in T^0$. אז $\varphi(s) = 0$ לכל $s \in T$ ובפרט לכל $s \in S$. לכן $\varphi \in S^0$.

(ג) $S \subseteq \mathrm{Sp}(S)$, לכן, לפי (ב), $(\mathrm{Sp}(S))^0 \supseteq S^0$. להיפך, יהי $\varphi \in S^0$. כל איבר ב־$v = \mathrm{Sp}(S)$ הוא מהצורה $v = a_1v_1 + \cdots + a_kv_k$, באשר $v_1, \ldots v_k \in S$ ו־$a_1, \ldots a_k \in F$. מתקיים

$$\varphi(v) = \varphi(a_1v_1 + \cdots + a_kv_k) = a_1\varphi(v_1) + \cdots + a_k\varphi(v_k) = a_10 + \cdots + a_k0 = 0,$$

לכן $\varphi \in (\mathrm{Sp}(S))^0$. ∎

מעת ועד סוף הפרק נניח ש־ V נוצר סופית.

משפט 7.12: *יהי U תת מרחב של V. אז* $\dim U + \dim U^0 = \dim V$.

הוכחה: יהיו $n = \dim V$ ו־ $r = \dim U$. צריך להוכיח ש־ $\dim U^0 = n - r$.

נבחר בסיס $v_1, \ldots, v_r$ של U ונשלים אותו לבסיס $v_1, \ldots, v_r, \ldots, v_n$ של V.

יהי $\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \ldots, \varphi_n$ הבסיס הדואלי של V^*. אז די להוכיח

טענה: *$\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n$ בסיס של* U^0.

הוכחת הטענה מורכבת משלושת חלקים הבאים:

טענה א: $\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n \in U^0$. ואכן, אם $r+1 \le i \le n$ ו־ $1 \le j \le r$ אז $\varphi_i(v_j) = 0$. לכן $\varphi_i \in \{v_1, \ldots, v_r\}^0$. לפי למה 7.11(ג), $\varphi_i \in \mathrm{Sp}(\{v_1, \ldots, v_r\})^0 = U^0$.

טענה ב: *$\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n$ בלתי תלויים לינארית.* אכן, הם חלק מבסיס של V^*.

טענה ג: *$\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n$ סדרת יוצרים של* U^0. ואכן, יהי $\varphi \in U^0$. כיוון ש־ $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ בסיס של V^*, יש $a_1, \ldots, a_r, \ldots, a_n \in F$ כך ש־ $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i\varphi_i$. אבל φ מאפס את U ובפרט את $v_1, \ldots, v_r$. לכן

$$0 = \varphi(v_j) = (\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i)(v_j) = \sum_{i=1}^n a_i\varphi_i(v_j) = \sum_{i=1}^n a_i\delta_{ij} = a_j, \qquad 1 \le j \le r$$

לכן $\varphi = \sum_{i=r+1}^n a_i\varphi_i$, כנדרש. ∎

כיוון שגם V^* מרחב וקטורי, לכל $T \subseteq V^*$ יש מאפס T^0 ב־V^{**}. אם V נוצר סופית, נזהה את V^{**} עם V, לפי משפט 7.7(ג). לכן $T^0 \subseteq V$. עבור $S \subseteq V$ נכתוב S^{00} במקום $(S^0)^0$.

מסקנה 7.13: *יהי U תת מרחב של V. אז* $U^{00} = U$.

הוכחה: יהי $u \in U$. לכל $\varphi \in U^0$ מתקיים $\bar{u}(\varphi) = \varphi(u) = 0$, כלומר, $u = \bar{u} \in U^{00}$. לכן $U \subseteq U^{00}$.
לפי משפט 7.12,

$$\dim U^0 = \dim V - \dim U \, ,$$
$$\dim U^{00} = \dim V^* - \dim U^0 \, .$$

אם נציב את U^0 מהמשוואה הראשונה בשניה, ונחליף את $\dim V^{**}$ ב־$\dim V$ (לפי הערה 7.2), נקבל $\dim U^{00} = \dim U$. מההכלה של התת מרחבים ומשוויון ממדיהם נובע $U = U^{00}$. ∎

מסקנה 7.14: *יהי W תת מרחב של V^*. אז* $\dim W + \dim W^0 = \dim V$.

הוכחה: לפי משפט 7.12 (עבור V^* במקום V) מתקיים $\dim W + \dim W^0 = \dim V^*$. לפי הערה 7.2, $\dim V^* = \dim V$. ∎

דוגמה 7.15: יהי $V = F^n$ ויהי $U \subseteq V$ תת מרחב. יהי $\mathcal{B}^* = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ בסיס של U^0. כפי שאמרנו בדוגמה 7.2(א), את איברי $\mathcal{B}^*$ אפשר לזהות עם האגפים השמאליים של משוואות לינאריות הומוגניות $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n = 0$, באשר $a_1, \ldots, a_n \in F$. אז $U = U^{00}$ הוא המאפס של $\mathcal{B}^*$, כלומר הוא מרחב הפתרונות של המשוואות הלינאריות ההומוגניות ב־$\mathcal{B}^*$.

זהו פתרון נוסף לתרגיל 4.53. $\blacksquare$

משפט 7.16: *יהיו* U_1, U_2 *שני תת מרחבים של* V*. אז:*

(א) $(U_1 \cap U_2)^0 = U_1^0 + U_2^0$.

(ב) $(U_1 + U_2)^0 = U_1^0 \cap U_2^0$.

הוכחה: $U_1 \cap U_2 \subseteq U_1, U_2$, לכן, לפי למה 7.11(ב), $(U_1 \cap U_2)^0 \supseteq U_1^0, U_2^0$. מכאן

$$(U_1 \cap U_2)^0 \supseteq U_1^0 + U_2^0. \tag{1}$$

באותו אופן, $U_1, U_2 \subseteq U_1 + U_2$, לכן $U_1^0, U_2^0 \supseteq (U_1 + U_2)^0$. מכאן

$$U_1^0 \cap U_2^0 \supseteq (U_1 + U_2)^0. \tag{2}$$

שתי הנוסחאות האלה נכונות גם עבור $U_1^0, U_2^0 \subseteq V^*$ במקום $U_1, U_2 \subseteq V$, כלומר

$$(U_1^0 \cap U_2^0)^0 \supseteq U_1^{00} + U_2^{00} = U_1 + U_2, \tag{1'}$$

$$U_1 \cap U_2 = U_1^{00} \cap U_2^{00} \supseteq (U_1^0 + U_2^0)^0. \tag{2'}$$

כעת נקח מאפסים על $(1'), (2')$:

$$U_1^0 \cap U_2^0 = (U_1^0 \cap U_2^0)^{00} \subseteq (U_1 + U_2)^0, \tag{1''}$$

$$(U_1 \cap U_2)^0 \subseteq (U_1^0 + U_2^0)^{00} = U_1^0 + U_2^0. \tag{2''}$$

כעת, (1) ו־$(2'')$ נותנים (א), ואילו (2) ו־$(1'')$ נותנים (ב). ∎

סימון 7.17: **נכתוב** $\left(\varphi, v\right)$ **במקום** $\varphi(v)$. ■

$$
\begin{aligned}
(\varphi, v_1 + v_2) &= (\varphi, v_1) + (\varphi, v_2) \\
(\varphi_1 + \varphi_2, v) &= (\varphi_1, v) + (\varphi_2, v) \\
(\varphi, av) &= a(\varphi, v) = (\varphi, av)
\end{aligned}
$$

משפט 7.18: *יהיו V, W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית מעל שדה F. תהי $T\colon V \to W$ העתקה לינארית. אז קיימת העתקה לינארית יחידה - נקראת* **ההעתקה הדואלית ל־T** - $T^*\colon W^* \to V^*$ *כך ש־* $\big(T^*(\psi), v\big) = \big(\psi, T(v)\big)$ *לכל $v \in V$ ולכל $\psi \in W^*$.*

הוכחה: יהי $\psi \in W^*$. אז $\psi \circ T\colon V \to F$ היא העתקה לינארית, כלומר, איבר של V^*. נסמן אותו ב־$T^*(\psi)$. בכך הגדרנו העתקה $T^*\colon W^* \to V^*$. לכל $v \in V$ מתקיים $\big(T^*(\psi)\big)(v) = \psi\big(T(v)\big)$, כלומר, $\big(T^*(\psi), v\big) = \big(\psi, T(v)\big)$. ברור שזו האפשר היחידה להגדיר T^* כך שהנוסחה האחרונה תתקיים.

נותר להראות ש־T^* לינארית. יהיו $\psi, \psi' \in W^*$ ו־$a \in F$. אז, לכל $v \in V$,

$$\begin{aligned}\big(T^*(\psi+\psi'), v\big) &= \big(\psi+\psi', T(v)\big) = \big(\psi, T(v)\big) + \big(\psi', T(v)\big) = \\ &= \big(T^*(\psi), v\big) + \big(T^*(\psi'), v\big) = \big(T^*(\psi) + T^*(\psi'), v\big)\end{aligned}$$

$$\big(T^*(a\psi), v\big) = \big(a\psi, T(v)\big) = a\big(\psi, T(v)\big) = a\big(T^*(\psi), v\big) = \big(aT^*(\psi), v\big)$$

לכן $T^*(\psi+\psi') = T^*(\psi) + T^*(\psi')$, $T^*(a\psi) = aT^*(\psi)$. לכן T^* לינארית. ∎

$$V \xrightarrow{T} W$$

$$V^* \xleftarrow[T^*]{} W^*$$

משפט 7.19: *בתנאים של המשפט הקודם יהיו $\mathcal{A},\mathcal{B}$ בסיסים של V,W, ויהיו $\mathcal{A}^*,\mathcal{B}^*$ הבסיסים הדואליים שלהם. אז* $[T^*]_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}=\left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}\right)^t$.

הוכחה: יהיו $\mathcal{A}=(v_1,\ldots,v_n),\mathcal{A}^*=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n),\mathcal{B}=(w_1,\ldots,w_m),\mathcal{B}^*=(\psi_1,\ldots,\psi_m)$. יהיו $1\le i\le m,\ 1\le j\le n$. לפי תרגיל 7.6, $\left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}\right)_{ij}=\psi_i(T(v_j))=\left(\psi_i,T(v_j)\right)$. באותו אופן $\left([T^*]_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}\right)_{ji}=\bar{v}_j(T^*(\psi_i))=\left(T^*(\psi_i),v_j\right)$. לפי ההגדרה של T^* שני הביטויים שווים. ∎

תרגיל 7.20: *תהי* $T\colon V\to W$ *העתקה לינארית ותהי* $T^*\colon W^*\to V^*$ *ההעתקה הדואלית. יהי* U *תת מרחב של* V.
הוכח: $\big(T(U)\big)^0=(T^*)^{-1}(U^0)$.

תזכורת: אם $S\colon A\to B$ **העתקה של קבוצות ו־**$B'\subseteq B$**, אז** $S^{-1}(B')=\{a\in A|\ S(a)\in B'\}$**.**

הוכחה: $T(U)=\{T(u)|\ u\in U\}$**, לכן**

$$\begin{aligned}\big(T(U)\big)^0&=\{\psi\in W^*|\ \big(\psi,T(u)\big)=0 \text{ לכל } u\in U\}\\&=\{\psi\in W^*|\ \big(T^*(\psi),u\big)=0 \text{ לכל } u\in U\}\\&=\{\psi\in W^*|\ T^*(\psi)\in U^0\}=(T^*)^{-1}(U^0)\end{aligned}\qquad\blacksquare$$

$\left(T(U)\right)^0 = (T^*)^{-1}(U^0)$.

תרגיל 7.21: *יהי* V *מרחב וקטורי בעל מימד* n *מעל* F *ויהי* $\mathcal{B}$ *בסיסו. תהי* $T\colon V \to V$ *העתקה לינארית ותהי* $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$*. נניח ש־*$A$ *הפיכה ו־*$\det(A - I_n) = 0$*. הוכח:*

(א) *קיים* $U \subseteq V$ *תת מרחב בעל מימד* 1 *כך ש־* $T(U) = U$.

(ב) *קיים* $U \subseteq V$ *תת מרחב בעל מימד* $n-1$ *כך ש־* $T(U) = U$.

הוכחה: (א) לפי הנתון $\operatorname{rk}(A - I_n) < n$, לכן למערכת המשוואות $(A - I_n)X = 0$ יש פתרון לא טריביאלי $0 \neq v \in F^n$. הוא מקיים $Av - v = (A - I_n)v = 0$, לכן $Av = v$. בגלל האיזומורפיזם $V \to F^n$ יש $0 \neq u \in V$ כך ש־$[u]_{\mathcal{B}} = v$. הוא מקיים $[T(u)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[u]_{\mathcal{B}} = Av = [u]_{\mathcal{B}}$, לכן $T(u) = u$. יהי $U = \operatorname{Sp}(u) = \{au|\ a \in F\}$, אז $\dim U = 1$ ו־$T(U) = \{aT(u)|\ a \in F\} = \{au|\ a \in F\} = U$.

(ב) תהי $T^*\colon V^* \to V^*$ ההעתקה הדואלית של T ויהי $\mathcal{B}^*$ הבסיס הדואלי ל־$\mathcal{B}$. אז $[T^*]_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}^*} = A^t$. כיוון ש־$A^t$ הפיכה, T^* איזומורפיזם. כמו כן מתקיים $\det(A^t - I_n) = \det(A - I_n)^t = \det(A - I_n) = 0$. לכן לפי (א) יש תת מרחב $\Phi \subseteq V^*$ בעל מימד 1 כך ש־ $T^*(\Phi) = \Phi$. אז $U = \Phi^0$ תת מרחב של V בעל מימד $n-1$. לפי התרגיל הקודם

$$\left(T(U)\right)^0 = (T^*)^{-1}(U^0) = (T^*)^{-1}(\Phi) = \Phi = U^0$$

ניקח את המאפס על שני האגפים ונקבל: $T(U) = U$. ∎

8. מרחבים וקטוריים בעלי מימד אינסופי

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F.

בפרק 4 הגדרנו סדרת יוצרים (הגדרה 4.19) וסדרה בלתי תלויה לינארית (הגדרה 4.24) עבור סדרה **סופית** של איברים במרחב וקטורי. היה רצוי להרחיב הגדרות אלה לסדרות כלשהן, לאו דוקא סופיות. כיוון שהמושג של סדרה אינסופית הוא קצת מסובך, מקובל לעשות זאת לקבוצות במקום סדרות:

סדרה רושמים כך: $v_1, v_2, \ldots, v_n$ או $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

קבוצה רושמים כך: $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) \neq \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

$$\{1,2,3,4,5,6\} = \{4,6,5,1,3,2\} = \{1,1,3,2,4,5,6,2\}$$

$$(1,2,3,4,5,6) \neq (4,6,5,1,3,2) \neq (1,1,3,2,4,5,6,2)$$

סדרה בה יש שני וקטורים זהים הינה תלויה לינארית.

אם סדרה תלויה לינארית ונשנה את סדר האיברים בה, אז הסדרה החדשה גם תלויה לינארית.

הגדרה 8.1: תהי $\mathcal{B} \subseteq V$ קבוצה.

(א) $\mathcal{B}$ היא **קבוצת יוצרים של** V אם לכל $v \in V$ קיימים $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathcal{B}$ **שונים זה מזה** כך ש־v הוא צירוף לינארי שלהם.

(ב) $\mathcal{B}$ היא **תלויה לינארית** (מעל F) אם קיימים $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathcal{B}$ **שונים זה מזה** ו־$a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$, לא כולם 0, כך ש־$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$.

(ג) לפי כך, $\mathcal{B}$ היא **בלתי תלויה לינארית** (מעל F) אם לכל $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathcal{B}$ **שונים זה מזה** ולכל $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$ מתקיים: אם $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$ אז $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

(ד) $\mathcal{B}$ היא **בסיס** של V אם היא קבוצת יוצרים של V בלתי תלויה לינארית. ∎

הערה 8.2: (א) בהגדרה 8.1(א) לא צריך לדרוש, בלי הגבלת הכלליות, ש־$v_1, v_2, \ldots, v_n$ יהיו שונים זה מזה. לעומת זאת, בהגדרה 8.1(ב) דרישה זו היא מהותית - אי אפשר לוותר עליה.

(ב) אם $v_1, \ldots, v_n \in V$ שונים זה מזה אז

(ב1) $(v_1, \ldots, v_n)$ סדרת יוצרים אם ורק אם $\{v_1, \ldots, v_n\}$ קבוצת יוצרים.

(ב2) $(v_1, \ldots, v_n)$ בלתי תלויה לינארית אם ורק אם $\{v_1, \ldots, v_n\}$ בלתי תלויה לינארית.

(ג) לבסיס בהגדרה 8.1(ג) קוראים לפעמים גם **בסיס** Hamel. ∎

דוגמה: $\{1, X, X^2, X^3, \ldots\}$ הוא בסיס של $F[X]$. ∎

למה 8.3: *קבוצה בלתי תלויה מרבית $\mathcal{B}$ ב־V היא בסיס של V.*

הוכחה: נראה ש־$\mathcal{B}$ קבוצת יוצרים. יהי $v \in V$. אז $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B} \cup \{v\} \subseteq V$, לכן, לפי המרביות של $\mathcal{B}$, או ש־$\mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \{v\}$ או ש־$\mathcal{B} \cup \{v\}$ תלויה לינארית. במקרה הראשון $v \in \mathcal{B}$ ולכן $v = 1v$ צירוף לינארי של איברי $\mathcal{B}$. במקרה השני קיימים $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{B} \cup \{v\}$ שונים זה מזה ו־$a_1, \ldots, a_n \in F$, לא כולם 0 כך ש־$a_1v_1 + \cdots a_nv_n = 0$. בלי הגבלת הכלליות $a_1, \ldots, a_n \in F$ כולם שונים מ־0, אחרת נשמיט מתוך $v_1, \ldots, v_n$ אותם v_i עבורם $a_i = 0$. לא יתכן ש־$v_1, \ldots, v_n$ כולם שונים מ־v, כי אז $\mathcal{B}$ תלויה לינארית, סתירה להנחה. לכן, בלי הגבלת הכלליות, $v_n = v$. אם $n = 1$ אז $a_1v = 0$ ולכן $v = 0$ ובפרט v צירוף לינארי של איברי $\mathcal{B}$. נניח $n \geq 2$. כיוון ש־$v_1, \ldots, v_{n-1}$ שונים מ־v, הם ב־$\mathcal{B}$. לכן $v = (-a_n^{-1}a_1)v_1 + \cdots (-a_n^{-1}a_{n-1})v_{n-1}$ צירוף לינארי של איברי $\mathcal{B}$. ∎

תרגיל: *יהי $\mathcal{B}$ בסיס של V. אז $\mathcal{B}$ קבוצה בלתי תלויה מרבית ב־ V.*

הוכחה: יהי $v \in V$ כך ש־$v \notin \mathcal{B}$. לפי ההנחה יש $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathcal{B}$ שונים זה מזה ויש סקלרים $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$ כך ש־$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$. אז $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ שונים זה מזה ו־$1v + (-a_1)v_1 + (-a_2)v_2 + \cdots + (-a_n)v_n = 0$. לכן $\mathcal{B} \cup \{v\}$ תלויה לינארית. ∎

משפט 8.4: *לכל מרחב וקטורי V יש בסיס. ביתר דיוק, כל קבוצה בלתי תלויה לינארית של V אפשר להשלים לבסיס של V.*

הוכחה: לפי הלמה של Zorn: תהי $\mathcal{B}_0 \subseteq V$ קבוצה בלתי תלויה לינארית ב־V.

תהי $\mathcal{F} = \{\mathcal{B} \subseteq V |\ \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B},$ בלתי תלויה לינארית $\mathcal{B}\}$.

אם $\{\mathcal{B}_i\}_{i\in I}$ שרשרת עולה של איברי $\mathcal{F}$ אז $\mathcal{B} := \bigcup_{i\in I} \mathcal{B}_i$ היא גם ב־$\mathcal{F}$. אכן, היא מכילה את $\mathcal{B}_0$. יהיו $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{B}$ שונים זה מזה ויהיו $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$ כך ש־$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$. אז יש $i \in I$ כך ש־$v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{B}_i$. כיוון ש־$\mathcal{B}_i$ בלתי תלויה לינארית, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

ברור ש־$\mathcal{B}$ היא חסם עליון של השרשרת $\{\mathcal{B}_i\}_{i\in I}$. לכן לפי הלמה של צורן יש $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$ מרבית. לפי למה 8.3, היא בסיס של V. ∎

תהי $V \supseteq \mathcal{B}$ קבוצה. לכל $v \in \mathcal{B}$ יהי $a_v \in F$ כך ש־$a_v = 0$ כמעט לכל $v \in \mathcal{B}$ (כלומר, פרט למספר סופי של איברים $v \in \mathcal{B}$). אז מגדירים

$$\sum_{v\in\mathcal{B}} a_v v := \sum_{\substack{v\in\mathcal{B}\\ a_v\neq 0}} a_v v$$

משפט 8.5: *יהי $\mathcal{B} \subseteq V$ בסיס של V ויהי $w \in V$. אז לכל $v \in \mathcal{B}$ יש $a_v \in F$ יחיד כך ש־$w = \sum_{v\in\mathcal{B}} a_v v$ (ו־$a_v = 0$ כמעט לכל $v \in \mathcal{B}$).*

הוכחה: קיום: לפי ההנחה יש $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ סופית ויש $a_v \in F$ לכל $v \in \mathcal{B}_0$ כך ש־$w = \sum_{v\in\mathcal{B}_0} a_v v$. נגדיר $a_v = 0$ לכל $v \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0$, אז $w = \sum_{v\in\mathcal{B}} a_v v$.

יחידות: נניח שבנוסף ל־a_v כנ"ל יש גם $a'_v \in F$ לכל $v \in \mathcal{B}$ כך ש־$w = \sum_{v\in\mathcal{B}} a'_v v$ ו־$a'_v = 0$ כמעט לכל $v \in \mathcal{B}$. אז יש $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ סופית כך ש־$a_v = 0 = a'_v$ לכל $v \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0$. לכן $\sum_{v\in\mathcal{B}_0} a_v v = w = \sum_{v\in\mathcal{B}_0} a'_v v$. מכאן $\sum_{v\in\mathcal{B}_0}(a_v - a'_v)v = 0$ וכיוון ש־$\mathcal{B}_0$ בלתי תלויה לינארית, $a_v - a'_v = 0$, כלומר, $a_v = a'_v$ לכל $v \in \mathcal{B}_0$. עבור $v \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0$ מתקיים $a_v = 0 = a'_v$. ∎

משפט 8.6: *יהי V ⊇ $\mathcal{B} \subseteq V$ בסיס של V. יהי W מרחב וקטורי מעל F ולכל $v \in \mathcal{B}$ יהי $w_v \in W$. אז קיימת העתקה לינארית יחידה $T\colon V \to W$ כך ש־$T(v) = w_v$ לכל $v \in \mathcal{B}$.*

במלים אחרות: כל העתקה $T_0\colon \mathcal{B} \to W$ ניתנת להרחבה להעתקה לינארית יחידה $T\colon V \to W$.

הוכחה: דומה להוכחה של משפט 6.23.

נניח לרגע ש־T כזו אכן קיימת. יהי $u \in V$ כלשהו. אז, כיוון ש־$\mathcal{B}$ בסיס של V, לכל $v \in \mathcal{B}$ קיים $a_v \in F$ יחיד כך ש־

$$u = \sum_{v \in \mathcal{B}} a_v v. \tag{2}$$

(וכמעט כל a_v הוא אפס). כיוון ש־T לינארית, $T(u) = \sum_{v \in \mathcal{B}} a_v T(v)$. וכיוון ש־$T(v) = w_v$ לכל $v \in \mathcal{B}$,

$$T(u) = \sum_{v \in \mathcal{B}} a_v w_v. \tag{3}$$

אגף ימין במשוואה זו אינו תלוי כלל ב־T! (הוא אמנם תלוי בבסיס הנתון וב־u, אך לא ב־T.) מכאן היחידות של T.

(ביתר פירוט, אם גם T' העתקה לינארית שמקיימת $T'(v) = w_v$ לכל $v \in \mathcal{B}$, אז עבור $u \in V$ שמקיים (2), $T'(u)$ חייב להיות אגף ימין של (3) ולכן $T(u) = T'(u)$. זה נכון לכל $u \in V$, לכן $T = T'$.)

קיום: נגדיר T על ידי (3), לכל $u \in V$, באשר a_v באים מההצגה (2) של u.
אז $T(v) = w_v$ לכל $v \in \mathcal{B}$. אכן, יהי $u \in \mathcal{B}$. אז $u = \sum_{v\in\mathcal{B}} a_v v$, באשר $a_u = 1$ ו־$a_v = 0$ לכל $v \neq u$. לכן לפי ההגדרה (3) של T, $T(u) = \sum_{v\in\mathcal{B}} a_v w_v = 1w_u = w_u$.

כמו כן T לינארית. אכן, נראה כאן רק שהיא שומרת כפל בסקלר (שמירת החיבור מראים באופן דומה). יהי $u \in V$ ויהי $\alpha \in F$. יהיו $a_v \in F$ כך שמתקיים (2). אז

$$\alpha u = \sum_{v\in\mathcal{B}} (\alpha a_v) v.$$

לכן לפי ההגדרה (3) של T,

$$T(\alpha u) = \sum_{v\in\mathcal{B}} (\alpha a_v) w_v = \alpha(\sum_{v\in\mathcal{B}} a_v w_v) = \alpha T(u). \quad \blacksquare$$

מסקנה 8.7: *יהי $0 \neq u \in V$. אז קיימת העתקה לינארית $\varphi\colon V \to F$ כך ש־$\varphi(u) = 1$.*

הוכחה: נשלים את $\{u\}$ (קבוצה בלתי תלויה לינארית) לבסיס $\mathcal{B}$ של V. נגדיר $w_u = 1$ ולכל $u \neq v \in \mathcal{B}$ נבחר $w_v \in F$ כלשהו. לפי משפט 8.6 קיימת φ כזאת. $\blacksquare$

בפרט, אם $0 \neq u \in V$ אז $\bar{u} \in V^{**}$ אינו מתאפס על כל $\varphi \in V^*$. אכן $\bar{u}(\varphi) = \varphi(u) = 1$ עבור φ במסקנה 8.7. לכן $\bar{u} \neq 0$. לכן ההעתקה $u \mapsto \bar{u}$ חד חד ערכית.

יהי F שדה. יהי V מרחב וקטורי מעל F, תהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית, תהי $A \in \mathrm{M}_n(F)$, ויהי $\lambda \in F$.

הגדרה 9.1: הקבוצה

$$V_\lambda = V_\lambda(T) = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$$

תקרא **המרחב העצמי** של T (eigenspace) **השייך ל־λ**. וקטור $v \in V$ ייקרא **וקטור עצמי** של T (eigenvector) **השייך ל־λ**, אם $T(v) = \lambda v$, כלומר $v \in V_\lambda$. (בד"כ דורשים גם $v \neq 0$, אך אנו לא נעשה זאת כאן.) הסקלאר λ ייקרא **ערך עצמי** (eigenvalue) של T אם יש $0 \neq v \in V$ כך ש־$T(v) = \lambda v$, כלומר, אם $V_\lambda \neq 0$. ∎

דוגמה 9.2: תהי $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ נתונה על ידי $T((a,b)) = (a,-b)$. אז 1 ערך עצמי של T ו־$(x,0)$ וקטור עצמי ששייך לו, לכל $x \in \mathbb{R}$. כמו כן, -1 ערך עצמי של T, ו־$(0,y)$ וקטור עצמי ששייך לו, לכל $y \in \mathbb{R}$. ∎

באופן דומה:

הגדרה 9.3: הקבוצה

$$V_\lambda = V_\lambda(A) = \{v \in F^n |\ Av = \lambda v\}$$

תקרא **המרחב עצמי של** A **השייך ל־**λ. וקטור $v \in F^n$ **וקטור עצמי של** A **השייך ל־**λ אם $Av = \lambda v$. כמו כן $\lambda \in F$ **ערך עצמי של** A, אם יש $v \in F^n$ $0 \neq$ כך ש־$Av = \lambda v$. ∎

למה 9.4: *יהי* $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ *בסיס סדור של* V*. תהי* $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \in \mathrm{M}_n(F)$*. אזי*

(א) $v \in V$ *הוא וקטור עצמי של* T *השייך ל־*λ *אם ורק אם* $[v]_{\mathcal{B}} \in F^n$ *הוא וקטור עצמי של* A *השייך ל־*λ*.*

(ב) λ *הוא ערך עצמי של* T *אם ורק אם* λ *ערך עצמי של* A*.*

הוכחה: נזכור שההעתקה $V \to F^n$ הנתונה על ידי $v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$ היא איזומורפיזם. יהי $\lambda \in F$ ויהי $v \in V$. אז $[T(v)]_{\mathcal{B}} = A[v]_{\mathcal{B}}$ (לפי האמור לעיל). כמו כן $[\lambda v]_{\mathcal{B}} = \lambda[v]_{\mathcal{B}}$ ולכן

$$A[v]_{\mathcal{B}} = \lambda[v]_{\mathcal{B}} \;\Leftrightarrow\; [T(v)]_{\mathcal{B}} = [\lambda v]_{\mathcal{B}} \;\Leftrightarrow\; T(v) = \lambda v$$

ו־$[v]_{\mathcal{B}} \neq 0 \;\Leftrightarrow\; v \neq 0$. מכאן בקלות המסקנה. ∎

בפרט λ הוא ערך עצמי של A אם ורק אם λ ערך עצמי של T_A, באשר $T_A\colon F^n \to F^n$ מוגדרת על ידי $T_A(v) = Av$, לכל $v \in F^n$. (כי A היא המטריצה של T_A לפי הבסיס הסטנדרטי.)

משפט 9.5:

(א) $V_\lambda(T) = \mathrm{Ker}(T - \lambda 1_V)$. *בפרט* $V_\lambda(T)$ *תת מרחב של* V. *לכן* λ *הוא ערך עצמי של* T *אם ורק אם ההעתקה* $T - \lambda 1_V$ *אינה חח"ע.*

(ב) *יהיו* $A \in \mathrm{M}_n(F)$, $\lambda \in F$. *אז* $V_\lambda(A)$ *הוא מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית של משוואות ליניאריות* $(A - \lambda I)X = 0$. *לכן* λ *ערך עצמי של* A *אם ורק אם* $\det(A - \lambda I) = 0$.

הוכחה: (א) יהי $v \in V$. אז

$$v \in V_\lambda(T) \;\Leftrightarrow\; T(v) = \lambda v \;\Leftrightarrow\; (T - \lambda 1_V)(v) = 0 \;\Leftrightarrow\; v \in \mathrm{Ker}(T - \lambda 1_V)$$

לכן $V_\lambda(T) = \mathrm{Ker}(T - 1_V)$. כעת λ הוא ערך עצמי של T אם ורק אם $V_\lambda(T) \neq \{0\}$ אם ורק אם ההעתקה $T - \lambda 1_V$ אינה חח"ע.

(ב) באפן דומה λ הוא ערך עצמי של A אם ורק אם למטריצה $A - \lambda I_n$ מאפס לא טריביאלי, כלומר $\det(A - \lambda I_n) = 0$. ∎

מטריצה $C \in \mathrm{M}_n(F)$ נקראת **אלכסונית** אם $(C)_{ij} = 0$ לכל $i \neq j$, כלומר,

$$C = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

פעולת החיבור והכפל בין מטריצות אלכסוניות פשוטות יותר:

תרגיל 9.6: יהיו $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots \beta_n \in F$. אז

$$\operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \operatorname{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \operatorname{diag}(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n),$$

$$\operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\operatorname{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \operatorname{diag}(\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n),$$

ואם $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F^\times$ אז $\operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{-1} = \operatorname{diag}(\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1})$.

משפט 9.7: *יהי $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס סדור של V. אז $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ אם ורק אם v_j וקטור עצמי של T השייך ל־λ_j, לכל $j = 1, \ldots, n$. אם זה קורה אז $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ערכים עצמיים של T.*

הוכחה:

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = ([T(v_1)]_{\mathcal{B}}, \ldots, [T(v_n)]_{\mathcal{B}}),$$

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_n e_n) = (\lambda_1 [v_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, \lambda_n [v_n]_{\mathcal{B}}),$$

לכן $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ אם ורק אם $[T(v_j)]_{\mathcal{B}} = \lambda_j [v_j]_{\mathcal{B}}$ לכל $1 \leq j \leq n$ אם ורק אם (בגלל שההעתקה $[v]_{\mathcal{B}} \mapsto v$ היא איזומורפיזם) $T(v_j) = \lambda_j v_j$ לכל $1 \leq j \leq n$. מכאן השקילות. הטענה האחרונה של המשפט נובעת מכך ש־$v_1, \ldots, v_n$ שונים מאפס, כי הם אברי בסיס. ∎

מסקנה 9.8: *ל־T יש הצגה אלכסונית אם ורק אם ל־V יש בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של T.*

מסקנה 9.9: *אם יש $P \in \mathrm{M}_n(F)$ הפיכה כך ש־$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, אז עמודותיה $v_1, \dots, v_n$ בסיס של F^n המורכב מוקטורים עצמיים של A, כאשר v_j שייך ל־ λ_j, לכל $1 \leq j \leq n$. להיפך, אם יש בסיס כזה ונגדיר $P = (v_1, \dots, v_n) \in \mathrm{M}_n(F)$, אז $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.*

הוכחה: תהי $P \in \mathrm{M}_n(F)$ הפיכה, ויהיו $v_1, \dots, v_n \in F^n$ עמודותיה. אז $v_1, \dots, v_n$ בלתי תלויים לינארית מעל F, ובפרט בסיס של F^n. מתקיים (לכל $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$)

$$AP = A(v_1, \dots, v_n) = (Av_1, \dots, Av_n),$$

$$P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = P(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n) = (\lambda_1 Pe_1, \dots, \lambda_n Pe_n) = (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n).$$

לכן

$$\begin{aligned} P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \ &\Leftrightarrow \ AP = P(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n) \\ &\Leftrightarrow \ (Av_1, \dots, Av_n) = (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n) \\ &\Leftrightarrow \ Av_j = \lambda_j v_j \text{ לכל } 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

מכאן המסקנה. ∎

משפט 9.10: *יהיו* $v_1,\dots,v_m$ *וקטורים עצמיים של* T **השונים מאפס** *והשייכים לערכים עצמיים* $\lambda_1,\dots,\lambda_m$*, בהתאמה. נניח ש־* $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ *שונים זה מזה. אז* $v_1,\dots,v_m$ *בלתי תלויים לינארית מעל* F.

הוכחה: באינדוקציה על m. עבור $m=1$ זה ברור: $v_1 \neq 0$, לכן v_1 בת"ל. נניח נכונות עבור $m-1$ וקטורים. יהיו $\alpha_1,\dots,\alpha_m \in F$ כך ש־

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{m-1} v_{m-1} + \alpha_m v_m = 0. \tag{1}$$

נפעיל T על שני האגפים ונקבל

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_{m-1} \lambda_{m-1} v_{m-1} + \alpha_m \lambda_m v_m = 0. \tag{2}$$

נכפיל את (1) ב־λ_m ונחסיר אותה מ־(2):

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m) v_1 + \cdots + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) v_{m-1} = 0.$$

לפי הנחת האינדוקציה $v_1,\dots,v_{m-1}$ בלתי תלויים לינארית, לכן, לכל $1 \leq i \leq m-1$, $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_m) = 0$; היות ו־ $\lambda_i - \lambda_m \neq 0$, יוצא $\alpha_i = 0$. אם נציב זאת ב־(1), נקבל $\alpha_m v_m = 0$, ומכאן $\alpha_m = 0$, כי $v_m \neq 0$.

∎

מסקנה 9.11: *יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ערכים עצמיים של T, שונים זה מזה. לכל $1 \le i \le n$ תהי $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ik_i}$ סדרה של וקטורים בלתי תלויים לינארית ב־V_{λ_i}. אזי הסדרה*

$$v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1k_1},\ v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2k_2}\ , \dots,\ v_{n1}, v_{n2}, \dots, v_{nk_n}$$

בלתי תלויה לינארית.

הוכחה : יהיו $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1k_1},\ \alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2k_2},\ \dots,\ \alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \dots, \alpha_{nk_n} \in F$ כך ש־

$$(\alpha_{11}v_{11} + \cdots + \alpha_{1k_1}v_{1k_1}) + \cdots + (\alpha_{n1}v_{n1} + \cdots + \alpha_{nk_n}v_{nk_n}) = 0. \qquad (3)$$

נסמן

$$w_i = \alpha_{i1}v_{i1} + \cdots + \alpha_{ik_i}v_{ik_i}, \qquad i = 1, \dots, n. \qquad (4)$$

אז $w_i \in V_{\lambda_i}$, כי V_{λ_i} תת מרחב של V ו־$v_{i1}, \dots, v_{ik_i} \in V_{\lambda_i}$. את (3) אפשר לרשום כך

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 0. \qquad (3')$$

אם $w_1 = w_2 = \cdots = w_n = 0$ אז לפי (4)

$$\alpha_{i1}v_{i1} + \cdots + \alpha_{ik_i}v_{ik_i} = 0, \qquad i = 1, \dots, n$$

ומכאן $\alpha_{i1} = \cdots = \alpha_{ik_i} = 0$, כי $v_{i1}, \dots, v_{ik_i}$ בלתי תלויים לינארית, ואז סיימנו.

נניח בשלילה ש־$w_1, \dots, w_n$ לא כולם אפס. יהיו $w_{j_1}, \dots, w_{j_m}$ השונים מאפס מתוכם. לפי המשפט הקודם הם בלתי תלויים לינארית. אבל לפי $(3')$

$$1w_{j_1} + \cdots + 1w_{j_m} = 0,$$

סתירה. ∎

דוגמה 9.12: העלאה בחזקה של מטריצה, עם מעריך גדול, היא פעולה נפוצה בשימושים של אלגברה לינארית. נביא כאן דגמה לבעיה המובילה לפעולה כזאת ונצביע על דרך פשוטה של ביצוע הפעולה.

במדינה מסויימת פרצה מגפה. אם ביום מסוים x_0 מתושבי העיר בריאים ו y_0 חולים, אזי למחרת 10% מהבריאים נדבקים במחלה, ואילו 50% מהחולים מבריאים. במלים אחרות, אם נסמן ב־x_n את מספר הבריאים וב־y_n את מספר החולים אחרי n ימים, אז:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.9x_0 + 0.5y_0 \\ y_1 &= 0.1x_0 + 0.5y_0 \end{aligned} \tag{1}$$

נשאלת השאלה, מה יקרה במשך הזמן, האם המגפה תעלם או חס וחלילה יחלו בסופו של דבר כולם במחלה?

כדי לענות על שאלה זו, קודם נרשום את (1) בעזרת מטריצות:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

באשר $A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$. מכאן, באינדוקציה על n,

$$.\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

אילו A היתה אלכסונית, $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, אז את A^n קל לחשב: $A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$. אבל A אינה אלכסונית.

אם נמצא $P \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ כך ש-$D = P^{-1}AP$ אלכסונית, אז $A = PDP^{-1}$ ומכאן

$$A^n = (PDP^{-1})^n = \overbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})}^{n\times} = PD^nP^{-1} \qquad (3)$$

ואת זה קל לחשב.

נמצא P כזאת:

(א) נחשב את הערכים העצמיים של A: כזכור, λ ערך עצמי של A אם ורק אם $\det(A-\lambda I)=0$, כלומר

$$0=\begin{vmatrix} 0.9-\lambda & 0.5 \\ 0.1 & 0.5-\lambda \end{vmatrix}=(0.9-\lambda)(0.5-\lambda)-0.5\cdot 0.1=\lambda^2-1.4\lambda+0.4=(\lambda-1)(\lambda-0.4)$$

לכן ל-A שני ערכים עצמיים, $\lambda_1=1,\ \lambda_2=0.4$.

(ב) נחשב עבור כל אחד מהערכים העצמיים וקטורים עצמיים:

$$A-\lambda_1 I=\begin{pmatrix} 0.9-1 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0.1 & 0.5 \\ 0.1 & -0.5 \end{pmatrix},$$

לכן למערכת $(A-\lambda_1 I)v_1=0$ יש פתרון (יחיד עד כדי כפל בסקלר) $v_1=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$A-\lambda_2 I=\begin{pmatrix} 0.9-0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5-0.4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix},$$

לכן למערכת $(A-\lambda_2 I)v_2=0$ יש פתרון (יחיד עד כדי כפל בסקלר) $v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(ג) לפי משפט 9.10, v_1,v_2 בלתי תלויה לינארית, לכן זהו בסיס של $\mathbb{R}^2$. לכן $P=(v_1,v_2)=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ הפיכה. לפי מסקנה 9.9, $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}=P^{-1}AP$. כמו כן, $P^{-1}=\frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

מכאן, לפי (3),

$$A^n=(PDP^{-1})^n=PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.4)^n \end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}=$$
$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5+(0.4)^n & 5-5(0.4)^n \\ 1-(0.4)^n & 1+(50.4)^n \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{6}x_0+\frac{5}{6}y_0 \\ \frac{1}{6}x_0+\frac{1}{6}y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{6}(x_0+y_0) \\ \frac{1}{6}(x_0+y_0) \end{pmatrix}$$

מסקנה: לאחר זמן רב, שישית מהאוכלוסיה תהיה חולה.

10. אלגוריתם החיפוש של Google – דוגמה לשימוש של אלגברה לינארית

לקוח מתוך

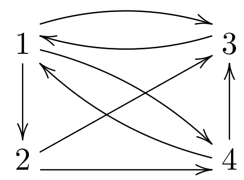
Kurt Bryan, Tanya Leise, *The $25,000,000,000 Eigenvector*, SIAM Review **48** (2006), 569–581.

כאשר מחפשים ביטוי באינטרנט, המחשב מוצא את כל האתרים שמכילים אותו ואז צריך להציג אותם. סוד ההצלחה של מנוע החיפוש של Google הוא בכך שהוא היה הראשון להציג את האתרים לפי *סדר החשיבות* שלהם. אם נניח שחשיבות האתר היא מספר ממשי אי שלילי (גדול יותר, ככל שהאתר חשוב יותר), כיצד לייחס לאתר מספר זה?

חשיבות של אתר תיקבע לפי הַפניות (לינקים) אליו מאתרים אחרים. (כיצד בדיוק – בהמשך.)

נראה את האינטרנט כגרף מכוון: קדקדיו $1,\ldots,n$ הם אתרים. קשתות הם זוגות (i,j) עבור כל הפניה מאתר i לאתר j. חשיבות אתר i תסומן על ידי מספר ממשי $x_i \geq 0$.

דוגמה 10.1:



אתר 1 מפנה לאתרים $2,3,4$;
אתר 2 מפנה לאתרים $3,4$;
אתר 3 מפנה לאתרים 1;
אתר 4 מפנה לאתרים $1,3$.

הגדרה 10.2: ננסה להגדיר x_i. (בכל הגישות מזניחים הַפניות מאתר לעצמו!)

(א) הגדרה פשוטה מאד: x_i= מספר ההַפניות אל i. בדוגמה לעיל, $x_1=2, x_2=1, x_3=3, x_4=2$.

חסרון: הַפניות מכל האתרים שוות ערך; רצוי שהפניה מאתר חשוב ל־i תתרום יותר ל־x_i. נשפר:

(ב) $x_i = \sum_{j\in L_i} x_j$, באשר $L_i \subseteq \{1,\ldots,n\}$ קבוצת האתרים המפנים אל i.

חסרונות: אגף ימין תלוי באגף שמאל; אתר משפיע על ידי יצירת הַפניות לאתרים רבים – לא הוגן. נשפר:

(ג) $x_i = \sum_{j\in L_i} x_j/n_j$, באשר n_j מספר ההַפניות שיוצאות מאתר j (לרשת כולה). אמנם גם כאן אגף ימין תלוי באגף שמאל, אך זוהי בעצם מערכת של n משוואות ב־n נעלמים שאולי אפשר לפתור. בדוגמה לעיל:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_3/1 + x_4/2\\
x_2 &= x_1/3\\
x_3 &= x_1/3 + x_2/2 + x_4/2\\
x_4 &= x_1/3 + x_2/2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_3/1 + x_4/2 \\
x_2 &= x_1/3 \\
x_3 &= x_1/3 + x_2/2 + x_4/2 \\
x_4 &= x_1/3 + x_2/2
\end{aligned}
$$

כלומר, $v = Av$, באשר $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ו־ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

כלומר, $v \in V_1(A)$ הוא וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי $\lambda = 1$.

המשוואה $Av = v$ שקולה למערכת $(A - I_4)v = 0$, אותה אנחנו יודעים לפתור.

החישוב נותן פתרון $v = (12, 4, 9, 6)^t$ יחיד עד כדי כפל בסקלר.

שים לב שאתר 3 חשוב פחות (למרות שיש אליו יותר הַפניות) מאתר 1. מדוע? (בגלל שהוא מַפנה רק לאתר 1 וזה עושה את 1 לחשוב מאד. זה מתבטא במשוואה הראשונה $x_1 = x_3/1 + x_4/2$.)

נכליל מהדוגמה למקרה הכללי:

הגדרה 10.3: (א) **מטריצת הקישוריות** של הרשת היא מטריצה $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ המוגדרת על ידי

$$a_{ij} = \frac{\text{מספר ההפניות מאתר } j \text{ לאתר } i}{\text{מספר ההפניות מאתר } j \text{ לשאר האתרים}}. \tag{1}$$

(ב) **וקטור החשיבות** היא עמודה $v = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, כך ש־$v \neq 0$ וקטור עצמי של A השייך ל־$\lambda = 1$, ו־$x_i \geq 0$ לכל i. נהוג לנרמל אותו כך ש־$\sum_i x_i = 1$.

הערות 10.4: (א) כדי שב־(1) לא נחלק באפס, נניח שמכל אתר יוצאות איזשהן הַפניות.

(ב) כזכור, מזניחים הַפניות מאתר לעצמו. לכן $a_{ii} = 0$ לכל i.

(ג) האם v קיים ויחיד? כלומר: האם $\dim V_1(A) = 1$? ואם כן, האם יש $v \in V_1(A)$ בעל רכיבים אי שליליים?

∎

הגדרה 10.5: מטריצה $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ נקראת

(א) **סטוכסטית לפי עמודות** [סל"ע] אם $a_{ij} \geq 0$ לכל i, j ו־$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ לכל j;

(ב) **סטוכסטית לפי עמודות חיובית** אם $a_{ij} > 0$ לכל i, j ו־$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ לכל j. ∎

תרגיל 10.6: *מטריצת הקישוריות היא סטוכסטית לפי עמודות.*

טענה 10.7: *אם* $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *סטוכסטית לפי עמודות, אז* $V_1(A) \neq 0$*, ובפרט* $\dim V_1(A) \geq 1$.

הוכחה: די להוכיח כי 1 ערך עצמי של A, כלומר, $\det(A - 1 \cdot I) = 0$, כלומר, (למשל) שורות של $A - I$ תלויות לינארית. ואכן, סכום הרכיבים בעמודה ה־j של $A - I$ הוא $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} - 1 = 0$, כלומר, סכום השורות של $A - I$ הוא 0. ∎

האם $\dim V_1(A) \leq 1$? לא בהכרח:

דוגמה 10.8: נניח $A = \mathrm{Diag}(A_1, A_2)$, באשר A_1, A_2 סטוכסטיות לפי עמודות. אז גם A סטוכסטית לפי עמודות. לכן יש $v_i \neq 0$ כך ש־$A_i v_i = v_i$, עבור $i = 1, 2$. אבל אז $\binom{v_1}{0}, \binom{0}{v_2} \in \mathbb{R}^n$ בלתי תלויים לינארית ושניהם וקטורים עצמיים של A השייכים ל־1.

האם יתכן ש־A כזאת תהיה מטריצת קישוריות?

כן, זה קורה כאשר האינטרנט מחולק לשתי רשתות נפרדות שאין הַפניות הדדיות ביניהן. וזה יתכן.

מצד שני, אם A חיובית, זה אינו קורה:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} & \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad v = \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 v_1 \\ A_2 v_2 \end{pmatrix}$$

לכן

$$Av = v \ \Leftrightarrow \ A_1 v_1 = v_1, \ A_2 v_2 = v_2$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

משפט 10.9: *תהי* $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *סטוכסטית לפי עמודות חיובית.*

(א) $\dim V_1(A) = 1$.

(ב) *אם* $0 \neq v \in V_1(A)$ *אז כל רכיביו בעלי אותו סימן (כולם חיוביים או כולם שליליים).*

הוכחה: **(ב)** יהי $0 \neq v = (x_1, \ldots, x_n)^t \in V_1(A)$. אז יש k כך ש־$x_k \neq 0$. בלי הגבלת הכלליות, $x_k > 0$, אחרת נכפיל v ב־(-1). צריך להוכיח כי $x_i > 0$ לכל i. מתוך $v = Av$ נקבל $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, ולכן

$$|x_i| = |\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}x_j| = \sum_{j=1}^n a_{ij}|x_j|$$

לכל i, ויש כאן שוויון אם ורק אם $x_j \geq 0$ לכל j. אבל

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}|x_j| = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n a_{ij})|x_j| = \sum_{j=1}^n |x_j|$$

ולכן במשוואה הקודמת $\leq$ הוא $=$ לכל i, כלומר, $x_j \geq 0$ לכל j. אבל $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq a_{ik}x_k > 0$.

(א) לפי (ב) די להוכיח:

טענה: *יהיו* $u, v \in \mathbb{R}^n$ *בלתי תלויים לינארית. אז יש* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *כך שלוקטור* $\alpha u + \beta v$ *יש רכיבים חיוביים וגם שליליים.*

הוכחה: נסמן $W = \{v \in \mathbb{R}^n | \ \sum_i (v)_i = 0\}$. זהו תת מרחב של $\mathbb{R}^n$. אם $0 \neq w \in W$, אז ל־w יש בהכרח רכיבים חיוביים וגם שליליים. לכן די למצוא $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ כך ש־$0 \neq \alpha u + \beta v \in W$.

אם $u \in W$, נקח $\alpha = 1, \beta = 0$, כי $\alpha u + \beta v = u$.

אחרת יהי β סכום רכיביו של u ו־$-\alpha$ סכום רכיביו של v אז $\beta \neq 0$, לכן $\alpha u + \beta v \neq 0$ ומתקיים

$$\sum_{i=1}^n (\alpha u + \beta v)_i = \sum_{i=1}^n \alpha (u)_i + \beta (v)_i = \alpha \sum_{i=1}^n (u)_i + \beta \sum_{i=1}^n (v)_i = \alpha\beta + \beta(-\alpha) = 0. \quad \blacksquare$$

אמנם מטריצת הקישוריות אינה חיובית (כי באלכסון יש לה אפסים) אך שינוי קטן בה הופך אותה לכזאת:

משפט 10.10: *תהי* $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *סטוכסטית לפי עמודות. תהי* $B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *כך ש־* $b_{ij} = 1/n$ *לכל* i, j *ויהי* $0 < m < 1$*. אז*

(א) B *סטוכסטית לפי עמודות.*

(ב) $M = (1-m)A + mB$ *סטוכסטית לפי עמודות חיובית.*

הוכחה: (א) ברור.

(ב) $(M)_{ij} = (1-m)a_{ij} + m/n \geq m/n > 0$, ואילו

$$\sum_i (M)_{ij} = \sum_i \big((1-m)a_{ij} + m/n\big) = (1-m)\sum_i a_{ij} + n \cdot m/n = (1-m) + m = 1.$$ ∎

כעת נראה איך אפשר לחשב (באופן מקורב) את וקטור החשיבות:

עבור וקטור $v \in \mathbb{R}^n$ נסמן $||v|| = \sum_{i=1}^n |(v)_i|$. אז $||v|| \geq 0$ ומתקיים $||v|| = 0 \iff v = 0$.

למה 10.11: *יהי $n \geq 2$ ותהי $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ מטריצה סטוכסטית לפי עמודות חיובית. נסמן $c := \max_j(1 - 2\min_i a_{ij})$. אז*

(א) $0 \leq c < 1$.

כמו כן, לכל $v \in W$ מתקיים

(ב) $Av \in W$;

(ג) $||Av|| \leq c\,||v||$.

הוכחה: (א) נקבע $1 \leq j \leq n$. אז $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$. אם $a_{kj} = \min_i a_{ij}$, אז

$$0 \leq \sum_{i\neq k} a_{ij} - a_{kj} = 1 - 2a_{kj} = 1 - 2\min_i a_{ij} < 1.$$

מכאן $0 \leq c < 1$.

(ב) $\sum_{i=1}^n (Av)_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(v)_j = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n a_{ij})(v)_j = \sum_{j=1}^n (v)_j = 0$.

(ג) נסמן $w = Av$. אם $w = 0$, הטענה ברורה. לכן נניח כי $w \neq 0$. לפי (ב), $\sum_i (w)_i = 0$. לכן יש k כך ש־$(w)_k > 0$ ויש ℓ כך ש־$(w)_\ell < 0$. יהי $\varepsilon_i = \begin{cases} +1 & (w)_i \geq 0 \\ -1 & (w)_i < 0 \end{cases}$. אז $\varepsilon_k = 1$ ו־$\varepsilon_\ell = -1$. כעת,

$$||w|| = \sum_{i=1}^n |(w)_i| = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot (w)_i = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \sum_{j=1}^n a_{ij}(v)_j = \sum_{j=1}^n \big(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_{ij}\big)(v)_j.$$

נקבע $1 \leq j \leq n$. אז

$$\sum_i \varepsilon_i a_{ij} = \sum_{i\neq \ell} \varepsilon_i a_{ij} - a_{\ell j} \leq \sum_{i\neq\ell} a_{ij} - a_{\ell j} = 1 - 2a_{\ell j} \leq 1 - 2\min_i a_{ij} \leq c,$$

ובאופן דומה

$$\sum_i \varepsilon_i a_{ij} = \sum_{i\neq k} \varepsilon_i a_{ij} + a_{kj} \geq \sum_{i\neq k} -a_{ij} + a_{kj} = -1 + 2a_{kj} \geq -1 + 2\min_i a_{ij} \geq -c.$$

לכן $|\sum_i \varepsilon_i a_{ij}| \leq c$. מכאן

$$||w|| \leq \sum_{j=1}^n \Big|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_{ij}(v)_j\Big| = \sum_{j=1}^n \Big|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_{ij}\Big| \cdot |(v)_j| \leq \sum_{j=1}^n c|(v)_j| =$$
$$= c\sum_j |(v)_j| = c\,||v||. \qquad \blacksquare$$

משפט 10.12: *יהי* $n \geq 2$ *ותהי* $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *מטריצה סטוכסטית לפי עמודות חיובית. יהי* $v \in \mathbb{R}^n$ כך ש־$Av = v$ ו־$\sum_i (v)_i = 1$. *יהי* $v_0 \in \mathbb{R}^n$ כך ש־$\sum_i (v_0)_i = 1$. *אז* $v = \lim_{k\to\infty} A^k v_0$*, כלומר,* $\lim_{k\to\infty} ||A^k v_0 - v|| = 0$.

הוכחה: יהי $w = v_0 - v$. אז $\sum_i (w)_i = \sum_i (v_0)_i - \sum_i (v)_i = 1 - 1 = 0$, לכן $w \in W$. כעת, $A^k v_0 = A^k(w + v) = A^k w + v$ ולכן $A^k v_0 - v = A^k w$. לפי למה 10.11, $||A^k w|| \leq c^k ||w||$, באשר $0 \leq c < 1$, לכן $A^k w \to 0$. מכאן $A^k v_0 \to v$. ∎

תרגיל 1: *האם קיימות העתקות לינאריות* $\mathbb{R}^{10} \xrightarrow{S} \mathbb{R}^{14} \xrightarrow{T} \mathbb{R}^5$ *כך ש־* $T \circ S = 0$, S *חד חד ערכית, ו־* T *על?*

פתרון: אם T על, אז $\dim \operatorname{Im}(T) = 5$ ולכן לפי משפט המימד $\dim \operatorname{Ker}(T) = 14 - 5 = 9$.

אם S חד חד ערכית, אז $\dim \operatorname{Ker}(S) = 0$ ולכן לפי משפט המימיד $\dim \operatorname{Im}(S) = 10 - 0 = 10$.

התנאי $T \circ S = 0$ שקול ל־$\operatorname{Im}(S) \subseteq \operatorname{Ker}(T)$. בפרט הוא גורר $\dim \operatorname{Im}(S) \leq \dim \operatorname{Ker}(T)$, סתירה.

∎

טענה: *תהיינה* $U \xrightarrow{S} V \xrightarrow{T} W$ *העתקות לינאריות. אז* $T \circ S = 0$ *אם ורק אם* $\operatorname{Im}(S) \subseteq \operatorname{Ker}(T)$.

הוכחה: נניח $T \circ S = 0$. יהי $v \in \operatorname{Im}(S)$. אז יש $u \in U$ כך ש־$v = S(u)$. לפי ההנחה, $T(v) = T(S(u)) = (T \circ S)(u) = 0(u) = 0$, לכן $v \in \operatorname{Ker}(T)$. מכאן $\operatorname{Im}(S) \subseteq \operatorname{Ker}(T)$.

להיפך, נניח $\operatorname{Im}(S) \subseteq \operatorname{Ker}(T)$. יהי $u \in U$. אז $S(u) \in \operatorname{Im}(S)$. לכן $S(u) \in \operatorname{Ker}(T)$. מכאן $T(S(u)) = 0$, כלומר, $(T \circ S)(u) = 0$. זה נכון לכל $u \in U$, לכן $T \circ S = 0$. ∎

תרגיל 2: *יהי* V *מרחב וקטורי מעל שדה* F *בעל מימד סופי ויהי* U *תת מרחב שלו. נניח שקיים תת מרחב* W *של* V **יחיד** *כך ש־* $U + W = V$ *ו־* $U \cap W = \{0\}$. *הוכח:* $U = V$ *או* $U = \{0\}$.

פתרון: נניח ש־$V \neq \{0\}, U$. יהיו $r = \dim U$ ו־$n = \dim V$. אז $0 < r < n$. נסמן $s = n - r$, אז $0 < s < n$. יהי $u_1, \ldots, u_r$ בסיס של U ונשלים אותו לבסיס $u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s$ של V. נגדיר $W = \operatorname{Sp}(w_1, \ldots, w_s)$. אז

$$U + W = \operatorname{Sp}(u_1, \ldots, u_r) + \operatorname{Sp}(w_1, \ldots, w_s) = \operatorname{Sp}(u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s) = V$$

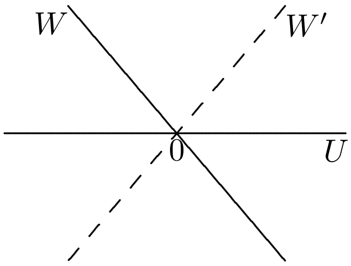
ואילו לפי משפט המימד $\dim U \cap W = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = r + s - n = 0$, לכן $U \cap W = \{0\}$.

נסמן $w_1' = w_1 + u_1$ ונגדיר $W' = \operatorname{Sp}(w_1', w_2, \ldots, w_s)$. אז $W' \neq W$, אחרת $w_1' \in W$, ולכן $u_1 = w_1' - w_1 \in W$, ומכאן $0 \neq u_1 \in U \cap W = \{0\}$, סתירה.

אבל $w_1 = -u_1 + w_1' \in U + W'$ וברור ש־$u_1, \ldots, u_r, w_2, \ldots, w_s \in U + W'$, לכן

$$U + W' \supseteq \operatorname{Sp}(u_1, \ldots, u_r, w_1, w_2, \ldots, w_s) = V$$

כלומר, $U + W' = V$ ולכן $u_1, \ldots, u_r, w_1', w_1, \ldots, w_s$ בסיס של V. לכן, כמו בפסקה הקודמת, $U + W' = V$, $U \cap W' = \{0\}$. זוהי סתירה ליחידות W. ∎



תרגיל 3: *תהיינה* $U \xrightarrow{S} V \xrightarrow{T} W$ *העתקות לינאריות. הוכח*

(א) $T \circ S$ *חד חד ערכית אם ורק אם* S *חד חד ערכית ו־*$\operatorname{Im} S \cap \operatorname{Ker} T = \{0\}$.

פתרון: (א) נניח ש־$T \circ S$ חד חד ערכית. אז $\operatorname{Ker}(T \circ S) = \{0\}$.

נראה ש־$\operatorname{Ker} S = \{0\}$ ולכן S חד חד ערכית: יהי $u \in \operatorname{Ker} S$. אז $(T \circ S)(u) = T(S(u)) = T(0) = 0$, לכן $u \in \operatorname{Ker}(T \circ S) = \{0\}$, כלומר, $u = 0$.

נראה ש־$\operatorname{Im} S \cap \operatorname{Ker} T = \{0\}$. יהי $v \in \operatorname{Im} S \cap \operatorname{Ker} T$. אז $T(v) = 0$ ויש $u \in U$ כך ש־$v = S(u)$. לכן $(T \circ S)(u) = T(v) = 0$, כלומר, $u \in \operatorname{Ker}(T \circ S)$, ולכן $u = 0$. מכאן $v = S(u) = 0$.

להיפך, נניח ש־S חד חד ערכית ו־$\operatorname{Im} S \cap \operatorname{Ker} T = \{0\}$. נראה ש־$\operatorname{Ker}(T \circ S) = \{0\}$ ולכן $T \circ S$ חד חד ערכית: יהי $u \in \operatorname{Ker}(T \circ S)$. אז $T(S(u)) = 0$, לכן $S(u) \in \operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} S$, ומכאן $S(u) = 0$. כיוון ש־S חד חד ערכית, $u = 0$.

(ב) נניח ש־$T \circ S$ על.

נראה ש־T על: יהי $w \in W$. כיוון ש־$T \circ S$ על, יש $u \in U$ כך ש־$w = (T \circ S)(u)$, כלומר, T מעתיקה את $S(u)$ על w.

נראה ש־$V = \operatorname{Im} S + \operatorname{Ker} T$: יהי $v \in V$. אז $T(v) \in W$ ולכן יש $u \in U$ כך ש־$T(v) = (T \circ S)(u)$. אז $T(v - S(u)) = T(v) - T(S(u)) = 0$, כלומר, $v - S(u) \in \operatorname{Ker} T$. אם כך, $v = S(u) + (v - S(u))$, באשר $v - S(u) \in \operatorname{Ker} T$ ו־$S(u) \in \operatorname{Im} S$. לכן $v \in \operatorname{Im} S \cap \operatorname{Ker} T$.

להיפך נניח ש־T על ו־$V = \operatorname{Im} S + \operatorname{Ker} T$ ונראה ש־$T \circ S$ על: יהי $w \in W$. אז יש $v \in V$ כך ש־$w = T(v)$. לפי ההנחה $v = v_1 + v_2$, באשר $v_2 \in \operatorname{Ker} T$ ו־$v_1 \in \operatorname{Im} S$. יש $u \in U$ כך ש־$v_1 = S(u)$. אז $(T \circ S)(u) = T(S(u)) = T(v_1) = T(v - v_2) = T(v) - T(v_2) = w - 0 = w$. ∎

תרגיל 4: *תהי* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$ *שכל רכיביה הם* ± 1. *הוכח ש־*$\det(A)$ *הוא מספר שלם שמתחלק ב־*2^{n-1}.

פתרון: לפי נוסחת החישוב של הדטרמיננטה בעזרת התמורות $\det(A)$ הוא מספר שלם. כדי לחשב אותו, נוסיף את השורה האחרונה ל־$(n-1)$ השורות שמתחתיה; פעולות אלמנטריות אלה אינן משנות את הדטרמיננטה.

אז כל רכיב בשורות $2,\dots,n$ יהיה $\pm1+\pm1\in\{-2,0,+2\}$. בפרט, הוא כפולה שלמה של 2. לכן $\det(A)=2^{n-1}\det(A')$, באשר A' המטריצה המתקבלת מ־A על ידי חלוקת השורות האלה ב־2. אז כל רכיבי A' הם שלמים ולכן $\det(A')$ מספר שלם. ∎

תרגיל 5: *מצא את כל המטריצות $A\in\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ שעבורן מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $AX=0$ הוא $\mathrm{Sp}\big((1,2,3)^t\big)$.*

פתרון: נסמן $U=\mathrm{Sp}\big((1,2,3)^t\big)$; אז $\dim U=1$. יהי P מרחב הפתרונות של $AX=0$. אז $P=U$ אם ורק אם אז $U\supseteq P$ ו־$\dim P=1$. זה שקול ל־ $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=0$ ו־$\operatorname{rk}A=2$.

התנאי הראשון שקול לכך שכל שורה (a,b,c) של A מקיימת $1a+2b+3c=0$, כלומר, $a=-2b-3c$.

לכן $P=U$ אם ורק אם (א) $A=\begin{pmatrix}-2b_1-3c_1 & b_1 & c_1\\ -2b_2-3c_2 & b_2 & c_2\\ -2b_3-3c_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}$ וגם (ב) $\operatorname{rk}(A)=2$.

אם A כמו ב־(א) אז העמודה הראשונה שלה היא צירוף לינארי של שתי העמודות האחרות, לכן דרגתה (שהינה המימד של מרחב העמודות) היא 2 אם ורק אם

(ב') העמודות $\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ בלתי תלויות לינארית. ∎

תרגיל 6: *יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ותהי $T\colon V\to V$ העתקה לינארית. יהי $v\in V$ ונניח שיש $r\geq 0$ כך ש־$T^r(v)=0$. נניח ש־$r\geq 0$ הוא הקטן ביותר ש־$T^r(v)=0$. הוכח: $T^0(v)=v,T(v),T^2(v),\dots,T^{r-1}(v)$ בלתי תלויים לינארית.*

פתרון: יהיו $a_0,\dots,a_{r-1}\in F$ כך שמתקיים

$$a_0v+a_1T(v)+a_2T^2(v)+\cdots+a_{r-1}T^{r-1}(v)=0. \tag{1}$$

נפעיל T^{r-1} על שני האגפים:

$$a_0T^{r-1}(v)+a_1T^r(v)+a_2T^{r+1}(v)+\cdots+a_{r-1}T^{2r-2}(v)=0.$$

בגלל ש־$T^r(v)=T^{r+1}(v)=T^{r+2}(v)=\cdots=0$, נקבל $a_0T^{r-1}(v)=0$. כיוון ש־$T^{r-1}(v)\neq 0$, נקבל $a_0=0$. כעת נפעיל T^{r-2} על (1):

$$a_0T^{r-2}(v)+a_1T^{r-1}(v)+a_2T^r(v)+\cdots+a_{r-1}T^{2r-3}(v)=0.$$

נקבל $a_1T^{r-1}(v)=0$, ולכן, כמו קודם, $a_1=0$. כך, באינדוקציה, נקבל שכל המקדמים הם אפס. ∎

תרגיל 7: *יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F בעל מימד סופי n ותהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית. יהי $k \geq n$. הוכח:* $\operatorname{Ker} T^k \cap \operatorname{Im} T^k = \{0\}$.

פתרון: כל איבר ב־$\operatorname{Im} T^k$ הוא מהצורה $T^k(v)$ עבור איזה $v \in V$. הוא ב־$\operatorname{Ker} T^k$ אם ורק אם $T^{2k}(v) = T^k(T^k(v)) = 0$. לכן צריך להוכיח: אם $v \in V$ כך ש־$T^{2k}(v) = 0$ אז $T^k(v) = 0$. לשם כך די להוכיח: אם $v \in V$ ויש $r \geq 0$ כך ש־$T^r(v) = 0$ (כאן $T^0 = 1_V$) ו־r הוא הקטן ביותר כזה, אז $r \leq n$.

לפי התרגיל הקודם $T^0(v) = v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{r-1}(v)$ סדרה בלתי תלויה לינארית בת r איברים. לכן $r \leq \dim V = n$. ∎

תרגיל 8: *יהי $F = \mathbb{Z}_{11}$ השדה בן 11 האיברים ויהי U תת מרחב של F^{10} בן 11^6 איברים. הוכח שקיימת מטריצה מדורגת קנונית יחידה $A \in \mathrm{M}_{7\times 10}(F)$ כך ש־U הוא מרחב הפתרונות של המערכת $AX = 0$.*

פתרון: יהי $d = \dim U$. אז U איזומורפי ל־F^d, ולכן $|U| = |F^d| = |F|^d = 11^d$. אבל $|U| = 11^6$ ולכן $d = 6$.

למדנו שיש מערכת משוואות לינאריות הומוגניות כך ש־U מרחב הפתרונות שלה. לכן יש $A \in \mathrm{M}_{m\times 10}(F)$ כך ש־U הוא מרחב הפתרונות של המערכת $AX = 0$. בלי הגבלת הכלליות A מדורגת קנונית, אחרת נחליף אותה במטריצה המדורגת קנונית שלה.

לפי משפט המימד, $\dim U = 10 - \operatorname{rk} A$, לכן $\operatorname{rk} A = 10 - d = 4$, כלומר, ב־$A$ יש בדיוק 4 שורות שונות מאפס.

נוכל להוסיף או להשמיט שורות אפסים, ולכן בלי הגבלת הכלליות $m = 7$ (ויש ב־A בדיוק 3 שורות אפסים).

אם $A' \in \mathrm{M}_{7\times 10}(F)$ מדורגת קנונית כך ש־U הוא מרחב הפתרונות של המערכת $A'X = 0$, אז U הוא המאפס (במרחב הדואלי) של $R(A), R(A')$, ולכ $R(A), R(A')$ הם המאפסים של U, ובפרט $R(A) = R(A')$. מכאן $A = A'$. ∎

תרגיל 9: *יהי F שדה סופי בן q איברים. כמה תת מרחבים בעלי מימד 2 יש בתוך F^4.*

פתרון א: כל תת מרחב U בעל מימד 2 יש לו בסיס בן 2 איברים; אם נרשום אותם כשורות שלמטריצה A אז $A \in \mathrm{M}_{2\times 4}(F)$, $\operatorname{rk} A = 2$ ו־$U = R(A)$. אבל $R(A) = R(A')$, באשר A' המטריצה המדורגת קנונית של A. לכן בלי הגבלת הכלליות A מדורגת קנונית. אם $B \in \mathrm{M}_{2\times 4}(F)$ גם מדורגת קנונית אז $U = R(B)$ אם ורק אם $B = A$. לכן המספר המבוקש הוא מספר המטריצות המדורגות קנונית $A \in \mathrm{M}_{2\times 4}(F)$ כך ש־$\operatorname{rk} A = 2$.

במטריצות האלה יש שתי עמודות מובילות, לכן הן מהסוגים הבאים, כולם שונים זה מזה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כאשר $*$ מסמן איבר כלשהו מבין q האיברים של F. לכן מספר המטריצות האלה הוא $q^4+q^3+2q^2+q+1$.

∎

פתרון ב: כל תת מרחב בעל מימד 2 נוצר על ידי בסיס, כלומר, סדרה בלתי תלויה לינארית v_1, v_2 בת שני איברים. נספור תחילה כל הסדרות האלה.

סדרה v_1, v_2 ב־V היא בלתי תלויה לינארית אם ורק אם $v_1 \neq 0$ ו־v_2 אינו כפולה של v_1. כעת, ב־V יש q^4 איברים, לכן יש בו q^4-1 איברים v_1 שונים מאפס; לכל v_1 כזה יש בדיוק q כפולות ב־V, לכן יש q^4-q איברים v_2 שאינם כפולה של v_1. מכאן שיש $(q^4-1)(q^4-q)$ סדרות כאלה.

אבל כל שתי סדרות באותו תת מרחב בעל מימד 2 יוצרות אותו, כלומר, יוצרות אותו תת מרחב, אפילו אם הן שונות. בדומה לחישוב בפסקה הקודמת, בכל תת מרחב בעל מימד 2 יש בדיוק $(q^2-1)(q^2-q)$ סדרות כאלה.

לכן מספר התת מרחבים המבוקש הוא

$$\frac{(q^4-1)(q^4-q)}{(q^2-1)(q^2-q)} = (q^2+1)\frac{q^3-1}{q-1} = (q^2+1)(q^2+q+1) = q^4+q^3+2q^2+q+1. \quad ∎$$

תרגיל 10: *עבור איזה* $x, \in \mathbb{R}$ *מתקיים* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ y & x & xy & xy \\ 1 & x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$*?*

פתרון: נחסיר את השורה הראשונה מהשנייה ומהרביעית, ונחסיר אותה y פעמים מהשלישית. נקבל $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x & x \\ x-1 & x-1 & 1-x & 0 \\ 0 & x-y & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & y-x & 1-x \end{vmatrix}$. נוציא $x-1$ מהשורה השניה ונפתח לפי השורה השלישית נקבל $(x-1)(y-x)\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & y-x & 1-x \end{vmatrix}$. בדטרמיננטה זו נחסיר את השורה הראשונה מהשניה ונקבל $(x-1)(y-x)\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 0 & -1-x & -1-x \\ 0 & y-x & 1-x \end{vmatrix}$. בדטרמיננטה זו נוציא $x+1$ מהשורה השניה ונפתח אותה לפי העמודה הראשונה ונקבל $(x-1)(y-x)(x+1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ y-x & 1-x \end{vmatrix} = (x-1)(y-x)(x+1)(y-1)$.

∎

תרגיל 11: *הוכח:* $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$ *עבור* $n \geq 2$.

פתרון: באינדוקציה על n עבור $n=2$ זה ברור. נניח נכונות עבור $n-1$ ונתבונן בדטרמיננטה באגף שמאל.

נוסיף את הכפולה ב־$-x_n$ של העמודה ה־$(n-1)$ לעמודה ה־n, אחר כך

נוסיף את הכפולה ב־$-x_n$ של העמודה ה־$(n-2)$ לעמודה ה־$(n-1)$, וכן, הלאה, עד אשר

ונחסיר אותה y פעמים מהשלישית. נקבל

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1-x_n & x_1^2-x_nx_1 & \cdots & x_1^{n-1}-x_nx_1^{n-2} \\ 1 & x_2-x_n & x_2^2-x_nx_2 & \cdots & x_2^{n-1}-x_nx_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1}-x_n & x_{n-1}^2-x_nx_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1}-x_nx_{n-1}^{n-2} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

נפתח את הדטרמיננטה לפי העמודה האחרונה. נקבל

$$(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} x_1-x_n & x_1^2-x_nx_1 & \cdots & x_1^{n-1}-x_nx_1^{n-2} \\ x_2-x_n & x_2^2-x_nx_2 & \cdots & x_2^{n-1}-x_nx_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n-1}-x_n & x_{n-1}^2-x_nx_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1}-x_nx_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

נוציא x_1-x_n מהשורה הראשונה, x_2-x_n מהשורה השניה, $\ldots$, ואת $x_{n-1}-x_n$ מהשורה הלפני אחרונה ונפתח לפי השורה האחרונה. נקבל

$$(-1)^{n+1}(x_1-x_n)\cdots(x_{n-1}-x_n)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

לפי הנחת האינדוקציה הדטרמיננטה בביטוי זה היא $\prod_{i<j<n}(x_j-x_i)$ ומה שעומד לפניה הוא

$$(-1)^{n+1}\prod_{i<n}(x_i-x_n)=(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}\prod_{i<n}(x_n-x_i)=\prod_{i<j=n}(x_j-x_i)$$

לכן כל הביטוי הוא $\prod_{i<j}(x_j-x_i)$. ∎

תרגיל 12: *תהי* $A\in\mathrm{M}_{m\times n}(F)$. *יהי* $1\le d\le m,n$. *מטריצה* $B\in\mathrm{M}_d(F)$ *תיקרא* ***תת־מטריצה של*** A *אם היא נוצרת מ־A על ידי מחיקת שורות ועמודות אחדות של A.*

הוכח: $\operatorname{rk}A=\max\{d|$ *ל־A יש תת־מטריצה* $B\in\mathrm{M}_d(F)$ *כך ש־* $|B|\neq 0\}$.

תרגיל 12: *תהי* $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$*. הוכח:* $\mathrm{rk}\, A = \{$*ל־*A*יש תת־מטריצה* $B \in \mathrm{M}_d(F)$ *כך ש־*$0 \neq |B|$ $|d\}\max$.

פתרון: די להוכיח: $\mathrm{rk}(A) \geq d$ אם ורק אם ל־A יש תת־מטריצה $B \in \mathrm{M}_d(F)$ כך ש־$|B| \neq 0$.

נניח $r := \mathrm{rk}(A) \geq d$. אז $\dim C(A) = r$ ולכן יש ב־A r עמודות בלתי תלויות לינארית (בסיס של $C(A)$). נבחר מתוכן d עמודות; הן בלתי תלויות לינארית. בלי הגבלת הכלליות אלה כל העמודות של A, כלומר, $n = d$, אחרת נשמיט את יתר העמודות.

כעת $\dim R(A) = d$ ולכן יש ב־A d שורות בלתי תלויות לינארית (בסיס של $R(A)$). בלי הגבלת הכלליות אלה כל השורות של A, כלומר, $m = d$, אחרת נשמיט את יתר השורות. אז $A \in \mathrm{M}_d(F)$ ו־$\mathrm{rk}\, A = d$, לכן $|A| \neq 0$. נגדיר $B = A$.

להיפך, נניח של־A יש תת־מטריצה $B \in \mathrm{M}_d(F)$ כך ש־$|B| \neq 0$. נניח ש־B נוצר משורות $i_1, \dots, i_d$ ועמודות $j_1, \dots, j_d$ של A. תהיינה $v_1, \dots, v_n \in F^m$ כל עמודות של A ותהיינה $v'_1, \dots, v'_n \in F^d$ העמודות שמתקבלות מהן על ידי לקיחת השורות $i_1, \dots, i_d$ והשמטת יתר השורות. אז $B = (v'_{j_1}, \dots, v'_{j_d})$. כיוון ש־$|B| \neq 0$, העמודות של B בלתי תלויות לינארית. מכאן נובע שגם העמודות $v_{j_1}, \dots, v_{j_d}$ של A בלתי תלויות לינארית (ראה הפסקה הבאה) ולכן $\mathrm{rk}(A) = \dim C(A) \geq d$.

אכן, יהיו $a_1, \dots, a_d \in F$ כך ש־$\sum_{i=1}^d a_i v_{ji} = 0$ אז גם $\sum_{i=1}^d a_i v'_{ji} = 0$. כיוון ש־$v'_{j_1}, \dots, v'_{j_d}$ בלתי תלויות לינארית, מתקיים $a_1 = \cdots = a_d = 0$. ∎

תרגיל 13: *תהיינה* $C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *הפיכות ותהי* $A = (C|D) \in \mathrm{M}_{n\times(2n)}(\mathbb{R})$*. יהי* $1 \leq p \leq n$ *ותהי* $A' \in \mathrm{M}_{p\times(2n)}(\mathbb{R})$ *המטריצה המתקבלת מ־*A *על ידי לקיחת* p *השורות הראשונות שלה. הוכח שב־*A' *יש לפחות* $2p$ *עמודות שונות מאפס.*

פתרון: מתקיים $A' = (C'|D')$ באשר C', D' מתקבלות מ־C, D, בהתאמה, על ידי לקיחת p השורות הראשונות שלהן. מתקיים $\mathrm{rk}(C) = \mathrm{rk}(D) = n$, לכן השורות של C, D בלתי תלויות לינארית, ולכן גם השורות של C', D' בלתי תלויות לינארית, ומכאן $\mathrm{rk}(C') = \mathrm{rk}(D') = p$. לכן p עמודות של C', D' בלתי תלויות לינארית ובפרט הן שונות מאפס. ∎

תרגיל 14: *תהיינה* $C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *הפיכות ותהי* $A = (C|D) \in \mathrm{M}_{n\times(2n)}(\mathbb{R})$*. הוכח: במטריצה* A' *שמתקבלת על ידי לקיחת* q *עמודות כלשהן של* A *הדרגה היא* $\geq \frac{q}{2}$.

פתרון: תהיינה $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n$ העמודות של A. נבחר q מתוכן. אז לפחות $\frac{1}{2}q$ מהן הן מתוך $v_1, \dots, v_n$ או מתוך $w_1, \dots, w_n$. עמודות אלה הן בלתי תלויות לינארית ∎

תרגיל 15: *יהי* F *שדה סופי. הוכח שמספר האיברים בו הוא חזקה של מספר ראשוני.*

פתרון: יהי $p = \mathrm{char}\, F$. כיוון ש־F סופי, $p > 0$. אכן, F קבוצה סופית, לכן האיברים הבאים של F

$$1_F = 1, 2_F = 1 + 1, 3_F = 1 + 1 + 1, \dots$$

לא יכולים להיות כולם שונים זה מזה. לכן יש $k < \ell$ כך ש־$k_F = \ell_F$ ומכאן $(\ell - k)_F = \ell_F - k_F = 0$. במלים אחרות, יש $n > 0$ כך ש־$n_F = 0$. כזכור, n כזה קטן ביותר מוגדר כ־$\mathrm{char}\, F$. בפרט, $\mathrm{char}\, F > 0$.

אם $p = \mathrm{char}\, F > 0$, אז p ראשוני.

יהי $F_0 = \{k_F |\ k \in \mathbb{Z}\}$ השדה הראשוני של F. אז (ניתן לזהות את F_0 עם $\mathbb{Z}_p$) מתקיים $|F_0| = p$.

F הוא מרחב וקטורי מעל F_0. כיוון ש F קבוצה סופית, F נוצר סופית; יהי $d = \dim_{F_0} F$. אז F איזומורפי ל־F_0^d ובפרט $|F| = |F_0^d| = p^d$. ∎

הערה: בקורס אלגברה ב2 לומדים שלכל חזקה p^d של ראשוני p קיים שדה בעל אפיון p בן p^d איברים.

תרגיל 16: *יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$. תהיינה $T, S\colon V \to \mathbb{R}$ שתי העתקות לינאריות שונות מאפס. נניח שלכל $v \in V$ מתקיים: אם $T(v) \geq 0$ אז $S(v) \geq 0$. הוכח: יש $c \in \mathbb{R}$ כך ש־$T = cS$ ו־$c > 0$.*

פתרון: אם יש $c \in \mathbb{R}$ כך ש־$T = cS$ אז בהכרח $c > 0$.

אכן, $T \neq 0$, לכן יש $v \in V$ כך ש־$T(v) \neq 0$. בלי הגבלת הכלליות $T(v) > 0$, אחרת נחליף את v ב־$-v$. לפי ההנחה $S(v) \geq 0$. אבל $0 < T(v) = cS(v)$, לכן $c > 0$.

נניח בשלילה שאין $c \in \mathbb{R}$ כך ש־$T = cS$. אז S, T בלתי תלויות לינארית. נשלים אותן לבסיס $\varphi_1 = S, \varphi_2 = T, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ של V^*. יהי $v_1, v_2, \ldots, v_n$ הבסיס הדואלי שלו ־ בסיס של V. אז

$$S(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = a_1, \qquad T(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = a_2.$$

בפרט

$$S(-v_1 + v_2) = -1, \qquad T(-v_1 + v_2) = 1,$$

סתירה להנחה. ∎

תרגיל 17: *יהי* V *מרחב וקטורי בעל מימד* n *מעל שדה* F *ותהי* $T\colon V \to V$ *העתקה לינארית המקיימת* $T \circ T = 0$.
הוכיחו: $\dim \operatorname{Ker}(T) \geq \frac{n}{2}$.

תרגיל 17: *יהי* V *מרחב וקטורי בעל מימד* n *מעל שדה* F *ותהי* $T\colon V\to V$ *העתקה לינארית המקיימת* $T\circ T=0$.
הוכיחו: $\dim\operatorname{Ker}(T)\geq\frac{n}{2}$.

פתרון: **לפי משפט סילבסטר** $\dim\operatorname{Ker}(T\circ T)\leq 2\dim\operatorname{Ker}(T)$, **לכן** $\dim\operatorname{Ker}(T)\geq\frac{1}{2}\dim\operatorname{Ker}(T\circ T)$.
אבל $\operatorname{Ker}(T\circ T)=V$, **לכן** $\dim\operatorname{Ker}(T\circ T)=n$. **מכאן הטענה.** ∎

תרגיל 18: *יהי V מרחב וקטורי בעל מימד n מעל שדה F ותהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית.*

(א) *הוכיחו: אם $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Im}(T)$ אז n זוגי.*

(ב) *מצאו דוגמה ל־ T, עבור $n = 4$, בה $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Im}(T)$*

(ג) *נניח כי $T \circ T = T$. הוכיחו: $V = \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$.*

פתרון: (א) יהי $r = \dim \operatorname{Ker}(T)$. לפי משפט המימד, $\dim \operatorname{Im}(T) = n - r$. לפי הנתון, $r = n - r$, לכן $n = 2r$ זוגי.

(ב) $V = F^4$, ותהי T נתונה (באופן יחיד) על ידי

$$T(e_1) = T(e_2) = 0, T(e_3) = e_1, T(e_4) = e_2$$

נסמן $U = \operatorname{Sp}(e_1, e_2)$. אז $\dim U = 2$.

ברור ש־$U \subseteq \operatorname{Ker}(T)$ ו־$U \subseteq \operatorname{Im}(T)$, ובפרט

$2 = \dim U \leq \dim \operatorname{Ker}(T)$ ו־$2 = \dim U \leq \dim \operatorname{Im}(T)$.

אם אחת מההכלות האלה לא היתה שוויון, אז האי שוויון המתאים לה היה אי שוויון חזק ולכן

$4 = \dim V = \dim \operatorname{Ker}(T) + \dim \operatorname{Im}(T) > 2 + 2$, סתירה. לכן $U = \operatorname{Ker}(T)$ ו־$U = \operatorname{Im}(T)$.

(ג) נוכיח תחילה כי $\operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Im}(T) = \{0\}$. יהי $v \in \operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Im}(T)$. אז יש $u \in V$ כך ש־$v = T(u)$ ו־$T(v) = 0$. אבל $T(v) = T(T(u)) = (T \circ T)(u) = T(u) = v$. לכן $v = 0$. מכאן $\operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Im}(T) = \{0\}$.

לפי משפטי המימד $\dim \operatorname{Ker}(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = \dim V$ ו־

$$\dim(\operatorname{Ker}(T) + \operatorname{Im}(T)) = \dim \operatorname{Ker}(T) + \dim \operatorname{Im}(T) - \dim(\operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Im}(T)) = \dim V$$

לכן $\operatorname{Ker}(T) + \operatorname{Im}(T) = V$. זה, יחד עם הפסקה הראשונה, נותן $V = \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$. ∎

תרגיל 19: *יהי F שדה ותהי $A \in \mathrm{M}_n(F)$ מטריצה. נניח $n \geq 2$. יהי $V = \{B \in \mathrm{M}_n(F) |\ AB = BA\}$ תת מרחב של $\mathrm{M}_n(F)$. הוכיחו: $\dim V \geq 2$.*

פתרון: אם $A = \alpha I_n$ עבור איזה $\alpha \in F$, אז $V = \mathrm{M}_n(F)$ ולכן $\dim V = n^2 > 2$.

אם A אינה כפולה של I_n, אז A, I_n בלתי תלויות לינארית, ושתיהן ב־V, לכן $\dim V \geq 2$. ∎

תרגיל 20: *יהי F שדה ותהי $A \in \mathrm{M}_n(F)$ מטריצה. הוכיחו: $AB = BA$ לכל $B \in \mathrm{M}_n(F)$ אם ורק אם A מטריצה* ***סקלרית***, *כלומר, $A = \alpha I_n$ עבור אידה $\alpha \in F$.*

פתרון: אם $A = \alpha I_n$ עבור אידה $\alpha \in F$, אז $AB = BA$ לכל $B \in \mathrm{M}_n(F)$.

להיפך, נניח כי $AB = BA$ לכל $B \in \mathrm{M}_n(F)$. לכל $1 \leq p, q \leq n$ תהי $E_{pq} \in \mathrm{M}_n(F)$ מוגדרת על יד $(E_{pq})_{ij} = \delta_{pi}\delta_{qj}$ (כלומר, כל הרכיבים של E_{pq} הם אפס, פרט לרכיב (p,q) שהינו 1). מתקיים

$$(AE_{pq})_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}(E_{pq})_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}\delta_{pk}\delta_{qj} = (A)_{ip}\delta_{jq} = \begin{cases} (A)_{ip} & j = q \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$
$$(E_{pq}A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(E_{pq})_{ik}(A)_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\delta_{pi}\delta_{qk}(A)_{kj} = \delta_{pi}(A)_{qj} = \begin{cases} (A)_{qj} & i = p \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

שני הביטויים באגפים הימניים שווים, לכל p, q, i, j. לכן אם נבחר $q = j = 1$, אז $(A)_{ip} = \begin{cases} (A)_{11} & i = p \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ זה אומר שמחוץ לאלכסון הראשי ב־A יש רק אפסים ובאלכסון הראשי כל האיברים שווים ל־$(A)_{11}$. לכן $A = \alpha I_n$ עבור $\alpha = (A)_{11}$. ∎

תרגילים

תרגיל 1: *האם קיימות העתקות ליניאריות* $\mathbb{R}^5 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^{14} \xrightarrow{S} \mathbb{R}^{10}$ *כך ש־* $T \circ S = 0$*,* S *חד חד ערכית, ו־* T *על?*

תרגיל 1: *האם קיימות העתקות לינאריות* $\mathbb{R}^{10} \xrightarrow{S} \mathbb{R}^{14} \xrightarrow{T} \mathbb{R}^5$ *כך ש־*$T \circ S = 0$*,* S *חד חד ערכית, ו־*T *על?*

פתרון: אם T על, אז $\dim \operatorname{Im}(T) = 5$ ולכן לפי משפט המימד $\dim \operatorname{Ker}(T) = 14 - 5 = 9$.

אם S חד חד ערכית, אז $\dim \operatorname{Ker}(S) = 0$ ולכן לפי משפט המימיד $\dim \operatorname{Im}(S) = 10 - 0 = 10$.

התנאי $T \circ S = 0$ שקול ל־$\operatorname{Im}(S) \subseteq \operatorname{Ker}(T)$. בפרט הוא גורר $\dim \operatorname{Im}(S) \leq \dim \operatorname{Ker}(T)$, סתירה.

∎

טענה: *תהיינה* $U \xrightarrow{S} V \xrightarrow{T} W$ *העתקות לינאריות. אז* $T \circ S = 0$ *אם ורק אם* $\operatorname{Im}(S) \subseteq \operatorname{Ker}(T)$.

הוכחה: נניח $T \circ S = 0$. יהי $v \in \operatorname{Im}(S)$. אז יש $u \in U$ כך ש־$S(u) = v$. לפי ההנחה, $T(v) = T(S(u)) = (T \circ S)(u) = 0(u) = 0$, לכן $v \in \operatorname{Ker}(T)$. מכאן $\operatorname{Im}(S) \subseteq \operatorname{Ker}(T)$.

להיפך, נניח $\operatorname{Im}(S) \subseteq \operatorname{Ker}(T)$. יהי $u \in U$. אז $S(u) \in \operatorname{Im}(S)$. לכן $S(u) \in \operatorname{Ker}(T)$. מכאן $T(S(u)) = 0$, כלומר, $(T \circ S)(u) = 0$. זה נכון לכל $u \in U$, לכן $T \circ S = 0$. ∎

תרגיל 2: *יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F בעל מימד סופי ויהי U תת מרחב שלו. נניח שקיים תת מרחב W של V* **יחיד** *כך ש־ $V = U + W$ ו־ $U \cap W = \{0\}$. הוכח: $U = V$ או $U = \{0\}$.*

תרגיל 2: *יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F בעל מימד סופי ויהי U תת מרחב שלו. נניח שקיים תת מרחב W של V* **יחיד** *כך ש־ $V = U + W$ ו־ $U \cap W = \{0\}$. הוכח: $U = V$ או $U = \{0\}$.*

פתרון: נניח ש־ $V, U \neq \{0\}$. יהיו $r = \dim U$ ו־ $n = \dim V$. אז $0 < r < n$. נסמן $s = n - r$, אז $0 < s < n$. יהי $u_1, \ldots, u_r$ בסיס של U ונשלים אותו לבסיס $u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s$ של V. נגדיר $W = \mathrm{Sp}(w_1, \ldots, w_s)$. אז

$$U + W = \mathrm{Sp}(u_1, \ldots, u_r) + \mathrm{Sp}(w_1, \ldots, w_s) = \mathrm{Sp}(u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s) = V$$

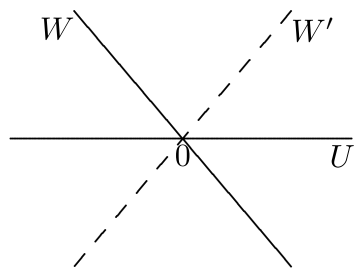
ואילו לפי משפט המימד $\dim U \cap W = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = r + s - n = 0$, לכן $U \cap W = \{0\}$.

נסמן $w_1' = w_1 + u_1$ ונגדיר $W' = \mathrm{Sp}(w_1', w_2, \ldots, w_s)$. אז $W' \neq W$, אחרת $w_1' \in W$, ולכן $u_1 = w_1' - w_1 \in W$, ומכאן $0 \neq u_1 \in U \cap W = \{0\}$, סתירה.

אבל $w_1 = -u_1 + w_1' \in U + W'$ וברור ש־ $u_1, \ldots, u_r, w_2, \ldots, w_s \in U + W'$, לכן

$$U + W' \supseteq \mathrm{Sp}(u_1, \ldots, u_r, w_1, w_2, \ldots, w_s) = V$$

כלומר, $U + W' = V$ ולכן $u_1, \ldots, u_r, w_1', w_1, \ldots, w_s$ בסיס של V. לכן, כמו בפסקה הקודמת, $U + W' = V$, $U \cap W' = \{0\}$. זוהי סתירה ליחידות W. ∎



תרגיל 3: תהיינה $U \xrightarrow{S} V \xrightarrow{T} W$ העתקות ליניאריות. הוכח

(א) $T \circ S$ חד חד ערכית אם ורק אם S חד חד ערכית ו־ $\operatorname{Im} S \cap \operatorname{Ker} T = \{0\}$.

(ב) $T \circ S$ על אם ורק אם T על ו־ $\operatorname{Im} S + \operatorname{Ker} T = V$.

תרגיל 3: *תהיינה* $U \xrightarrow{S} V \xrightarrow{T} W$ *העתקות ליניאריות. הוכח*

(א) $T \circ S$ *חד חד ערכית אם ורק אם* S *חד חד ערכית ו־* $\operatorname{Im} S \cap \operatorname{Ker} T = \{0\}$.

פתרון: (א) נניח ש־$T \circ S$ חד חד ערכית. אז $\operatorname{Ker}(T \circ S) = \{0\}$.

נראה ש־$\operatorname{Ker} S = \{0\}$ ולכן S חד חד ערכית: יהי $u \in \operatorname{Ker} S$. אז $(T \circ S)(u) = T(S(u)) = T(0) = 0$, לכן $u \in \operatorname{Ker}(T \circ S) = \{0\}$, כלומר, $u = 0$.

נראה ש־$\operatorname{Im} S \cap \operatorname{Ker} T = \{0\}$. יהי $v \in \operatorname{Im} S \cap \operatorname{Ker} T$. אז $T(v) = 0$ ויש $u \in U$ כך ש־$S(u) = v$. לכן $(T \circ S)(u) = T(v) = 0$, כלומר, $u \in \operatorname{Ker}(T \circ S)$, ולכן $u = 0$. מכאן $v = S(u) = 0$.

להיפך, נניח ש־S חד חד ערכית ו־$\operatorname{Im} S \cap \operatorname{Ker} T = \{0\}$. נראה ש־$\operatorname{Ker}(T \circ S) = \{0\}$ ולכן $T \circ S$ חד חד ערכית: יהי $u \in \operatorname{Ker}(T \circ S)$. אז $T(S(u)) = 0$, לכן $S(u) \in \operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} S$, ומכאן $S(u) = 0$. כיוון ש־S חד חד ערכית, $u = 0$. ∎

תרגיל 3: *תהיינה $U \xrightarrow{S} V \xrightarrow{T} W$ העתקות ליניאריות. הוכח*

(ב) *$T \circ S$ על אם ורק אם T על ו־$\operatorname{Im} S + \operatorname{Ker} T = V$.*

(ב) נניח ש־$T \circ S$ על.

נראה ש־T על: יהי $w \in W$. כיוון ש־$T \circ S$ על, יש $u \in U$ כך ש־$w = (T \circ S)(u)$, כלומר, T מעתיקה את $S(u)$ על w.

נראה ש־$V = \operatorname{Im} S + \operatorname{Ker} T$: יהי $v \in V$. אז $T(v) \in W$ ולכן יש $u \in U$ כך ש־$T(v) = (T \circ S)(u)$. אז $T(v - S(u)) = T(v) - T(S(u)) = 0$, כלומר, $v - S(u) \in \operatorname{Ker} T$. אם כך, $v = S(u) + (v - S(u))$, באשר $v - S(u) \in \operatorname{Ker} T$ ו־$S(u) \in \operatorname{Im} S$. לכן $v \in \operatorname{Im} S \cap \operatorname{Ker} T$.

להיפך נניח ש־T על ו־$V = \operatorname{Im} S + \operatorname{Ker} T$ ונראה ש־$T \circ S$ על: יהי $w \in W$. אז יש $v \in V$ כך ש־$w = T(v)$. לפי ההנחה $v = v_1 + v_2$, באשר $v_2 \in \operatorname{Ker} T$ ו־$v_1 \in \operatorname{Im} S$. יש $u \in U$ כך ש־$v_1 = S(u)$.

אז $w = w - 0 = T(v) - T(v_2) = T(v - v_2) = T(v_1) = T(S(u)) = (T \circ S)(u)$. ∎

תרגיל 4: *תהי* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$ *שכל רכיביה הם* ± 1. *הוכח ש־* $\det(A)$ *הוא מספר שלם שמתחלק ב־* 2^{n-1}.

תרגיל 4: *תהי* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$ *שכל רכיביה הם* ± 1*. הוכח ש-* $\det(A)$ *הוא מספר שלם שמתחלק ב-* 2^{n-1}.

פתרון: לפי נוסחת החישוב של הדטרמיננטה בעזרת התמורות $\det(A)$ הוא מספר שלם. כדי לחשב אותו, נוסיף את השורה האחרונה ל-$(n-1)$ השורות שמתחתיה; פעולות אלמנטריות אלה אינן משנות את הדטרמיננטה. אז כל רכיב בשורות $2,\dots,n$ יהיה $\{-2,0,+2\} \in \pm 1 + \pm 1$. בפרט, הוא כפולה שלמה של 2. לכן $\det(A) = 2^{n-1}\det(A')$, באשר A' המטריצה המתקבלת מ-A על ידי חלוקת השורות האלה ב-2. אז כל רכיבי A' הם שלמים ולכן $\det(A')$ מספר שלם. ∎

תרגיל 5: *מצא את כל המטריצות* $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ *שעבורן מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית* $AX = 0$ *הוא* $\mathrm{Sp}\big((1,2,3)^t\big)$.

תרגיל 5: *מצא את כל המטריצות* $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ *שעבורן מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית* $AX = 0$ *הוא* $\mathrm{Sp}\big((1,2,3)^t\big)$.

פתרון: נסמן $U = \mathrm{Sp}\big((1,2,3)^t\big)$; אז $\dim U = 1$. יהי P מרחב הפתרונות של $AX = 0$. אז $P = U$ אם ורק אם אז $U \supseteq P$ ו־$\dim P = 1$. זה שקול ל־ $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 0$ ו־$\mathrm{rk}\, A = 2$.

התנאי הראשון שקול לכך שכל שורה (a,b,c) של A מקיימת $1a + 2b + 3c = 0$, כלומר, $a = -2b - 3c$.

לכן $P = U$ אם ורק אם (א) $A = \begin{pmatrix} -2b_1 - 3c_1 & b_1 & c_1 \\ -2b_2 - 3c_2 & b_2 & c_2 \\ -2b_3 - 3c_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ וגם (ב) $\mathrm{rk}(A) = 2$.

אם A כמו ב־(א) אז העמודה הראשונה שלה היא צירוף לינארי של שתי העמודות האחרות, לכן דרגתה (שהינה המימד של מרחב העמודות) היא 2 אם ורק אם

(ב') העמודות $\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ בלתי תלויות לינארית. ∎

תרגיל 6: *יהי* V *מרחב וקטורי מעל שדה* F *ותהי* $T\colon V \to V$ *העתקה לינארית. נסמן*

$$T^2 = T \circ T, T^3 = T \circ T \circ T, \ldots$$

וכן $T^0 = 1_V, T^1 = T$.

יהי $v \in V$ *ונניח שיש* $r \geq 0$ *כך ש־*$T^r(v) = 0$*. נניח ש־*$r \geq 0$ *הוא הקטן ביותר ש־*$T^r(v) = 0$*. הוכח:* $T^0(v) = v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{r-1}(v)$ בלתי תלויים לינארית.

תרגיל 6: *יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ותהי $T\colon V\to V$ העתקה לינארית. יהי $v\in V$ ונניח שיש $r\geq 0$ כך ש־ $T^r(v)=0$. נניח ש־$r\geq 0$ הוא הקטן ביותר ש־$T^r(v)=0$. הוכח: $T^0(v)=v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{r-1}(v)$ בלתי תלויים לינארית.*

פתרון: יהיו $a_0,\ldots,a_{r-1}\in F$ כך שמתקיים

$$a_0v+a_1T(v)+a_2T^2(v)+\cdots+a_{r-1}T^{r-1}(v)=0. \tag{1}$$

נפעיל T^{r-1} על שני האגפים:

$$a_0T^{r-1}(v)+a_1T^r(v)+a_2T^{r+1}(v)+\cdots+a_{r-1}T^{2r-2}(v)=0.$$

בגלל ש־$T^r(v)=T^{r+1}(v)=T^{r+2}(v)=\cdots=0$, נקבל $a_0T^{r-1}(v)=0$. כיוון ש־$T^{r-1}(v)\neq 0$, נקבל $a_0=0$. כעת נפעיל T^{r-2} על (1):

$$a_0T^{r-2}(v)+a_1T^{r-1}(v)+a_2T^r(v)+\cdots+a_{r-1}T^{2r-3}(v)=0.$$

נקבל $a_1T^{r-1}(v)=0$, ולכן, כמו קודם, $a_1=0$. כך, באינדוקציה, נקבל שכל המקדמים הם אפס. ∎

תרגיל 7: *יהי* V *מרחב וקטורי מעל שדה* F *בעל מימד סופי* n *ותהי* $T\colon V \to V$ *העתקה לינארית. יהי* $k \geq n$. *הוכח:* $\operatorname{Ker} T^k \cap \operatorname{Im} T^k = \{0\}$.

תרגיל 7: *יהי* V *מרחב וקטורי מעל שדה* F *בעל מימד סופי* n *ותהי* $T\colon V \to V$ *העתקה לינארית. יהי* $n \geq k$. *הוכח:* $\operatorname{Ker} T^k \cap \operatorname{Im} T^k = \{0\}$.

פתרון: כל איבר ב־$\operatorname{Im} T^k$ הוא מהצורה $T^k(v)$ עבור איזה $v \in V$. הוא ב־$\operatorname{Ker} T^k$ אם ורק אם $T^{2k}(v) = T^k(T^k(v)) = 0$. לכן צריך להוכיח: אם $v \in V$ כך ש־$T^{2k}(v) = 0$ אז $T^k(v) = 0$. לשם כך די להוכיח: אם $v \in V$ ויש $r \geq 0$ כך ש־$T^r(v) = 0$ (כאן $T^0 = 1_V$) ו־r הוא הקטן ביותר כזה, אז $r \leq n$.

לפי התרגיל הקודם $T^0(v) = v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{r-1}(v)$ סדרה בלתי תלוייה לינארית בת r איברים. לכן $r \leq \dim V = n$. ∎

תרגיל 8: *יהי $F = \mathbb{Z}_{11}$ השדה בן 11 האיברים ויהי U תת מרחב של F^{10} בן 11^6 איברים. הוכח שקיימת מטריצה מדורגת קנונית יחידה $A \in \mathrm{M}_{7\times 10}(F)$ כך ש־ U הוא מרחב הפתרונות של המערכת $AX = 0$.*

תרגיל 8: *יהי $F=\mathbb{Z}_{11}$ השדה בן 11 האיברים ויהי U תת מרחב של F^{10} בן 11^6 איברים. הוכח שקיימת מטריצה מדורגת קנונית יחידה $A \in \mathrm{M}_{7\times 10}(F)$ כך ש־U הוא מרחב הפתרונות של המערכת $AX=0$.*

פתרון: יהי $d=\dim U$. אז U איזומורפי ל־F^d, ולכן $|U|=|F^d|=|F|^d=11^d$. אבל $|U|=11^6$ ולכן $d=6$.

למדנו שיש מערכת משוואות לינאריות הומוגניות כך ש־U מרחב הפתרונות שלה. לכן יש $A \in \mathrm{M}_{m\times 10}(F)$ כך ש־U הוא מרחב הפתרונות של המערכת $AX=0$. בלי הגבלת הכלליות A מדורגת קנונית, אחרת נחליף אותה במטריצה המדורגת קנונית שלה.

לפי משפט המימד, $\dim U = 10 - \operatorname{rk} A$, לכן $\operatorname{rk} A = 10-d=4$, כלומר, ב־$A$ יש בדיוק 4 שורות שונות מאפס.

נוכל להוסיף או להשמיט שורות אפסים, ולכן בלי הגבלת הכלליות $m=7$ (ויש ב־A בדיוק 3 שורות אפסים). אם $A' \in \mathrm{M}_{7\times 10}(F)$ מדורגת קנונית כך ש־U הוא מרחב הפתרונות של המערכת $A'X=0$, אז U הוא המאפס (במרחב הדואלי) של $R(A), R(A')$, ולכ $R(A), R(A')$ הם המאפסים של U, ובפרט $R(A)=R(A')$. מכאן $A=A'$. ∎

תרגיל 9: *יהי F שדה סופי בן q איברים. כמה תת מרחבים בעלי מימד 2 יש בתוך F^4.*

תרגיל 9: *יהי F שדה סופי בן q איברים. כמה תת מרחבים בעלי מימד 2 יש בתוך F^4.*

פתרון א: כל תת מרחב U בעל מימד 2 יש לו בסיס בן 2 איברים; אם נרשום אותם כשורות שלמטריצה A אז $A \in \mathrm{M}_{2\times 4}(F)$, $\mathrm{rk}\, A = 2$ ו־$U = R(A)$. אבל $R(A) = R(A')$, באשר A' המטריצה המדורגת קנונית של A. לכן בלי הגבלת הכלליות A מדורגת קנונית. אם $B \in \mathrm{M}_{2\times 4}(F)$ גם מדורגת קנונית אז $U = R(B)$ אם ורק אם $B = A$. לכן המספר המבוקש הוא מספר המטריצות המדורגות קנונית $A \in \mathrm{M}_{2\times 4}(F)$ כך ש־$\mathrm{rk}\, A = 2$.

במטריצות האלה יש שתי עמודות מובילות, לכן הן מהסוגים הבאים, כולם שונים זה מזה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כאשר $*$ מסמן איבר כלשהו מבין q האיברים של F. לכן מספר המטריצות האלה הוא $q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 1$.

∎

תרגיל 9: *יהי F שדה סופי בן q איברים. כמה תת מרחבים בעלי מימד 2 יש בתוך F^4.*

פתרון ב: כל תת מרחב בעל מימד 2 נוצר על ידי בסיס, כלומר, סדרה בלתי תלויה לינארית v_1, v_2 בת שני איברים. נספור תחילה כל הסדרות האלה.

סדרה v_1, v_2 ב־V היא בלתי תלויה לינארית אם ורק אם $v_1 \neq 0$ ו־v_2 אינו כפולה של v_1. כעת, ב־V יש q^4 איברים, לכן יש בו $q^4 - 1$ איברים v_1 שונים מאפס; לכל v_1 כזה יש בדיוק q כפולות ב־V, לכן יש $q^4 - q$ איברים v_2 שאינם כפולה של v_1. מכאן שיש $(q^4 - 1)(q^4 - q)$ סדרות כאלה.

אבל כל שתי סדרות באותו תת מרחב בעל מימד 2 יוצרות אותו, כלומר, יוצרות אותו תת מרחב, אפילו אם הן שונות. בדומה לחישוב בפסקה הקודמת, בכל תת מרחב בעל מימד 2 יש בדיוק $(q^2 - 1)(q^2 - q)$ סדרות כאלה.

לכן מספר התת מרחבים המבוקש הוא

$$\frac{(q^4-1)(q^4-q)}{(q^2-1)(q^2-q)} = (q^2+1)\frac{q^3-1}{q-1} = (q^2+1)(q^2+q+1) = q^4+q^3+2q^2+q+1. \quad \blacksquare$$

תרגיל 10: עבור איזה $x, \in \mathbb{R}$ מתקיים $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ y & x & xy & xy \\ 1 & x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$?

תרגיל 10: *עבור איזה* $x, \in \mathbb{R}$ *מתקיים* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ y & x & xy & xy \\ 1 & x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$?

פתרון: **נחסיר את השורה הראשונה מהשנייה ומהרביעית, ונחסיר אותה y פעמים מהשלישית. נקבל** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x & x \\ x-1 & x-1 & 1-x & 0 \\ 0 & x-y & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & y-x & 1-x \end{vmatrix}$. **נוציא $x-1$ מהשורה השניה ונפתח לפי השורה השלישית נקבל** $(x-1)(y-x)\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & y-x & 1-x \end{vmatrix}$. **בדטרמיננטה זו נחסיר את השורה הראשונה מהשניה ונקבל** $(x-1)(y-x)\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 0 & -1-x & -1-x \\ 0 & y-x & 1-x \end{vmatrix}$. **בדטרמיננטה זו נוציא $x+1$ מהשורה השניה ונפתח אותה לפי העמודה הראשונה ונקבל** $(x-1)(y-x)(x+1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ y-x & 1-x \end{vmatrix} = (x-1)(y-x)(x+1)(y-1)$.

∎

תרגיל 11: *הוכח:* $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$ עבור $n \geq 2$.

תרגיל 11: *הוכח:* $\prod_{i<j}(x_j - x_i) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ עבור $n \geq 2$.

פתרון: באינדוקציה על n עבור $n = 2$ זה ברור. נניח נכונות עבור $n - 1$ ונתבונן בדטרמיננטה באגף שמאל.

נוסיף את הכפולה ב־$-x_n$ של העמודה ה־$(n-1)$ לעמודה ה־n, אחר כך

נוסיף את הכפולה ב־$-x_n$ של העמודה ה־$(n-2)$ לעמודה ה־$(n-1)$, וכן, הלאה, עד אשר

ונחסיר אותה y פעמים מהשלישית. נקבל

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & x_1^2 - x_n x_1 & \cdots & x_1^{n-1} - x_n x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 - x_n & x_2^2 - x_n x_2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_n x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} - x_n & x_{n-1}^2 - x_n x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} - x_n x_{n-1}^{n-2} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

נפתח את הדטרמיננטה לפי העמודה האחרונה. נקבל

$$(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x_1 - x_n & x_1^2 - x_n x_1 & \cdots & x_1^{n-1} - x_n x_1^{n-2} \\ x_2 - x_n & x_2^2 - x_n x_2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_n x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n-1} - x_n & x_{n-1}^2 - x_n x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} - x_n x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

נוציא $x_1 - x_n$ מהשורה הראשונה, $x_2 - x_n$ מהשורה השניה, ..., ואת $x_{n-1} - x_n$ מהשורה הלפני אחרונה ונפתח לפי השורה האחרונה. נקבל

$$(-1)^{n+1}(x_1 - x_n)\cdots(x_{n-1} - x_n) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

לפי הנחת האינדוקציה הדטרמיננטה בביטוי זה היא $\prod_{i<j<n}(x_j - x_i)$ ומה שעומד לפניה הוא

$$(-1)^{n+1} \prod_{i<n}(x_i - x_n) = (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} \prod_{i<n}(x_n - x_i) = \prod_{i<j=n}(x_j - x_i)$$

לכן כל הביטוי הוא $\prod_{i<j}(x_j - x_i)$. ∎

תרגיל 12: *תהי* $A \in \mathrm{M}_{m \times n}(F)$. *יהי* $1 \leq d \leq m, n$. *מטריצה* $B \in \mathrm{M}_d(F)$ *תיקרא* **תת־מטריצה של** A *אם היא נוצרת מ־*A *על ידי מחיקת שורות ועמודות אחדות של* A.

הוכח: $\mathrm{rk}\, A = \max\{d \mid$ *ל־*A *יש תת־מטריצה* $B \in \mathrm{M}_d(F)$ *כך ש־*$|B| \neq 0\}$.

תרגיל 12: *תהי* $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$. *הוכח:* $\mathrm{rk}\, A = \{$*ל־*A*יש תת־מטריצה* $B \in \mathrm{M}_d(F)$ *כך ש־*$0 \neq |B| \; d|\}\max$.

פתרון: די להוכיח: $d \geq \mathrm{rk}(A)$ אם ורק אם ל־A יש תת־מטריצה $B \in \mathrm{M}_d(F)$ כך ש־$|B| \neq 0$.

נניח $r := \mathrm{rk}(A) \geq d$. אז $\dim C(A) = r$ ולכן יש ב־A r עמודות בלתי תלויות לינארית (בסיס של $C(A)$). נבחר מתוכן d עמודות; הן בלתי תלויות לינארית. בלי הגבלת הכלליות אלה כל העמודות של A, כלומר, $n = d$, אחרת נשמיט את יתר העמודות.

כעת $\dim R(A) = d$ ולכן יש ב־A d שורות בלתי תלויות לינארית (בסיס של $R(A)$). בלי הגבלת הכלליות אלה כל השורות של A, כלומר, $m = d$, אחרת נשמיט את יתר השורות. אז $A \in \mathrm{M}_d(F)$ ו־$\mathrm{rk}\, A = d$, לכן $|A| \neq 0$. נגדיר $B = A$.

להיפך, נניח של־A יש תת־מטריצה $B \in \mathrm{M}_d(F)$ כך ש־$|B| \neq 0$. נניח ש־B נוצר משורות $i_1, \dots, i_d$ ועמודות $i_j, \dots, j_d$ של A. תהיינה $v_1, \dots, v_n \in F^m$ כל עמודות של A ותהיינה $v'_1, \dots, v'_n \in F^d$ העמודות שמתקבלות מהן על ידי לקיחת השורות $i_1, \dots, i_d$ והשמטת יתר השורות. אז $B = (v'_{j_1}, \dots, v'_{j_d})$. כיוון ש־$|B| \neq 0$, העמודות של B בלתי תלויות לינארית. מכאן נובע שגם העמודות $v_{j_1}, \dots, v_{j_d}$ של A בלתי תלויות לינארית (ראה הפסקה הבאה) ולכן $\mathrm{rk}(A) = \dim C(A) \geq d$.

אכן, יהיו $a_1, \dots, a_d \in F$ כך ש־$\sum_{i=1}^d a_i v_{ji} = 0$ אז גם $\sum_{i=1}^d a_i v'_{ji} = 0$. כיוון ש־$v'_{j_1}, \dots, v'_{j_d}$ בלתי תלויות לינארית, מתקיים $a_1 = \cdots = a_d = 0$. ∎

תרגיל 13: *תהיינה* $C,D\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *הפיכות ותהי* $A=(C|D)\in \mathrm{M}_{n\times(2n)}(\mathbb{R})$. *יהי* $1\leq p\leq n$ *ותהי* $A'\in \mathrm{M}_{p\times(2n)}(\mathbb{R})$ *המטריצה המתקבלת מ־*A *על ידי לקיחת* p *השורות הראשונות שלה. הוכח שב־*A' *יש לפחות* $2p$ *עמודות שונות מאפס.*

תרגיל 13: *תהיינה $C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ הפיכות ותהי $A = (C|D) \in \mathrm{M}_{n\times(2n)}(\mathbb{R})$. יהי $1 \le p \le n$ ותהי $A' \in \mathrm{M}_{p\times(2n)}(\mathbb{R})$ המטריצה המתקבלת מ־A על ידי לקיחת p השורות הראשונות שלה. הוכח שב־A' יש לפחות $2p$ עמודות שונות מאפס.*

פתרון: מתקיים $A' = (C'|D')$ באשר C', D' מתקבלות מ־C, D, בהתאמה, על ידי לקיחת p השורות הראשונות שלהן. מתקיים $\mathrm{rk}(C) = \mathrm{rk}(D) = n$, לכן השורות של C, D בלתי תלויות לינארית, ולכן גם השורות של C', D' בלתי תלויות לינארית, ומכאן $\mathrm{rk}(C') = \mathrm{rk}(D') = p$. לכן p עמודות של C', D' בלתי תלויות לינארית ובפרט הן שונות מאפס. ∎

תרגיל 14: *תהיינה* $C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *הפיכות ותהי* $A = (C|D) \in \mathrm{M}_{n\times(2n)}(\mathbb{R})$. *הוכח: במטריצה* A' *שמתקבלת על ידי לקיחת* q *עמודות כלשהן של* A *הדרגה היא* $\leq \frac{q}{2}$.

תרגיל 14: *תהיינה* $C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *הפיכות ותהי* $A = (C|D) \in \mathrm{M}_{n\times(2n)}(\mathbb{R})$. *הוכח: במטריצה* A' *שמתקבלת על ידי לקיחת* q *עמודות כלשהן של* A *הדרגה היא* $\leq \frac{q}{2}$.

פתרון: תהיינה $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n$ העמודות של A. נבחר q מתוכן. אז לפחות $\frac{1}{2}q$ מהן הן מתוך $v_1, \ldots, v_n$ או מתוך $w_1, \ldots, w_n$. עמודות אלה הן בלתי תלויות לינארית ∎

תרגיל 15: *יהי F שדה סופי. הוכח שמספר האיברים בו הוא חזקה של מספר ראשוני.*

תרגיל 15: *יהי F שדה סופי. הוכח שמספר האיברים בו הוא חזקה של מספר ראשוני.*

פתרון: יהי $p = \operatorname{char} F$. כיוון ש־$F$ סופי, $p > 0$. אכן, F קבוצה סופית, לכן האיברים הבאים של F

$$1_F = 1, 2_F = 1+1, 3_F = 1+1+1, \ldots$$

לא יכולים להיות כולם שונים זה מזה. לכן יש $k < \ell$ כך ש־$k_F = \ell_F$ ומכאן $(\ell - k)_F = \ell_F - k_F = 0$. במלים אחרות, יש $n > 0$ כך ש־$n_F = 0$. כזכור, n כזה קטן ביותר מוגדר כ־$\operatorname{char} F$. בפרט, $\operatorname{char} F > 0$.

אם $p = \operatorname{char} F > 0$, אז p ראשוני.

יהי $F_0 = \{k_F | \ k \in \mathbb{Z}\}$ השדה הראשוני של F. אז (ניתן לזהות את F_0 עם $\mathbb{Z}_p$) מתקיים $|F_0| = p$.

F הוא מרחב וקטורי מעל F_0. כיוון ש F קבוצה סופית, F נוצר סופית; יהי $d = \dim_{F_0} F$. אז F איזומורפי ל־F_0^d ובפרט $|F| = |F_0^d| = p^d$. ∎

הערה: בקורס אלגברה ב2 לומדים שלכל חזקה p^d של ראשוני p קיים שדה בעל אפיון p בן p^d איברים.

תרגיל 16: *יהי* V *מרחב וקטורי נוצר סופית מעל* $\mathbb{R}$. *תהיינה* $T, S\colon V \to \mathbb{R}$ *שתי העתקות ליניאריות שונות מאפס. נניח שלכל* $v \in V$ *מתקיים: אם* $T(v) \geq 0$ *אז* $S(v) \geq 0$. *הוכח: יש* $c \in \mathbb{R}$ *כך ש-* $T = cS$ *ו-* $c > 0$.

תרגיל 16: *יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$. תהיינה $T, S\colon V \to \mathbb{R}$ שתי העתקות לינאריות שונות מאפס. נניח שלכל $v \in V$ מתקיים: אם $T(v) \geq 0$ אז $S(v) \geq 0$. הוכח: יש $c \in \mathbb{R}$ כך ש־$T = cS$ ו־$c > 0$.*

פתרון: אם יש $c \in \mathbb{R}$ כך ש־$T = cS$ אז בהכרח $c > 0$.

אכן, $T \neq 0$, לכן יש $v \in V$ כך ש־$T(v) \neq 0$. בלי הגבלת הכלליות $T(v) > 0$, אחרת נחליף את v ב־$-v$. לפי ההנחה $S(v) \geq 0$. אבל $0 < T(v) = cS(v)$, לכן $c > 0$.

נניח בשלילה שאין $c \in \mathbb{R}$ כך ש־$T = cS$. אז S, T בלתי תלויות לינארית. נשלים אותן לבסיס $\varphi_1 = S, \varphi_2 = T, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ של V^*. יהי $v_1, v_2, \ldots, v_n$ הבסיס הדואלי שלו ־ בסיס של V. אז

$$S(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = a_1, \qquad T(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = a_2.$$

בפרט

$$S(-v_1 + v_2) = -1, \qquad T(-v_1 + v_2) = 1,$$

סתירה להנחה. ∎

תרגיל 17: *יהי* V *מרחב וקטורי בעל מימד* n *מעל שדה* F *ותהי* $T\colon V \to V$ *העתקה לינארית המקיימת* $T \circ T = 0$.
הוכיחו: $\dim \operatorname{Ker}(T) \geq \frac{n}{2}$.

תרגיל 17: *יהי* V *מרחב וקטורי בעל מימד* n *מעל שדה* F *ותהי* $T\colon V\to V$ *העתקה לינארית המקיימת* $T\circ T=0$.
הוכיחו: $\dim\operatorname{Ker}(T)\geq\frac{n}{2}$.

פתרון: **לפי משפט סילבסטר** $\dim\operatorname{Ker}(T\circ T)\leq 2\dim\operatorname{Ker}(T)$, **לכן** $\dim\operatorname{Ker}(T)\geq\frac{1}{2}\dim\operatorname{Ker}(T\circ T)$.
אבל $\operatorname{Ker}(T\circ T)=V$, **לכן** $\dim\operatorname{Ker}(T\circ T)=n$. **מכאן הטענה.** ∎

תרגיל 18: *יהי* V *מרחב וקטורי בעל מימד* n *מעל שדה* F *ותהי* $T\colon V \to V$ *העתקה לינארית.*

(א) *הוכיחו: אם* $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$ *אז* n *זוגי.*

(ב) *מצאו דוגמה ל־* T*, עבור* $n = 4$*, בה* $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$

(ג) *נניח כי* $T \circ T = T$*. הוכיחו:* $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$*.*

תרגיל 18: *יהי V מרחב וקטורי בעל מימד n מעל שדה F ותהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית.*

(א) *הוכיחו: אם $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$ אז n זוגי.*

(ב) *מצאו דוגמה ל־T, עבור $n = 4$, בה $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$*

(ג) *נניח כי $T \circ T = T$. הוכיחו: $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.*

פתרון: (א) יהי $r = \dim \mathrm{Ker}(T)$. לפי משפט המימד, $\dim \mathrm{Im}(T) = n - r$. לפי הנתון, $r = n - r$, לכן $n = 2r$ זוגי.

(ב) $V = F^4$, ותהי T נתונה (באופן יחיד) על ידי

$$T(e_1) = T(e_2) = 0, T(e_3) = e_1, T(e_4) = e_2$$

נסמן $U = \mathrm{Sp}(e_1, e_2)$. אז $\dim U = 2$.

ברור ש־$U \subseteq \mathrm{Ker}(T)$ ו־$U \subseteq \mathrm{Im}(T)$, ובפרט

$2 = \dim U \leq \dim \mathrm{Ker}(T)$ ו־$2 = \dim U \leq \dim \mathrm{Im}(T)$.

אם אחת מההכלות האלה לא היתה שוויון, אז האי שוויון המתאים לה היה אי שוויון חזק ולכן

$2 + 2 < \dim \mathrm{Im}(T) + \dim \mathrm{Ker}(T) = \dim V = 4$, סתירה. לכן $U = \mathrm{Ker}(T)$ ו־$U = \mathrm{Im}(T)$.

(ג) נוכיח תחילה כי $\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0\}$. יהי $v \in \mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T)$. אז יש $u \in V$ כך ש־$v = T(u)$ ו־$T(v) = 0$. אבל $T(v) = T(T(u)) = (T \circ T)(u) = T(u) = v$. לכן $v = 0$. מכאן $\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0\}$.

לפי משפטי המימד $\dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = \dim V$ ו־

$$\dim(\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T)) = \dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) - \dim(\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T)) = \dim V$$

לכן $\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T) = V$. זה, יחד עם הפסקה הראשונה, נותן $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$. ∎

תרגיל 19: *יהי* F *שדה ותהי* $A \in \mathrm{M}_n(F)$ *מטריצה. נניח* $n \geq 2$*. יהי* $V = \{B \in \mathrm{M}_n(F) |\ AB = BA\}$ *תת מרחב של* $\mathrm{M}_n(F)$*. הוכיחו:* $\dim V \geq 2$.

תרגיל 19: *יהי F שדה ותהי $A \in \mathrm{M}_n(F)$ מטריצה. נניח $n \geq 2$. יהי $V = \{B \in \mathrm{M}_n(F) |\ AB = BA\}$ תת מרחב של $\mathrm{M}_n(F)$. הוכיחו: $\dim V \geq 2$.*

פתרון: אם $A = \alpha I_n$ עבור איזה $\alpha \in F$, אז $V = \mathrm{M}_n(F)$ ולכן $\dim V = n^2 > 2$.

אם A אינה כפולה של I_n, אז A, I_n בלתי תלויות לינארית, ושתיהן ב־V, לכן $\dim V \geq 2$. ∎

תרגיל 20: *יהי* F *שדה ותהי* $A \in \mathrm{M}_n(F)$ *מטריצה. הוכיחו:* $AB = BA$ *לכל* $B \in \mathrm{M}_n(F)$ אם ורק אם A *מטריצה* **סקלרית**, *כלומר,* $A = \alpha I_n$ עבור *אידה* $\alpha \in F$.

תרגיל 20: *יהי* F *שדה ותהי* $A \in \mathrm{M}_n(F)$ *מטריצה. הוכיחו:* $AB = BA$ *לכל* $B \in \mathrm{M}_n(F)$ *אם ורק אם* A *מטריצה* **סקלרית**, *כלומר,* $A = \alpha I_n$ *עבור אידה* $F \ni \alpha$.

פתרון: אם $A = \alpha I_n$ עבור אידה $\alpha \in F$, אז $AB = BA$ לכל $B \in \mathrm{M}_n(F)$.

להיפך, נניח כי $AB = BA$ לכל $B \in \mathrm{M}_n(F)$. לכל $1 \le p, q \le n$ תהי $E_{pq} \in \mathrm{M}_n(F)$ מוגדרת על יד $(E_{pq})_{ij} = \delta_{pi}\delta_{qj}$ (כלומר, כל הרכיבים של E_{pq} הם אפס, פרט לרכיב (p,q) שהינו 1). מתקיים

$$(AE_{pq})_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}(E_{pq})_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}\delta_{pk}\delta_{qj} = (A)_{ip}\delta_{jq} = \begin{cases} (A)_{ip} & j = q \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$
$$(E_{pq}A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(E_{pq})_{ik}(A)_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\delta_{pi}\delta_{qk}(A)_{kj} = \delta_{pi}(A)_{qj} = \begin{cases} (A)_{qj} & i = p \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

שני הביטויים באגפים הימניים שווים, לכל p,q,i,j. לכן אם נבחר $q = j = 1$, אז $(A)_{ip} = \begin{cases} (A)_{11} & i = p \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ זה אומר שמחוץ לאלכסון הראשי ב־A יש רק אפסם ובאלכסון הראשי כל האיברים שווים ל־$(A)_{11}$. לכן $A = \alpha I_n$ עבור $\alpha = (A)_{11}$. ∎