



0366.1111.04

מבחן באלגברה לינארית 1

י"ח בשבט, תשס"ז

6 בפברואר 2007

לתלמידי פרופ' דן הרן

מועד א'

משך המבחן: 3.5 שעות.

אין להשתמש במחשבוניס ובכל חומר עזר, פרט ל-3 דפי עזר.
לפניך 5 שאלות; ערך כל תשובה נכונה 22 נקודות; ציוןך יהיה המינימום בין 100 וסך הניקוד על התשובות.
יש לכתוב את התשובות רק בטופס המצורף – לא במחברת!

שאלה 1: עבור איזה $a \in \mathbb{R}$ למערכת הבאה

$$\begin{aligned} -2X_1 + X_2 + X_3 &= -a \\ X_1 + 2aX_2 + X_3 &= 1 \\ X_1 + X_2 + 2aX_3 &= 1 \end{aligned}$$

אין פתרון? נמקו!

פתרון

המטריצה המורחבת של המערכת היא

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -a \\ 1 & 2a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2a & 1 \end{pmatrix}$$

נחליף את השורה האחרונה עם שתי השורות שלפניה, אח"כ נוסיף אותה פעמיים לשורה השניה ונחסיר אותה מהשורה שלישית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2a & 1 \\ 0 & 3 & 1+4a & 2-a \\ 0 & 2a-1 & 1-2a & 0 \end{pmatrix}$$

נניח $2a-1 \neq 0$ ונחלק את השורה שלישית ב- $2a-1$, ואחר כך נוסיף כפולות מתאימות של השורה השלישית לשתי השורות לפניה ולבסוף נחליף את שתי השורות האחרונות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2a+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4+4a & 2-a \end{pmatrix}$$

הדטרמיננטה של המטריצה המצומצמת של המערכת המתאימה למטריצה המורחבת הזאת היא $4+4a$. אם ביטוי זה אינו 0, כלומר, אם $a \neq -1$, אז למערכת יש פתרון (יחיד). אם $a = -1$, אז השורה האחרונה מתאימה למשוואה $0 = 3$, ולכן אין פתרון למערכת.

נותר לבדוק את המקרה $2a - 1 = 0$. אז המטריצה הלפני אחרונה היא $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. נחלק את השורה

שניה ב-3 ונחסיר אותה מהראשונה: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. אז הדרגה של המטריצה המצומצמת והמורחבת שוות (ל-2) ולכן יש פתרון.

לסיכום: אין פתרון אם ורק אם $a = -1$. ■

שאלה 2: יהי $V = \mathbb{R}_n[X]$ מרחב הפולינומים מעל $\mathbb{R}$ ממעלה $n \geq 0$. מצאו את הדטרמיננטה של ההעתקה הלינארית $T: V \rightarrow V$ הנתונה עלי ידי $T(f(X)) = X \cdot f'(X) + f(1)$ לכל $f(X) \in V$.
פתרון

לפי ההגדרה, הדטרמיננטה של T היא הדטרמיננטה של המטריצה של T לפי איזשהו בסיס של V . מתקיים

$$T(X^k) = X \cdot kX^{k-1} + 1 = kX^k + 1, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

לכן המטריצה של T לפי הבסיס הסטנדרטי $1, X, \dots, X^n$ היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

זוהי מטריצה משולשית עליונה. הדטרמיננטה שלה היא מכפלת האיברים באלכסון, כלומר, $n!$. ■

שאלה 3: יהי V מרחב וקטורי ממימד n מעל שדה F . תהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית. הוכיחו: $\text{Im}(T) = \text{Im}(T \circ T)$ אם ורק אם $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(T \circ T)$.

פתרון

מתקיים $\text{Im}(T) \supseteq \text{Im}(T \circ T)$, כי כל איבר של $\text{Im}(T \circ T)$ הוא מהצורה $T(T(v))$, עבור איזה $v \in V$, ולכן הוא התמונה של $T(v)$. לכן $\text{Im}(T) = \text{Im}(T \circ T)$ שקול ל- $\dim \text{Im}(T) = \dim \text{Im}(T \circ T)$. באופן דומה $\text{Ker}(T) \subseteq \text{Ker}(T \circ T)$, כי כל $v \in \text{Ker}(T)$ מקיים $T(v) = 0$ ולכן גם $T(T(v)) = T(0) = 0$. כלומר, $v \in \text{Ker}(T \circ T)$. לכן $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(T \circ T)$ שקול ל- $\dim \text{Ker}(T) = \dim \text{Ker}(T \circ T)$. אבל לפי משפט המימד השוויון האחרון שקול ל- $n - \dim \text{Im}(T) = n - \dim \text{Im}(T \circ T)$, כלומר, לשוויון לעיל $\dim \text{Im}(T) = \dim \text{Im}(T \circ T)$. ■

שאלה 4: נתונים שלושה וקטורים ב- $\mathbb{C}^2$:

$$u = \begin{pmatrix} i \\ 1-i \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -3+2i \\ 5+i \end{pmatrix}$$

ידוע כי $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ העתקה לינארית מעל $\mathbb{C}$ אשר מקיימת $T(u) = v$. מצאו את $T(w)$.

פתרון

הוקטורים u, v בלתי תלויים לינארית מעל $\mathbb{C}$, לכן מהווים בסיס (נסמן אותו $\mathcal{B}$) של $\mathbb{C}^2$. יהי $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = [w]_{\mathcal{B}}$. אז $xu + yv = w$, כלומר, פתרון של המערכת שמטריצת המקדמים המורחבת שלה היא $\begin{pmatrix} i & 1 & -3+2i \\ 1-i & 1 & 5+i \end{pmatrix}$. לפי כלל קרמר

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3+2i & 1 \\ 5+i & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i & 1 \\ 1-i & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(-3+2i) - (5+i)}{(i - (1-i))} = \frac{-8+i}{2i-1} = \frac{(-8+i)(2i+1)}{(2i-1)(2i+1)} =$$

$$\frac{-10-15i}{-5} = 2+3i$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} i & -3+2i \\ 1-i & 5+i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i & 1 \\ 1-i & 1 \end{vmatrix}} = \frac{i(5+i) - (-3+2i)(1-i)}{(i - (1-i))} = \frac{5i-1+3-2i-3i-2}{2i-1} = 0$$

לכן $w = (2+3i)u$. לפי הלינאריות, $T(w) = (2+3i)T(u) = (2+3i)v = \begin{pmatrix} 2+3i \\ 2+3i \end{pmatrix}$. ■

שאלה 5: נתונות שתי מטריצות ממשיות

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

האם קיימים בסיסים $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ של $\mathbb{R}^3$ והעתקה לינארית $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ כך ש- $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = A'$ ו- $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = A$? נמקו!

פתרון

לא.

אילו יהיו קיימים בסיסים כאלה, אז היה $\text{rk } A = \dim \text{Im}(T) = \text{rk}(A')$. אבל השורות של A הן כפולות של השורה הראשונה (שאיננה שורת האפסים), לכן $\text{rk } A = 1$, ואילו השורה השניה של A' אינה כפולה של השורה הראשונה, והשלישית היא כן כפולה שלה, לכן $\text{rk } A' = 2$. סתירה. ■

בהצלחה!