



School of Mathematical Sciences **בית הספר למדעי המתמטיקה**
 The Raymond and Beverly Sackler **הפקולטה למדעים מדויקים**
 Faculty of Exact Sciences **ע"ש ריימונד וברברי סאקלר**
 Tel Aviv University **אוניברסיטת תל אביב**

0366.1111.08

בוחן האמצע באלגברה לינארית א1

כ"ח בניסן, תשע"ט
 3 במאי 2019

לתלמידי פרופ' דן הרן

משך הבוחן: 90 דקות.
 אין להשתמש במחשבוניס ובכל חומר עזר.
 יש לנמק. תשובה מספרית ללא הנמקה לא תתקבל.
 יש לענות על שלוש השאלות הבאות.

שאלה 1: (34 נק') תהייה $A, B \in M_{m \times n}(F)$ מטריצות מדורגות קנונית ושקולות שורות (כלומר, ניתן להגיע על ידי סדרה של פעולות אלמנטריות מ- A ל- B). הוכיחו: $A = B$.
 (זהו משפט מההרצאה. כמובן שאין להסתמך עליו או על משפט כלשהו שנובע ממנו.)
 בשתי השאלות הבאות מותר להסתמך על כל חומר שהיה בהרצאה.

שאלה 2: (33 נק') יהי V מרחב וקטורי ותהייה $S_1 = (v_1, v_2, \dots, v_m)$, $S = (v_1, v_2, \dots, v_m, \dots, v_n)$, $S_2 = (v_{m+1}, \dots, v_n)$ שלוש סדרות ב- V (כך ש- S היא השרשור של S_1 ושל S_2). הוכח או הפרך:
 (א) אם S_1, S_2 בלתי תלויות לינארית אז S בלתי תלויה לינארית.
 (ב) אם S_1 בלתי תלויה לינארית ואף וקטור ב- S_2 אינו צירוף לינארי של אברי S_1 אז S בלתי תלויה לינארית.
 (ג) יש וקטור ב- S_2 שאינו צירוף לינארי של אברי S_1 אם ורק אם $\text{Sp}(S) \neq \text{Sp}(S_1)$.
 (כדי להפריך טענה, די לתת דוגמה נגדית; כדי להוכיח טענה, צריך לתת הוכחה מלאה.)

שאלה 3: (33 נק') תהי $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. הוכיחו ש- $V = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid AB = A\}$ הוא תת מרחב של $M_3(\mathbb{R})$ ומצאו לו סדרת יוצרים.

בהצלחה!

שאלה 2:

(א) לא נכון - דוגמה נגדית (ויש רבות אחרות): $V = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$, $m = 1, n = 2$, $v_1 \in V$ שונה מאפס כלשהו, $v_2 = 2v_1$. אז $S_1 = (v_1)$ וגם $S_2 = (v_2)$ בלתי תלויות לינארית כ"א, אבל $S = (v_1, v_2)$ תלויה לינארית, כי $(-2)v_1 + 1v_2 = 0$.

(ב) לא נכון - דוגמה נגדית (ויש רבות אחרות): $V = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$, $m = 1, n = 3$, $v_1 = e_1, v_2 = e_2$, $v_3 = -e_2$. אז $S_1 = (v_1)$ בלתי תלויה לינארית, ו- v_2, v_3 אינם צירוף לינארי של איברי S_1 , כי $\pm e_2$ אינו כפולה של e_1 , אבל $S = (e_1, e_2, -e_2)$ תלויה לינארית כי $0e_1 + 1e_2 + (-1)(-e_2) = 0$.

(ג) נכון - הוכחה: נוכיח את הטענה הבאה, שקולה לוגית לטענה הנתונה:

כל וקטור ב- S_2 הינו צירוף לינארי של אברי S_1 אם ורק אם $\text{Sp}(S) = \text{Sp}(S_1)$.

נניח תחילה שכל וקטור ב- S_2 הינו צירוף לינארי של אברי S_1 . אז כל וקטור ב- S_2 שייך ל- $\text{Sp}(S_1)$, ולכן $S_2 \subseteq \text{Sp}(S_1)$. לפי ההגדרה של $\text{Sp}(S_1)$, גם $S_1 \subseteq \text{Sp}(S_1)$. כיוון ש- S היא השרשור של S_1, S_2 , מכאן נובע שגם $S \subseteq \text{Sp}(S_1)$. לכן $\text{Sp}(S) \subseteq \text{Sp}(S_1)$. ההכלה ההפוכה נובעת מתוך $S_1 \subseteq S \subseteq \text{Sp}(S)$. לכן $\text{Sp}(S) = \text{Sp}(S_1)$.

להיפך, נניח ש- $\text{Sp}(S) = \text{Sp}(S_1)$. בפרט $S_2 \subseteq S \subseteq \text{Sp}(S) = \text{Sp}(S_1)$, כלומר, כל $v \in S_2$ הוא צירוף לינארי של אברי S_1 . ■

שאלה 3: (א) מתקיים $V = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid AB = A\} = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A(B - I_3) = 0\}$ לפי חוק הפילוג למטריצות, אם $A_1, A_2 \in V$ אז

$$(A_1 + A_2)(B - I_3) = A_1(B - I_3) + A_2(B - I_3) = 0 + 0 = 0$$

כלומר, $A_1 + A_2 \in V$. אם $A \in V$ ו- $a \in \mathbb{R}$ אז

$$(aA)(B - I_3) = a(A(B - I_3)) = a0 = 0$$

כלומר, $aA \in V$. כמו כן, $0(B - I_3) = 0$, כלומר, $0 \in V$. לכן V תת מרחב של $M_n(\mathbb{R})$.

(ב) תהי $A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ ותהי $C = (B - I_3)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ אז

$$C \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow CA^t = 0 \Leftrightarrow AC^t = 0 \Leftrightarrow A \in V$$

כלומר, $A \in V$ אם ורק אם $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix}$ פתרונות של המערכת $CX = 0$.

המטריצה המדורגת קנונית של C היא $C' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן מרחב הפתרונות של $CX = 0$ (שהינו מרחב

הפתרונות של $C'X = 0$) הוא $P = \left\{ a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ לכן

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \begin{pmatrix} -2a & a & 0 \\ -2b & b & 0 \\ -2c & c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \text{Sp} \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

לכן שלוש המטריצות בשורה האחרונה הן סדרת יוצרים של V .

■ (כמובן, יש גם סדרות יוצרים אחרות. הסדרה לעיל היא גם בסיס של V – אבל את זה לא נתבקשנו להוכיח.)