הנחיות כלליות: את העבודה יש להגיש עד יום א', 12.4.2015 (בדיוק אחרי חופשת פסח). אני מקווה שלא יהיה צורך בהארכה.

אבקש מכל אחד מכם לעבוד על עבודה זו באופן עצמאי, ללא עזרה הדדית.

אחדים מהתרגילים אולי קשים יותר - השתדלתי לתת הדרכה מתאימה. אם נתקלת בקשיים בפתרון הבעיות ניתן לפנות אלי (בחופשת הסמסטר –רק בדואל) אני מתאר לעצמי שבמקרה כזה אדרוש הסבר על הדרכים בהם ניסית לתקוף את הבעיה ועל הקושי בו נתקלת. יתכן ויהיה לי רמז שעשוי לקדם אותך הלאה.

אם יש טעות בתרגיל כלשהו, אבקש לפנות אלי.

יש להקפיד מאד על הצגה ברורה: הסיבה איננה הקפדה על קוצו של יוד מצדי, אלא הקושי (שלי) להבין את עבודתך. השתדלו להקל עלי בבדיקת העבודה.

תרגיל 1: יהי z טרנסצנדטי מעל שדה K, ותהי $F/K(z)$ הרחבת גלואה סופית. נניח $F = K(z,\alpha)$, באשר $f := \mathrm{irr}(\alpha, K(z)) \in K[z,X]$. הוכח: $F \cap \tilde{K} = K$ אם ורק אם f אי פריק בחוג $\tilde{K}[z,X]$.

תרגיל 2: תהי G חבורה פרוסופית שיש לה לכל $n \in \mathbb{N}$ לכל היותר תת חבורה פתוחה אחד בעלת אינדקס n ב־G.

הוכח ש־G היא פרו־מעגלית (גבול הפוך של חבורות מעגליות).

הדרכה: זהו תרגיל 1.11 בספר [FA]. ראה הדרכה שם.

תרגיל 3: יהי p מפסר ראשוני או 0. תהי G חבורה פרוסופית. הוכח שיש הרחבת גלואה L/K של שדות בעלי אפיון p כך ש־$\mathrm{Gal}(L/K) \cong G$.

הדרכה: זוהי מסקנה 1.3.4 בספר [FA]. אין לתרגם את ההוכחה שם מאנגלית לעברית, אלא להוכיח את הטענה בהסתמך רק על טענות ומשפטים שהיו בקורס הנוכחי או באלגברה ב2. כלומר, אם מסתמכים על טענות אחרות מהספר, צריך גם להוכיח אותן. בפרט, אם נקודות מסוימות בהוכחה בספר חסרות הנמקה, צריך להשלים אותה.

תרגיל 4: יהי K שדה סגור אלגברית בעל אפיון 0. יהי $E = K(z)$ שדה הפונקציות הרציונליות מעל K ותהיינה $F/E, F'/E$ שתי הרחבות גלואה ממעלה סופית n. יהי α אוטומורפיזם של K. נרחיב אותו לאוטומורפיזם של E על יד $\alpha(z) = z$ ונניח ש־α ניתן להרחבה לאיזומורפיזם $\lambda\colon F \to F'$. יהי $\lambda^*\colon \mathrm{Gal}(F'/E) \to \mathrm{Gal}(F/E)$ האיזומורפיזם המושרה (הנתון על ידי $\sigma' \mapsto \lambda^{-1} \circ \sigma' \circ \lambda$). יהי $p \in \mathbb{P}^1_K$ ויהי $p' = \alpha(p)$. תהי $C_{F,p}$ המחלקה של p ב־F/E (הגדרה 9.3) ותהי $C_{F',p'}$ המחלקה של p' ב־F'/E. הוכח:

(א) $\lambda^*\big(C_{F',p'}\big)$ אינו תלוי ב־λ אלא רק בצמצומו α.

(ב) $\lambda^*\big(C_{F',p'}\big) = C_{F,p}^m = \{g^m \mid g \in C_{F,p}\}$, באשר $m \in \mathbb{Z}$ כך ש־$\alpha^{-1}(\zeta_n) = \zeta_n^m$.

הדרכה לגבי (ב): אם $p, p' \in K$, הגדר $t = z - p, u = z - p'$ הרחב את $\alpha\colon K(t) \to K(u)$ ל־$\alpha\colon K((t^{\frac{1}{n}})) \to K((u^{\frac{1}{n}}))$. לפי (א), בלי הגבלת כלליות λ הוא הצמצום של α. עשה שינויים מתאימים עבור $p = \infty$ או $p' = \infty$.

תרגיל 5: יהי K שדה שלם ביחס לערך מוחלט אולטרה־מטרי ויהי z משתנה. יהי $g \in K[z]$ פולינום מתוקן ממעלה d, אי פריק בחוג $K[z]$ כך ש־$|g| = 1$. הוכח ש־g הינו אי פרקי בחוג $K\{z\}$ (ובפרט אינו הפיך בחוג זה).

תרגיל 6: תהי G חבורה סופית ותהיינה $C_1, \dots, C_r$ מחלקות צמידות ב־G. נניח כי

(א) קיימים $g_1 \in C_1, \dots, g_r \in C_r$ כך ש־$G = \langle g_1, \dots, g_r \rangle$ ו־$g_1 \cdots g_r = 1$.

(ב) אם קיימים $g_1' \in C_1, \dots, g_r' \in C_r$ כך ש־$G = \langle g_1', \dots, g_r' \rangle$ ו־$g_1' \cdots g_r' = 1$ אז יש אוטומורפיזם θ של G כך ש־$\theta(g_i) = g_i'$ לכל i.

תהיינה $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ נקודות שונות. הוכח שיש הרחבת גלואה יחידה F של $\mathbb{C}(z)$ (מוכלת בסגור אלגברי נתון של $\mathbb{C}(z)$) כך שמתקיים

(ג) $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{C}(z)) \cong G$.

(ד) $C_i = C_{p_i}$ לכל i.

הדרכה: השתמש במשפט הקיום של רימן. אם F_1, F_2 שתי הרחבות כנ"ל, השתמש במשפט הקיום של רימן לגבי F_1F_2, כדי להוכיח יחידות.

תרגיל 7: יהי $\pi\colon G \to H$ אפימורפיזם של חבורות פרוסופיות. הוכח שיש העתקה רציפה (לא נדרש שהיא תהיה הומומורפיזם) $\rho\colon H \to G$ כך ש־$\pi \circ \rho = \mathrm{id}_H$.

הדרכה: זוהי טענה 2.2.2 בספר [RZ]. ראה הדרכה לתרגיל 3.

תרגיל 8: יהי $\theta\colon G \to H$ אפימורפיזם של חבורות פרוסופיות.

(א) הוכח ש־θ מעתיקה מערכת יוצרים מתכנסת ל־1 של G על מערכת יוצרים מתכנסת ל־1 של H.

(ב) תהי Y מערכת יוצרים מתכנסת ל־1 של H. נניח ש־$1 \in Y$. הוכח שיש מערכת יוצרים X מתכנסת ל־1 של G כך ש־$\theta(X) = Y$.

הדרכה לגבי (ב): זהו חיזוק של משפט 2.2 מההרצאה, אשר הובא ללא הוכחה. אין להסתמך עליו בעבודה זו. קרא את ההוכחה של משפט זה בטענה 17.1.1 בספר [FA] ועשה שינויים מתאימים בה כדי לקבל את הטענה המבוקשת.

בהצלחה!

[FA] M. Jarden, M. Fried, *Field Arithmetic*. 3rd edition. Springer, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete III, vol. 11.

[V] H. Völklein, *Groups as Galois groups*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 53.

[RZ] L. Ribes, P. Zalesskii, *Profinite groups*. Springer, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete III, vol. 40.