מבוא לתולדות המתמטיקה
2. האלמנטים של אאוקליד

אאוקליד מאלכסנדריה (BC @265-325)

האלמנטים

1-4. **גיאומטריה של המישור**:

1. יסודות (לא כולל המעגל)
2. השוואת שטחים
3. המעגל: יסודות
4. המעגל: חסום וחוסם

5. **תורת הפרופורציות** (אאודוקסוס)

6. **תורת הפרופורציות בהקשר של גיאומטריה במישור**

7-9. **אריתמטיקה**

10. **גדלים אינקונמנזורביליים (חסרי מידה משותפת)**

11-13. **גיאומטריה של המרחב**:

11. יסודות
12. על גופים מסוג מסויים
13. גופים משוכללים ("אפלטוניים")

הגדרות

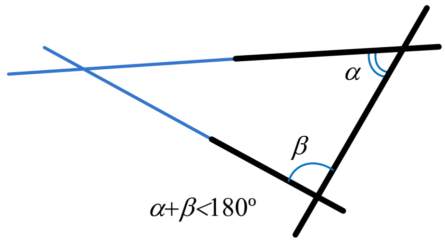
1. נקודה היא דבר חסר חלקים.
2. קו הוא אורך ללא רוחב.
4. קו ישר הוא קו שמונח באופן שווה עם כל הנקודות שעליו.
5. זווית מישורית היא ההטיה שבין שני קווים שנחתכים על אותו מישור ואינם חלק מאותו קו ישר.
10. כאשר ישר חוצה ישר אחר , ושתי הזוויות שנוצרות בשני צדי נקודת המפגש שוות זו לזו , כל אחת מהזוויות האלה נקראת זווית ישרה, והישר החוצה נקרא ניצב לישר שנחתך.
15. מעגל הוא צורה מישורית שמוכלת על- ידי קו, כך שכל הישרים שמחברים בינו לבין נקודה פנימית אחת שלה שווים זה לזה.

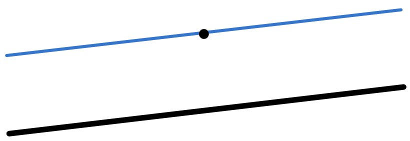
והנקודה הזו נקראת מרכז המעגל.

23. קווים ישרים מקבילים הם קווים ישרים המונחים באותו מישור ואשר , אם מאריכים אותם ככל שנרצה בשני הכיוונים, הם לא ייפגשו באף אחד מהם.

הפוסטולטים

1. (ניתן) לשרטט ישר בין נקודה כלשהי לנקודה אחרת כלשהי.
2. (ניתן) להאריך ישר ללא הגבלה בקו ישר.
3. (ניתן) לשרטט מעגל עם נקודה כלשהי כמרכז ואורך כלשהו כרדיוס.
4. כל שתי זוויות ישרות זהות.
5. אם קו ישר חותך שני ישרים ואם סכום הזוויות הפנימיות שנוצרות באחד הצדדים קטן משתי זוויות ישרות, אזי, אם מאריכים ללא הגבלה את שני הישרים, הרי שהם ייפגשו בַצד שסכום שתי הזוויות קטן משתי זוויות ישרות.





ג'ון פלייפר (Playfair),

1819-1748

אקסיומת פלייפר (1795)

"דעות מקובלות" (Common Notions):

1. דברים השווים לדבר אחר, שווים ביניהם.
2. אם מוסיפים שווים לשווים, מקבלים שווים.
3. אם מחסירים שווים משווים, מקבלים שווים.
4. דברים חופפים זה לזה שווים זה לזה.
5. השלם גדול מכל אחד מחלקיו.

חלקי המשפט:

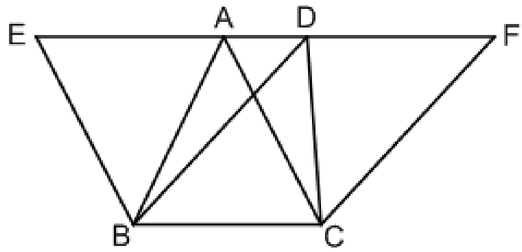
דוגמה I.37

protasis **(enunciation - ניסוח כללי):** Triangles which are on the same base and in the same parallels are equal to one another.

ekthesis **(setting out - מיקוד במקרה קונקרטי):** *Let ABC, DBC be triangles on the same base BC and in the same parallels AD, BC;*

diorismos **(definition of goal - מטרה):** I say that the triangle *ABC* is equal to the triangle *DBC*.

kataskeue **(construction - בניה):** Let *AD* be produced in both directions to *E*, *F*; through *B* let *BE* be drawn parallel to *CA*, and through *C* let *CF* be drawn parallel to *BD*.



apodeixis **(proof - הוכחה):** Then each of the figures *EBCA*, *DBCF* is a parallelogram; and they are equal, for they are on the same base *BC* and in the same parallels *BC*, *EF*. Moreover the triangle *ABC* is half of the parallelogram *EBCA*; for the diameter *AB* bisects it. And the triangle *DBC* is half of the parallelogram *DBCF*; for the diameter *DC* bisects it. [But the halves of equal things are equal to one another.] Therefore the triangle *ABC* is equal to the triangle *DBC*;

sumperasma **(conclusion - מסקנה):** Therefore, triangles which are on the same base and in the same parallels are equal to one another

ספר I:

I.1 On a given finite straight line to construct an equilateral triangle.

I.2 To place at a given point (as an extremity) a straight line equal to a given straight line.

I.4 If two triangles have the two sides equal to two sides respectively, and have the angles contained by the equal straight lines equal, they will also have the base equal to the base, the triangle will be equal to the triangle, and the remaining angles will be equal to the remaining angles respectively, namely those which the equal sides subtend.

I.5 In isosceles triangles the angles at the base are equal to one another, and, if the equal straight lines be produced further, the angles under the base will be equal to one another.

I. 27 If a straight line falling on two straight lines make the alternate angles equal to one another, the straight lines will be parallel to one another.

I.29 A straight line falling on parallel straight lines makes the alternate angles equal to one another, the exterior angle equal to the interior and opposite angle, and the interior angles on the same side equal to two right angles.

I.35 Parallelograms which are on the same base and in the same parallels are equal to one another.

I.42 To construct, in a given rectilineal angle, a parallelogram equal to a given triangle.

I.43 In any parallelogram the complements of the parallelograms about the diameter are equal to one another.

I.44 To a given straight line to apply, in a given rectilineal angle, a parallelogram equal to a given triangle.

I.45 To construct, in a given rectilineal angle, a parallelogram equal to a given rectilineal figure.

I.47 In right-angled triangles the square on the side subtending the right angle is equal to the squares on the sides containing the right angle.

I.48 If in a triangle the square on one of the sides be equal to the squares on the remaining two sides of the triangle, the angle contained by the remaining two sides of the triangle is right

ספר I - פרשנויות (Heath):

This proposition (I.44) will always remain one of the most impressive in all geometry when account is taken (I) of the great importance of the result obtained, the transformation of a parallelogram of any shape into another with the same angle and of equal area but with one side of any given length, e.g. a *unit* length, and (2) of the simplicity of the means employed.

We shall have occasion to see, when we come to the relative propositions in the second and sixth Books, that the general problem here stated is equivalent to that of solving geometrically a mixed quadratic equation. We shall see that, even by means of II.5 and 6, we can solve geometrically the equations

$$ax \pm x^2 = b^2; \qquad x^2 - ax = b^2;$$

but in VI. 28,29 Euclid gives the equivalent of the solution of the general equations

$$ax \pm \frac{b}{c}x^2 = \frac{C}{m}.$$

I.45: We have now learnt how to represent any rectilinear area, which can of course be resolved into triangles, by a single parallelogram having one side equal to any given straight line and one angle equal to any given rectilineal angle. Most important of all such parallelograms is the rectangle, which is one of the simplest forms in which an area can be shown. Since a rectangle corresponds to the product of two magnitudes in algebra, we see that *application* to a given straight line of a rectangle equal to a given area is the geometrical equivalent of algebraical *division* of the product of two quantities by a third. Further than this, it enables us to *add* or *subtract* any rectilineal areas and to represent the sum or difference by *one* rectangle with one side of any given length, the process being the equivalent of obtaining a common factor.

ספר II- חלק ראשון "הכנת כלים":

1. If there are two straight lines and one of them is cut into any number of segments, the rectangle contained by the two straight lines is equal to the rectangle contained by the uncut line and each of the segments.

2. If a straight line is cut at random, the rectangle contained by the whole and both of the segments is equal to the square on the whole.

[3-5: three further 'if a straight line is cut at random' propositions]

6. If a straight line is bisected and some straight line is added to it in a straight line, the rectangle contained by the whole with the added straight line and the added straight line is equal to the square on the straight line composed of the half and the added straight line.

[7-8: two more 'if a straight line is cut at random' propositions]

9. If a straight line is cut into equal and unequal segments, the squares on the unequal segments of the whole are double of the square on the half and the square on the segment between the sections.

[10 is a similar proposition to the above, beginning 'if a straight line is bisected...']

ספר II- חלק ראשון "בעיות":

11. To cut a given straight line so that the rectangle contained by the whole and one of the segments is equal to the square on the remaining segment.

12. In obtuse-angles triangles the square on the side subtending the obtuse angle is greater than the squares on the sides containing the obtuse angle by twice the rectangle contained by one of the sides around the obtuse angle, the one on which the perpendicular falls, and the straight line cut off outside (the triangle) by the perpendicular towards the obtuse angle.

[13 is the parallel result to 12, for acute-angled triangles]

14. To construct a square equal to a given rectilinear (figure or area).

ספר II - פרשנויות:

B.L. van der Waerden:

When one opens Book II of the *Elements*, one finds a sequence of propositions, which are nothing but algebraic formulations of algebraic rules. So, e.g., II.1 … corresponds to the formula:

$$a(b+c+...)=ab+ac+...$$

II. 4 … corresponds to

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

We have here, so to speak, the start of an algebra textbook, dressed up in geometrical form. The magnitudes under consideration are always line segments; instead of ‘the product *ab*”, one speaks of ‘the rectangle formed by *a* and *b*’, and in place of a^2, of ‘the square on *a*’.

Quite properly, Zeuthen speaks in this connection of a ‘geometric algebra’. … [This] geometric algebra is a continuation of Babylonian algebra. … The Greeks translated everything into geometric terminology. But since it is indeed a translation which occurs here and the line of thought is algebraic, there is no danger of misinterpretation, if we reconvert the derivations into algebraic language and use modern notations. From now on we shall therefore coolly replace expressions such as ‘the square on *a*’, ‘the rectangle formed by *a* and *b*’ by the modern symbols a^2 and *ab*, whenever they simplify the presentation.

Heath on II, 11: As the solution of this problem is necessary to that of inscribing a regular pentagon in a circle (IV 10,11), we must necessarily conclude that it was solved by the Pythagoreans, or, in other words, that they discovered the geometrical solution of the quadratic equation

$a(a-x)=x$ or $x^2+ax=a^2$

The solution in II,11 exactly corresponds to the solution of the more general quadratic equation $x^2+ax=b^2$, which, as was shown above, [is] based upon II, 6.

B.L. van der Waerden: Thabit ibn Qurra, a contemporary of Al-Khwarizmi, was an excellent geometer and astronomer, fully conversant with the work of Euclid. In a little known treatise, Thabit pointed out that the solution of the three types of quadratic equations according to ‘the Algebra people’ is equivalent to the ‘application of areas with excess or defect’ as presented by Euclid.

The example of Thabit shows that Unguru is completely wrong when thinking that mathematicians like Zeuthen came to their opinions about Greek geometric algebra only because they translated Euclid’s propositions into modern algebraic symbolism. It is true that Zeuthen was able to use modern symbolism, but Thabit was not, and yet he arrived at the same conclusion as Zeuthen, namely that Al-Khwarizmi’s solution of quadratic equations is equivalent to Euclid’s procedure.

André Weil: When quadratic equations, solved algebraically in cuneiform texts surface again in Euclid, dressed up in geometric garb without any geometric motivation at all, the mathematician will find it appropriate to describe the latter treatment as “geometric algebra” and will be inclined to assume some connection with Babylon, in the absence of any concrete “historical” evidence. …

It is impossible for us to analyze the contents of Books V and VII of Euclid without the concept of group and even that of groups of operators, since the ratios of magnitudes are treated as a multiplicative group operating on the additive group of the magnitudes themselves.

ספר V - תורת הפרופורציות:

הגדרות:

3. "יחס" הוא סוג של קשר בין גדלים מאותו סוג

4. שני גדלים מגדירים יחס (λογοσ - ratio) כאשר כפולה של האחד עוברת את השני.

5. בהנתן שני זוגות של גדלים בני-השוואה, היחס של הגודל הראשון לגודל השני שווה ליחס של השלישי לרביעי, אם וכאשר כפולות זהות של הגודל הראשון והגדול השלישי, ביחד עוברים, ביחד שווים או ביחד חסרים, כפולות זהות של הגודל השני והגודל הרביעי, בסדר הזה.

$$a:b \;::\; c:d$$

אם עבור כל זוג מספרים טבעיים m,n

$$mc > nd \Leftrightarrow ma > nb$$

$$mc = nd \Leftrightarrow ma = nb$$

$$mc < nd \Leftrightarrow ma < nb$$

חתכי דדקינד:

Richard Dedekind (1831-1916) - *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872)

"חתכי דדקינד" - (A_1,A_2)

1. A_1,A_2 הן קבוצות של מספרים רציונליים
2. כל מספר רציונלי שייך או ל A_1 או ל A_2
3. כל מספר ה שייך ל A_1 קטן מכל מספר השייך ל A_2

טענה: הגדרת אאודוקסוס והגדרת דדקינד מגדירות באופן זהה "יחסים שווים", ועל כן מגדירים באופן זהה את המפסרים האי-רצינליים.

הוכחה: נתון יחס x/y, ונגדיר

$$A = \{a/b \text{ in } Q:\; a/b \le x/y\}$$

$$B = \{a/b \text{ in } Q:\; a/b > x/y\}$$

בהנתן יחס שני z/w נגדיר קבוצות C,D באופן דומה. צ"ל: $z/w = x/y \;\Leftrightarrow\; (A,B) = (C,D)$

ניקח a/b ב- A. אז $ay \le bx \Leftarrow a/b \le x/y$ אבל a,b הם מספרים שלמים ולכן (על פי הגדרת אאודוקסוס):

$$a/b \le w/z \quad \text{ולכן} \quad az \le bw$$

לכן a/b גם נמצא ב $-C$. לכן $A \subseteq C$ וכו...'

ספר V - משפטים:

V.4 If a first magnitude have to a second the same ratio as a third to a fourth, any equimultiples whatever of the first and third will also have the same ratio to any equimultiples whatever of the second and fourth respectively, taken in corresponding order.

V.11 Ratios which are the same with the same ratio are also the same with one another.

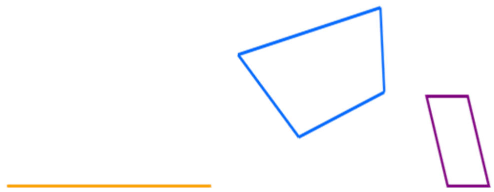
(“equal”) זהה ⇒⇐ (“the same”) שווה

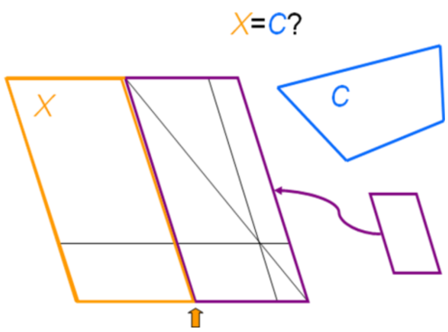
V.16 If four magnitudes be proportional, they will also be proportional alternately.

V.18 If magnitudes be proportional separando, they will also be proportional componendo.

ספר VI - פרופורציות גיאומטריות:

VI.28: To a given straight line to apply a parallelogram equal to a given rectilineal figure and deficient by a parallelogrammic figure similar to a given one : thus the given rectilineal figure must not be greater than the parallelogram described on the half of the straight line and similar to the defect.





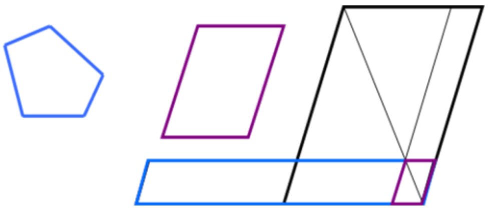
הית': VI.28 הוא השקול הגאומטרי לפתרון המשוואה הריבועית.

$$ax-\frac{b}{c}x^2=S;$$

בכפוף לתנאי ההכרחי לקיום הפתרון, דהיינו:

$$S\leq\frac{c}{b}.\frac{a^2}{4}$$

VI.29: To a given straight line to apply a parallelogram equal to a given rectilineal figure and exceeding by a parallelogrammic figure similar to a given one.



ספר -VII-VIII-IX - אריתמטיקה:

הגדרות:

1. יחידה היא מה שבזכותו כל דבר שקיים מכונה האחד.
2. מספר הוא ריבוי של יחידות.
3. מספר הוא חלק ממספר, הקטן מהגדול, אשר מודד את הגדול;
4. אך "חלקים" כשהוא אינו מודד אותו.
11. מספר ראשוני הוא זה אשר נמדד באמצעות היחידה בלבד.
20. מספרים מקיימים פרופורציה כאשר הראשון הוא אותו כופל, או אותו חלק, או אותם חלקים, של השני, כפי שהשלישי הוא לרביעי.

VII, 12: If there be as many numbers as we please in proportion, then, as one of the antecedents is to one of the consequents, so are all the antecedents to all the consequents.

אם $a:a' :: b:b' :: c:c'$ וכן הלאה

אזי $a+b+c+\ldots :a' +b' +c' +\ldots::a:a' ::b:b' ::c:c'$ וכן הלאה

VII, 13: If four numbers be proportional, they will also be proportional alternately.

אם $a:b\ ::\ b:c\ ::\ c:d\ ::\ \ldots$

אזי $a^2:b^2\ ::\ b^2:c^2\ ::\ c^2:d^2\ ::\ \ldots$

וגם $a^3:b^3\ ::\ b^3:c^3\ ::\ c^3:d^3\ ::\ \ldots$

VII, 30: If two numbers by multiplying one another make some number, and any prime number measure the product, it will also measure one of the original numbers.

VII, 31: Any composite number is measured by some prime number.

VII, 32: Any number either is prime or is measured by some prime number.

VIII, 13: If there be as many numbers as we please in continued proportion, and each by multiplying itself make some number, the products will be proportional; and, if the original numbers by multiplying the products make certain numbers, the latter will also be proportional.

VIII, 14: If a square measure a square, the side will also measure the side; and, if the side measure the side, the square will also measure the square.

a מחלק את b אם ורק אם a^2 מחלק את b^2.

VIII, 15: If a cube number measure a cube number, the side will also measure the side; and, if the side measure the side, the cube will also measure the cube.

a מחלק את b אם ורק אם a^3 מחלק את b^3.

IX, 20: Prime numbers are more than any assigned multitude of prime numbers.

Proof: Let A,B,C, be the assigned prime numbers. I say there are more prime numbers than A,B,C. For let the least number measured by A,B,C be taken, and let it be DE. Let the unit be added to DE, ...

IX, 35: If as many numbers as we please be in continued proportion, and there be subtracted from the second and the last numbers equal to the first, then, as the excess of the second is to the first, so will the excess of the last be to all those before it.

אם
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \ldots = \frac{a_2}{a_1}$$

אזי
$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_n + a_{n-1} + \ldots a_1} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

IX.36 : אם מספרים רבים ככל שנרצה, החל מהיחידה, יסודרו ברציפות בפרופורציה כפולה, עד שהסכום של כולם יהפוך לראשוני, ואם הסכום מוכפל במספר האחרון יוצר מספר מסוים, המכפלה תהיה מספר משוכלל.

אם $(2^n - 1)$ הוא מספר ראשוני,

אזי $2^{n-1}(2^n - 1)$ הוא מספר משוכלל.