"המשפט האחרון של פרמה". איך הופכת שאלה שבשוליים לבעיה מתמטית חשובה, ולרב-מכר עטור תהילה?

מאת: ליאו קורי

"המשפט האחרון של פרמה" היה צירוף מילים מוכר ורב-משמעות עבור מתמטיקאים בכל העולם עוד בסוף המאה הי"ט. מאז 1994 הוא הפך גם לנחלתם של ציבור גדול מאוד של קוראים ברחבי העולם כולו, וביתר שאת אחרי 1997 עם הופעת ספרו הפופולרי של סיימון סינג בשם זה. סינג עשה שירות בל-ישוער להפצה—בקרב קהל רחב ומגוון—של ידע מתמטי איזוטרי למדי, השמור בדרך כלל ליודעי ח"ן בלבד. זו סיבה מספקת לשבח אותו על פועלו. יחד עם זאת, קריאה מדוקדקת יותר בספרו חושפת כמה חולשות מעניינות הראויות לביאור והבהרה, ועל כך אנסה לעמוד במאמר הזה. במאמר אציג את המשפט ואת חלק מהניסיונות להוכחתו בהקשר ההיסטורי שלהם, ובדרך זו אנסה להבהיר סוגיה רחבה יותר הקשורה בו, דהיינו, "מה הופך שאלה כלשהי לבעיה מתמטית חשובה". סינג הציג בפני הקוראים דרמה סוחפת ורוויית מתח, שבמרכזה עומדת "הבעיה החשובה ביותר בתולדות המתמטיקה", כביכול. תולדות המתמטיקה הן פחות דרמטיות ממה שמשתמע מסיפורו של סינג. ואולם, הן הרבה יותר עשירות ומפתיעות.

הודות לסיימון סינג ולאינסוף מאמרי הסקירה שנכתבו על ספרו המצליח, סיפור המסגרת מוכר די הצורך. מדובר בבעיה שנוסחה בתחילת המאה ה-17, על-ידי פייר דה פרמה (1601-1665 Pierre de Fermat), משפטן בהשכלתו, פעיל בפוליטיקה המקומית של עיר מגוריו טולוז, ובעל התעניינות עמוקה ורצינית בתרבות הקלאסית בכללותה ובפרט במתמטיקה של היוונים. ערב אחד, התעמק פרמה בקריאתו בספר ה"אריתמטיקה" של דיופאנטוס מאלכסנדריה, מתמטיקאי יווני חשוב שחי במאה השלישית לספירה. פרמה הגיע לבעיה פשוטה ויפה, שדיאופנטוס פתר בספרו: "לחלק מספר ריבועי נתון לשני מספרים ריבועיים". זוהי בעיה טיפוסית המייצגת את אלה שבהן נהג דיופאנטוס לעסוק, דהיינו, בעיה שמטרתה למצוא מספר שלם אחד או יותר, המקיימים תנאים מסויימים. בימינו, משוואה שעבורה יש לחפש פתרונות שלמים בלבד מכונה "משוואה דיופאנטית", ממש לכבודו. ובכן, בעת שעיין פרמה בבעיה הזו של דיופאנטוס, נחה עליו ההשראה והוא כתב בשולי הספר: "בלתי אפשרי הוא שקובייה תיכתב כסכום של שתי קוביות, או שחזקה רביעית תיכתב כסכום של שתי חזקות רביעיות או, באופן כללי יותר, שכל מספר שהוא חזקה גבוהה משתיים ייכתב כסכום של שתי חזקות מאותו סוג." אם נכתוב זאת בסמלים אלגבריים, טענתו של פרמה קובעת שעבור כל מספר n שלם וגדול מ-2, אין שלושה מספרים שלמים x, y, z המקיימים את התבנית:

$$x^n + y^n = z^n.$$

מה שמעניין עוד יותר, ומהווה נקודת פתיחה לכל הסיפור המרתק הזה, היא ההערה הנוספת שפרמה כתב לאחר קביעתו, לאמור: "מצאתי הוכחה ראויה ממש לציון לעובדה הזו, אלא ששולי הספר צרים מלהכילה". הדעה המקובלת היום על הכול היא, שעל אף שפרמה האמין באמת ובתמים שאכן היתה בידו ההוכחה כאשר כתב את הדברים, לא ייתכן שבאמת כך היה. מילת המפתח כאן היא, כמובן, "שוליים". אילו עמדו לרשותו שוליים רחבים יותר ייתכן שהסיפור כולו לא היה מתקיים. ייתכן שפרמה היה מבין בעצמו, אילו ניסה לכתוב את פרטי ההוכחה, שיש בעיה כלשהי עם מה שנראה לו על פניו כטיעון מתמטי שלם ונכון. מצבים כאלה הם נחלתו היומיומית של כל מתמטיקאי. ייתכן, לעומת זאת, שאילו כתב את מה שהוא חשב כהוכחה נכונה והדבר היה

מתפרסם מאוחר יותר יחד עם ההערה שלו, אחרים היו מבינים מיד את הבעיה שבה. אין לדעת כמובן, ומדובר כאן בשאלת "אילו" שתיוותר לעולם פתוחה. אבל לצורך ההיסטוריה כפי שהיא באמת התפתחה, עלינו לברך על צרות השוליים שעמדו לרשות פרמה.

החלק השני של סיפור המסגרת מתרחש ב-1993 באוניברסיטת קיימברידג' אשר באנגליה, כאשר מתמטיקאי מאוניברסיטת פרינסטון, בשם אנדרו ויילס (Andrew Wiles), הציג בפני קהל של מומחים פעורי-פה הוכחה מקיפה ולטענתו סופית להשערה הישנה של פרמה, לאחר יותר מ-350 שנה לניסוחה. נכון אמנם, שכעבור זמן מה התברר שהוכחתו של ויילס סבלה מפגם לא טריוויאלי, שדרש תיקון לצורך השלמתה. אבל התיקון הגיע כעבור כשנה, כשויילס נעזר לצורך זה באחד מתלמידיו, ריצ'רד טיילור. ספרו של סינג מספר את קורות המשפט והינסיונות להוכחה, מאז שפרמה הגה אותו קצת אחרי 1630 ועד הצגת ההוכחה המלאה באוגוסט 1994.

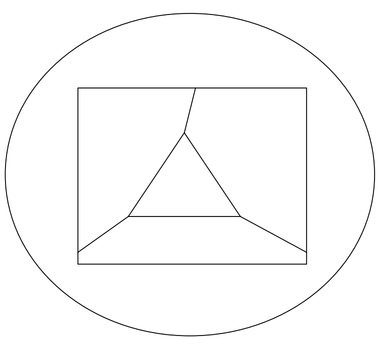
הידיעה על הוכחתו של ויילס התקבלה בהפתעה ובשמחה בקהילה המתמטית העולמית. אין בכך תימה. הרבה פחות מובנת מאליה היא העובדה שהדבר התפרסם בעמוד הראשון של הניו-יורק טיימס, בגיליון של ה-24 ליוני, 1993, בכותרת הראשית, בזו הלשון: "At last, shout of Eureka, in Age Old Math Mystery". ברור שרק אירוע מדעי יוצא דופן יכול היה לזכות לתשומת לב בולטת כל כך, והיה מי שחשב שיש טעם להזדרז ולהציג בפני קהל רחב ככל האפשר פרטים נוספים והסבר שווה לכל נפש על אודות המשפט ותולדותיו. הספר הפופולרי הראשון שיצא לאור בעקבות ההוכחה של ויילס היה ספרו של אמיר אקסל (Aczel) "Fermat's Last Theorem" (1996). אבל מי שזכה לפרסום הגדול, לתהילה, וייתכן שגם לתמלוגים לא מבוטלים, היה סיימון סינג. ספרו יצא גם כסרט דוקומנטרי עטור פרסים של ה BBC, ומספיק לבקר באתר האינטרנט המושקע שלו (www.simonsingh.net) כדי להיווכח במעמדו הנוכחי כסלבריטאי.

ההצלחה המסחרית הגדולה של ספרו מציבה תעלומה מסוג אחר עבור היסטוריונים של המתמטיקה, מקצועיים וחובבים כאחד, התוהים עתה איך אפשר לחבר רב-מכר בתחומי העניין האיזוטריים במעט שלהם, כך שיגיעו למחזורי מכירות המתקרבים לאלה של סינג. לא רבים יפענחו את הסוד הזה, אבל אין ספק שרבים מנסים בעקבותיו. אכן, בשנים האחרונות ראו אור ספרי פופולריזציה העוסקים בנושאים הקשורים במתמטיקה ובפיזיקה, בתדירות ובכמויות חסרות תקדים. סינג עצמו הזדרז לנסות שוב את מזלו במחזות, בסרטים, ובספרים נוספים, שהראשון בהם, על אודות תולדות ההצפנה, *The Code Book*, ראה אור כבר ב-1999, ונמכר אף הוא במחזורים נאים. בין הנושאים שזכו מיד למספר ספרים, יש אחד הקשור לבעיה לא פתורה נוספת בתורת המספרים, הלא היא "השערת רימן" (Riemann Hypothesis), שעליה נרחיב בהמשך. בין הספרים שעוסקים בבעיה זו ניתן להזכיר *The Music of the Primes* מאת מרכוס דה סוטוי (de Sautoy), ו- *Prime Obsession* מאת ג'והן דרבישייר (Derbyshire). בעוד עטיפת ספרו של סינג מכריזה שמדובר ב"מסע האֶפִּי אחר הפתרון של הבעיה המתמטית החשובה ביותר" (בעיית פרמה), דרבישייר מציין שבעיית רימן היתה ה"בעיה הבלתי-פתורה הגדולה ביותר של המתמטיקה" (The greatest unsolved problem of mathematics). אצל הקורא התמים עשויה להתעורר השאלה באיזו מידה אנחנו נמצאים אמנם מול בעיה מתמטית חשובה, בין אם מדובר במשפט פרמה, או בבעיית רימן, או כל בעיה אחרת, ואיך נקבע המעמד הזה המיוחס להן.

שאלה זו מתחדדת עוד יותר לנוכח ספר אחר שראה אור לאחרונה, ובו עיסוק ב"שבע החידות המתמטיות הבלתי-פתורות הגדולות של תקופתנו" (*The Seven Greatest Unsolved Mathematical Puzzles of our Time*), מאת קית' דוולין (Keith Devlin). הבעיות שדוולין מתאר בספרו אינן בחירתו החופשית, והכתרתן בתואר המפואר שבספר אף היא איננה פרי יוזמתו של המחבר. מדובר ברשימה שנקבעה בשנת 2000 ע"י ועדת מומחים מטעם המכון קליי למתמטיקה (Clay Mathematics Institute) במסצ'וסטס, ואשר הצמידה תג מחיר עסיסי של מיליון דולר למי שיפתור כל אחת מן הבעיות הנ"ל. למותר לציין שמי שמחפש דרך מהירה אל העושר מוטב לו שיחפש נתיבים חלופיים, קלים יותר להגשמה (כגון הגרלת הלוטו או השקעה מושכלת בנסדא"ק), ושלא יסתמך על יכולתו לפתור אחת הבעיות הנ"ל. בהמשך עוד ארחיב מעט על הרשימה הזאת ושורשיה ההיסטוריים.

כדי לחתום את הסקירה המקדימה הזאת אזכיר ספר נוסף, העוסק בבעיה השייכת לתחום מתמטי אחר לחלוטין והמכונה "בעיית צביעת המפה" או "בעיית ארבעת הצבעים": "ארבעה צבעים מספקים" (*Four Colors Suffice : How the Map Problem Was Solved*), מאת רובין וילסון (Robin Wilson). השאלה שעומדת כאן על הפרק היא האם ניתן לצבוע בצורה "נכונה" כל "מפה אפשרית" בארבעה צבעים בלבד? "מפה אפשרית" פירושה בהקשר הזה כל חלוקת פני כדור לאזורים סגורים, או "מדינות". "צביעה נכונה" פירושה כאן שאין במפה שתי מדינות בעלות גבול

משותף, אשר נצבעו באותו צבע. קל מאוד לראות שישנן מפות שלא ניתן לצבען באופן "נכון" בשלושה צבעים בלבד. כך למשל במפה הפשוטה הבאה:



עוד ב-1852 הועלתה ההשערה ש**כל** מפה אפשרית ניתנת לצביעה בארבעה צבעים בלבד. מתמטיקאים רבים ניסו את כוחם בהוכחת ההשערה, אבל הוכחה מלאה לכך ניתנה רק ב-1977 ע"י קנת' אפל ו-וולפגנג האקן (Kenneth Appel ו-Wolfgang Haken). הפתרון של אפל והאקן היה מעניין לא רק משום שפתר בעיה שעמדה פתוחה שנים רבות כל כך, אלא משום שהוא **חייב** שימוש במחשב דיגיטלי באחד משלביו המכריעים. לא אוכל לתת כאן תיאור מפורט של הפתרון הזה, ולהשיב לשאלה מדוע פתרון כזה **מחייב** שימוש במחשב. אבל חשוב להדגיש שעצם הרעיון של שימוש כזה מעלה שאלות חשובות ומסקרנות על המהות של הוכחה מתמטית בכלל, ולגבי השאלה אם הפתרון של אפל והאקן נכנס לקטגוריה הזו של הוכחה.

בדוגמאות שהזכרתי לעיל, הניסיון להגדיר בעיה כזו או אחרת כבעיה מתמטית חשובה, ואף "החשובה מבין כל הבעיות המתמטיות", מופיע במסגרת מאמצים שיווקיים של ספרי פופולריזציה. אבל השאלה מהי בעיה מתמטית חשובה מעסיקה בהחלט, ובמובנים רבים, את המתמטיקאי הפעיל. המובן המיידי והפשוט ביותר הוא זה הקשור בבחירת בעיית מחקר שבה יחליט כל מתמטיקאי, החל משלב הדוקטורט שלו ולאחר מכן במשך הקריירה כולה, להקדיש את מאמציו. גם היסטוריונים של המתמטיקה מתעניינים בשאלה הזו במסגרת עבודתם, למשל, כאשר הם מנסים להבין את התהליכים שהובילו לפיתוח רעיונות או תיאוריות שונות. במאמר הזה אדון בקצרה בשאלה מה הופך בעיה מתמטית לחשובה, ואקשור אותה לסיפור על המשפט האחרון של פרמה והניסיונות להוכיח אותו.

בעיות מתמטיות בלתי פתורות ובעיות מתמטיות חשובות

במקום שאנסה להגדיר בעצמי בעיה מתמטית חשובה מהי, אתלה באילנות גבוהים, ואסתמך על דייויד הילברט (David Hilbert 1862-1943), מתמטיקאי גרמני שהיה אחד המשפיעים ביותר על המתמטיקה כולה בתחילת המאה העשרים. יחד עם הצרפתי ז'ול אנרי פונאקרה (Jules Henri Poincaré 1854-1912), הילברט היה אחרון האוניברסליסטים שיכלו לטעון לראייה מקיפה ושלמה של תחום המתמטיקה ושל קשריו עם הדיסציפלינות השכנות, ובעיקר הפיזיקה. הילברט נתן את דעתו המפורטת בנוגע לשאלה מהי בעיה מתמטית חשובה בנאום מפורסם שנשא ב-1900 בפני באי הכנס הבינלאומי השני של המתמטיקאים שהתקיים בפריז. כאשר הוזמן לשאת את אחת ההרצאות המרכזיות בכנס, הילברט לא הסתפק בהצגת תמונה מעודכנת של תחום זה או אחר בדיסציפלינה, כמקובל בדרך כלל בהזדמנות החגיגית הזו, אלא העז "להרים את המסך ולהציץ אל העתיד". הוא קבע רשימה של עשרים ושלוש בעיות שלדעתו חייבות להעסיק, ויעסיקו, את החוקרים במאה שנפתחה אז. רשימה זו הפכה לציון דרך בתולדות המתמטיקה, ויותר ממתמטיקאי אחד קנה את תהילתו כאשר פתר, או אפילו קידם את הפתרון, לאחת מהבעיות שברשימה. לא ניכנס כאן לתיאור כל הבעיות שברשימה, אבל מעניינת אותנו דווקא ההקדמה שבהרצאתו של הילברט ובה הסבר כללי על מהותן של בעיות במתמטיקה. הנה מה שהילברט אומר:

> קשה להפריז במשמעות העמוקה של בעיות מסוימות למען התקדמותה של המתמטיקה בכלל, ובתפקיד החשוב שהן משחקות בעבודתו של כל חוקר וחוקר.
> כל עוד ענף מדעי מציע שפע בעיות לפתרון, הרי שהוא חי וקיים. מחסור בבעיות בענף מתמטי מבשר את הכחדתו הקרבה או את עצירת התפתחותו העצמאית.
> קשה עד בלתי-אפשרי לנחש אל-נכון מראש מה ערכה האמיתי של בעיה נתונה;
> ובכל זאת ניתן לתהות אם ישנם קריטריונים כלליים המציינים בעיה מתמטית

> ראויה לשמה. מתמטיקאי צרפתי זקן אמר: תורה מתמטית לא תיחשב לשלמה ומוגמרת אם היא לא פותחה לרמת בהירות כזו שאתה יכול להסבירה לאדם הראשון שתפגוש ברחוב. ואם נכון הדבר עבור תורה מתמטית הרי שהוא נכון שבעתיים כאשר מדובר בבעיה מתמטית שתיחשב למושלמת, שכן הברור והמובן בפשטות מושכים את תשומת לבנו, בעוד המורכב דוחה אותה.

הילברט מצהיר, אם כן, שהבעיות הלא פתורות הן נשמת אפן של התיאוריות המתמטיות. תורות מתמטיות ראויות לשמן מפותחות כתשתית לפתרון בעיות חשובות ומוגדרות היטב, יותר מאשר כמטרה בפני עצמה. נכון הוא, שלעתים קרובות, הפיתוח עצמו של התיאוריות הללו מוביל לבעיות חדשות שיש להן עניין בפני עצמן. אבל עדיין הילברט לא אמר מה מבדיל בין בעיה חשובה יותר לבין החשובה פחות. את זאת הוא אומר בהמשך:

> בעיה מתמטית חייבת להיות קשה כדי שתפתה אותנו, אך לא בלתי-מושגת פן היא תלעג למאמצינו. עליה להיות כמגדלור המאיר שבילים מפותלים המובילים אל האמת, וכתזכורת מתמדת לעונג שבפתרון המוצלח. מתמטיקאים של המאות הקודמות היו רגילים להקדיש את עצמם בקנאות ובלהט לפתרון של כמה בעיות קשות מובחרות. אזכיר כאן רק את בעיית המורָד המהיר ביותר. זו בעיה חשובה מאוד שהציע יוהנס ברנולי (Bernoulli) בתחילת המאה ה-18. "הניסיון מלמד" – הצהיר אז ברנולי – "שהמוחות הנשגבים יתרמו לקידום המדע אם רק יעמדו בפניהם בעיות קשות ובו-בזמן מועילות." הוא קיווה לזכות בהוקרת העולם המתמטי אם ילך בדרכם של אנשים כמו מרסן (Mersenne), פסקל (Pascal), פרמה, ויוויאני (Viviani) ואחרים, ואם יציב בפני האנליסטים הבולטים של זמנו [לאמור: המתמטיקאים] בעיה שבאמצעותה יוכלו למדוד כבאבן בוחן את ערכן ואת כוחן של השיטות שאותן פיתחו.

הנה, אם כן, דוגמה מובהקת לבעיה חשובה, "בעיית המורָד המהיר ביותר": מהו המסלול המחבר בין שתי נקודות נתונות בגבהים שונים, שאותו יעבור בזמן הקצר ביותר כדור המשוחרר בנקודה הגבוהה. ברור שהמסלול חייב להיות קצר ככל הניתן. ואולם על המסלול הזה לאפשר לכדור לצבור מהירות מספקת תחת האפקט של התאוצה הגרוויטציונית , ולכן המסלול הקצר ביותר האפשרי, כלומר הקו הישר, לא יספק את התשובה הרצויה. מדובר בבעיה כלל וכלל לא פשוטה, והיא נוסחה כאשר החשבון האינפיניטסימלי היה בראשית דרכו. היא ממש שימשה כאחד המדדים המשכנעים ביותר לגבי כוחן של הטכניקות החדשות שהתפתחו באמצעות החשבון הזה, והיא לא הותירה ספק לגבי יעילותו. יתר על כן, הטכניקה שפותחה על-ידי ברנולי כדי לפתור את הבעיה יצר בעצמה תחום חדש לחלוטין, חשבון הווריאציות, מאתגר מאוד וגדוש בבעיות קשות, שעד היום מספק תעסוקה למתמטיקאים מוכשרים רבים ומשמש כלי מרכזי לפיזיקה המתמטית. הילברט עצמו הפך לאחד האמנים הגדולים של התחום בתקופתו, וברשימת הבעיות שלו מ-1900 אנו מוצאים גם כאלו העוסקות בשיפור ובחידוד הטכניקות הקשורות בו.

הילברט ציין בהקדמה להרצאתו עוד שתי בעיות מפורסמות: בעיית פרמה, שעומדת במוקד דיוננו כאן, ו"בעיית שלושת הגופים". בעיה אחרונה זו עלתה עוד בתקופת ניוטון ואחר-כך הוסיפה להתחדד, במסגרת פיתוח המכאניקה השמימית שנובעת מן הפיזיקה הניוטונית, במיוחד בידיו של ליאונרד אוילר (Leonhard Euler 1707-1783) במאה הי"ח. הבעיה קשורה בתיאור המסלול של גופים הנתונים לחוק הגרוויטציה של ניוטון: כשמדובר בשני גופים בלבד, הפתרון המתמטי של הבעיה הוא פשוט למדי. כשמדובר בשלושה גופים הבעיה מסתבכת עד מאוד, ומתמטיקאים רבים היו מעורבים בניסיונות לפתור אותה. שנים מעטות לפני ההרצאה של הילברט, הצליח פואנקרה לפרוץ דרך באופן משמעותי בפתרון הבעיה, לפחות למקרים מיוחדים חשובים, וזה היה רק אחד מתוך הישגיו הרבים שהקנו לו את מעמדו הרם בין עמיתיו. בפתרון של פואנקרה היו טמונים גם הזרעים ליצירתם של תחומים מתמטים רבים וחשובים, חלקם בפריחה עד עצם היום הזה. ביניהם ניתן להזכיר את אלה הקשורים במה שמכונה "תורות הכאוס" ואשר זכו אף הם לפופולריות בקרב ציבור רחב באמצעות ספר מצליח, "כאוס" מאת ג'יימס גליק. הדוגמה של בעיית שלושת הגופים היתה אם כן קולעת מאוד מנקודת מבטו של הילברט, על אף שב-1900 הוא היה רחוק מלדמיין את התפתחויות הרבות והמעניינות שיבואו בעקבות תרומה זו של פואנקרה.

שתי הבעיות שהילברט מזכיר כאן שונות במהותן: בעוד בעיית פרמה היא "המצאתה החופשית של הרוח האנושית בתחום המופשט של תורת המספרים", הרי שבעיית שלושת הגופים היא בעיה יסודית של עולם הטבע. מדובר בשני סוגי מקורות ומוטיבציות שונות לחלוטין, ובשני המקרים הם מובילים לבעיות שהמתמטיקאים רואים כחשובות, כל אחת בדרכה. ההתמקדות בבעיות כגורם מרכזי בהתפתחות המתמטיקה מוביל את הילברט לנסח את הקרֶדו שלו, ה"אני מאמין" הידוע שלו לגבי המתמטיקה והמדעים:

> מקור הבעיות במתמטיקה הוא בלתי נדלה וכל בעיה שמגיעה לפתרונה מפנה את מקומה לבעיות רבות אחרות. האמונה ביכולתנו לפתור כל בעיה מתמטית היא אחד המניעים בעלי העוצמה הרבה ביותר עבור החוקר. אנו שומעים בתוכנו את הקריאה הנצחית: הנה לך בעיה, חפש את פתרונה, אתה יכול למצוא אותה בכוחה הטהור של תבונתך ותו לא, שכן במתמטיקה אין "לעולם לא נדע".

ובגרמנית זה נשמע עוד יותר משכנע:

> Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik giebt es, kein Ignorabimus!

לא לחינם רצה הילברט להדגיש את אמונתו באי-קיומו של Ignorabimus (לעולם לא נדע) במתמטיקה. בשליש האחרון של המאה הי"ט נשבו בין פילוסופים ומדענים לא מעטים באירופה רוחות של פסימיזם אינטלקטואלי ושל הטלת ספק באשר ליכולתו של המדע להתמודד עם שאלות יסוד של הכרת העולם הסובב אותנו. הפיזיולוג הגרמני החשוב אמיל דובואה ריימונד (Emil du-Bois Reymond 1818-1896) טבע ב-1872 בהקשר זה את הביטוי הלטיני *ignoramus et ignorabimus* ("איננו יודעים ולעולם לא נדע") שזכה לפופולריות רבה כביטוי קולע למי שטען למוגבלותו של המדע. הילברט, לעומתו, היה אופטימיסט ללא תקנה ביחס ליכולתו של המדע, ובוודאי של המתמטיקה, ולא החמיץ הזדמנות כדי להדגיש זאת. בוודאי שגם הכינוס הבינלאומי של 1900 שימש מסגרת נאותה להעברת המסר.

כדי להבין את תמונת המתמטיקה של הילברט ב-1900 כפי שהיא משתקפת בהרצאתו בפריז, עלינו לבדוק באופן מדוקדק ומפורט את הבעיות שהוא מציג ברשימה. ברם, בדיקה כזו תחרוג ממוקד העניין שלנו כאן, והקורא המעוניין יכול למצוא ספרות רבה שדנה בעניין.[1] אציין כאן רק נקודה אחת, חשובה מאוד לענייננו: הילברט היה מתמטיקאי רב-גוני שהשאיר אחריו תרומות מרכזיות בתחומים רבים, ומרוחקים זה מזה בדיסציפלינה כולה; אבל אם ניתן להצביע על תחום אחד שבו הוא הצטיין מעל לכול, ואשר מחבר במידה רבה בין מירב החלקים שבכל עיסוקיו, הרי שזה התחום של תורת המספרים. ואמנם, ברשימת 23 הבעיות מ-1900 אנו מוצאים לא פחות מאשר שש בעיות הנוגעות באופן ישיר לתורת המספרים, ועוד כמה שנושקות לו. משום כך, קשה להתעלם מן ההפתעה הגדולה שמצפה לנו בהקשר הזה: הוכחת המשפט האחרון של פרמה, הגם שהוזכרה בהקדמה של הילברט כדוגמה לבעיה ראויה, **אינה** מופיעה בין 23 הבעיות החשובות של הילברט למאה החדשה! יתרה מזאת: מבין הנושאים הרבים שבהם עסק הילברט במשך בקריירה הרב-גונית שלו, ובין התרומות הרבות שלו לתורת המספרים על ענפיו השונים, הוא לא תרם תרומה משמעותית אחת לשאלת משפט פרמה, וככל הידוע מעולם לא הקדיש מאמצים כנים לפותרה. קשה להתעלם, אמרנו, אבל סינג דווקא מצליח בקלות להתעלם מכך בספרו, על אף שהוא מספר על רשימת הבעיות ומדגיש את חשיבותה.

מדוע לא כלל הילברט את הוכחת משפט פרמה ברשימתו מ-1900? מדוע הוא לא עסק במשפט פרמה? מה אנו למדים מכך על הילברט, על הבעיה הזו, ועל בעיות מתמטיות חשובות בכלל? הילברט היה אדם ססגוני מאוד, שאגדות רבות ומפורסמות נרקמו סביבו. שתי אגדות כאלה, שנוגעות למשפט פרמה, ראויות לאיזכור כאן. אגדה אחת, שאותה מביא סינג בספר ובעקבותיו רבים חזרו עליה במסגרות שונות, מספרת כי כאשר נשאל הילברט מדוע לא ניסה הוא בעצמו להוכיח את המשפט, השיב: "לפני שאתחיל, עלי להשקיע כשלוש שנים של לימוד אינטנסיבי, ואין לי זמן רב כל כך לבזבז על מה שרבים סיכויו להיכשל". אם אמנם אמר הילברט כדברים האלה, טעות יהיה לפרשם (כפי שעושה סינג) כאילו פחד הילברט מן הקושי של הבעיה וכאילו בשל כך ויתר על הניסיון להתמודד איתה. לא חסרות דוגמאות של בעיות קשות עד מאוד שבהן הילברט השקיע הרבה יותר משלוש שנים מחייו. כך למשל, פריצתו הגדולה של הילברט בשמי המתמטיקה הושגה ב-1888 כאשר הוא הצליח להוכיח באופן מבריק ומבטיח משפט יסודי בתורת האינווריאנטים האלגבריים, שהעסיק ותסכל משך שנים רבות את מיטב המומחים בתחום.

דוגמאות אחרות: פתרון בעיית וארינג (Waring) בתורת המספרים ב-1909 (היא היתה בלתי פתורה מאז 1770), פתרון למשוואת בולצמן ב-1912, ניסוח משוואות השדה בתורת היחסות הכללית לאחר שנים רבות של מאמץ אינטנסיבי מצד אינשטיין וכמה מחבריו להגיע אליהן. לא איש כהילברט, אשר שלל אפשרות של ה- *ignorabimus* במתמטיקה, יירתע מבעיה רק משום שאחרים נכשלו בה. היפוכו של דבר: מכך הוא יכול היה לשאוב רק עידוד ומוטיבציה ישירה.

אגדה אחרת מתייחסת לפרס הכספי שהוצע ב-1906 למי שיוכיח את משפט פרמה, ושעצם קיומו היה לאגדה לא פחות נפוצה מאשר הסיפור על משפט פרמה עצמו. הפרס, בגובה מאה אלף מארק

[1] למשל: Jeremy J. Gray, *The Hilbert Challenge*, Oxford University Press (2000).

דאז, נתרם כקרן ע״י יהודי-גרמני בשם פול וולפסקהל (Paul Wolfskehl 1856-1906), בן למשפחה אמידה של בנקאים. על פי הסיפור המקובל, שגם סינג שב ומזכיר בספרו, סיבת התרומה היתה קשורה לאהבה נכזבת שבעקבותיה שקע וולפסקהל בדיכאון עמוק עד כדי החלטת התאבדות. וולפסקהל המדוכא לא מימש את תכנית ההתאבדות רק משום שבשעותיו האחרונות החל לדפדף בספרים העוסקים בניסיונות ההוכחה של המשפט, וכך שקע בהתעניינות הולכת וגוברת בהן, מה שבסופו של דבר הציל את חייו. על פי אותו סיפור, הקרן נתרמה לאוניברסיטת גטינגן, בה פעל הילברט, כאות הוקרה למתמטיקה ולמשפט עצמו שהציל את חיי וולפסקהל.

ובכן, הילברט היה ממונה על קרן וולפסקהל ועל רווחיה, והוא עשה בהן שימוש משכיל לצורך ארגון כנסים חשובים בעירו, שרובם עסקו בפיזיקה תיאורטית, וחלקם היו ממש לאבני דרך בהיסטוריה של הפיזיקה בתחילת המאה העשרים. חשוב להדגיש, אם כן, שלמשפט האחרון של פרמה היתה תרומה חשובה ובלתי-צפויה, להתפתחות הפיזיקה המתמטית בתחילת המאה העשרים – וזו אמת לאשורה.[2] האגדה השנייה, שמסבירה מדוע לא ניסה הילברט להוכיח בעצמו את המשפט, מייחסת לו את התשובה המפורסמת: ״למה לי לשחוט את התרנגולת המטילה ביצי הזהב?״ כלומר: הילברט לא היה מעוניין, כביכול, שהבעיה תיפתר וש״ביצי הזהב״—דהיינו, הכספים שהניבה קרן וולפסקהל—ייעלמו מידיו. גם את המשפט הזה ייתכן כי הילברט אמר, אבל קשה מאוד להעלות על הדעת מצב שבו נפשו המתמטית של הילברט חשקה מאוד לעסוק בבעיה, ושִׂכלו האדמיניסטרטיבי מנע זאת ממנו. הטענה שמתמטיקאי כמו הילברט העדיף לא לפתור את ״הבעיה החשובה ביותר בתחומו״, כביכול, רק כדי להבטיח מקור הכנסה לפרוייקטים אחרים שרצה לקדם לא פחות אבסורדית מאשר הסברה שהוא ניסה לפתור את הבעיה רק משום שהוא היה זקוק לכסף של הפרס.

הסקירה שאציג בהמשך תראה שאם הילברט לא הקדיש מאמצים ניכרים להוכיח את משפט פרמה, הרי שהסיבה לכך היתה פשוטה וברורה: הילברט לא סבר שהחשיבות האמיתית של הבעיה מצדיקה מאמץ כזה. אבל כדי להבהיר מעט בשלב זה את ההקשר הרחב יותר של רשימת הילברט, ושל מיקומן של בעיות חשובות, חשוב להתייחס לאחת הבעיות שהוא כן כלל, ואשר כבר הוזכרה לעיל, בעיית רימן. כמו בעיית פרמה, גם בעיה זו קשורה בהשערה הנוגעת למספרים השלמים (ליתר דיוק: בשאלת התפלגותם של המספרים הראשוניים – ראו מסגרת 1). בעיית רימן עלתה מתוך עבודתם של מתמטיקאים גדולים כגון אוילר, גאוס (Carl Friedrich Gauss 1777-1855), דיריכלה (Peter Lejeune Dirichlet 1805-1859) וְרימן (Bernhard Riemann 1826-1866), והיא העסיקה בהמשך מתמטיקאים בולטים אחרים שניסו בה את כוחם. כמו בבעיית פרמה, גם במרכזה של בעיה זו עומדת תבנית מספרים, המכונה במקרה הזה ״פונקציית זטא״:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots .$$

רימן הראה כי קיים קשר הדוק בין המיקום של אותם מספרים s שעבורם הפונקציה הזאת שווה 0, לבין השאלה של התפלגות המספרים הראשוניים. חשוב לציין שהפונקציה מקבלת ערכים s שהם מספרים מרוכבים, וגם ערכי הפונקציה עצמה הם כאלה. זו עובדה מעניינת כשלעצמה, שכן מתברר שכדי לברר אחת השסוגיות המרכזיות הקשורות במספרים ראשוניים, שהם מספרים שלמים, אנו נעזרים בתחום של מספרים שלכאורה אין קשר נראה לעין בינם לבין השלמים. העבודה החשובה של רימן בתחום הזה התבססה על ההנחה שכל הערכים s המאפסים את הפונקציה יהיו מהצורה

$$s = \tfrac{1}{2} + ai$$

כאן i מייצג את השורש הריבועי של 1- ואילו a מציין מספר ממשי כלשהו. השערת רימן, אם כן, היא הטענה שפוקנציית הזטא מתאפסת רק על ערכים של s שהם מהצורה הנ״ל.

הוכחת השערת רימן תחדיר סדר ויציבות בלתי צפויים לעולם הכאוטי לכאורה של המספרים הראשוניים. כל מתמטיקאי שהיה נדרש היום לחבר רשימה דומה לזו של הילברט ב-1900 היה כולל בה, ללא צל של ספק, את השערת רימן (ואכן היא כלולה ברשימה של מכון קליי משנת 200, לדוגמה). בספרים שהזכרתי לעיל ימצא הקורא הסקרן תיאור מקיף של מסכת המאמצים המעניינים שנעשו ב-150 השנה האחרונות כדי להתמודד עם ההשערה, ויבין את מקור היוקרה שלה כבעיה מתמטית לא פתורה. אבל בתקופתו של הילברט הבחירה לא היתה מובנת מאליה באותה מידה ולו בשל מספר השנים הלא רב יחסית שבהן ההשערה היתה ידועה. הנה כי כן,

---

[2] Leo Corry, *David Hilbert and the Axiomatization of Physics*: *1898-1918*, Dordrecht, Kluwer (2004), Ch. 5.

הילברט ניצב בפני שתי בעיות לא פתורות וידועות בתחום דומה—תורת המספרים—ומחליט לכלול רק אחת מהן ברשימתו: רק את השערת רימן ולא את הוכחת משפט פרמה. האם ניתן ללמוד מכך משהו על הבנתו לגבי חשיבותן של בעיות בכלל? ובכן, הילברט עצמו ציין בהרצאתו ש"לאחר דיון מעמיק בנוסחת רימן למספרים ראשוניים נוכל אולי יום אחד לפתור בצורה מדויקת את בעיית גולדבך." הכוונה כאן להשערה נוספת, לא מוכחת עד היום, בתחום תורת המספרים, שהועלתה ב-1742 על ידי המתמטיקאי כריסטיאן גולדבך (Christian Goldbach 1690-1764). על פי ההשערה, כל מספר זוגי ניתן לכתיבה כסכום של שני מספרים ראשוניים. הילברט הצביע כאן על מדד מובהק לחשיבותה של בעיה מתמטית, דהיינו, הרלוונטיות שלה לפתרון ולהבנה של מספר רב ככל האפשר של בעיות ותחומים מתמטיים אחרים. לגבי הבעיה הבאה ברשימתו הילברט הוסיף וציין שהיא "לא פחות חשובה ומעניינת ואף בעלת תחום חלות רחב עוד יותר". כאמור, הילברט כלל ברשימה עוד בעיות שקשורות בתורת המספרים, וביניהן "חוקי ההדדיות מסדר גבוה", "מציאת קריטריון לפתרון אלגוריתמי של משוואות דיופנטיות" (כלומר משוואות שפתרונן מספרים שלמים בלבד), ובעיה אחרת בתחום המכונה "תבניות ריבועיות". כלומר: תורת המספרים תופסת מקום מרכזי בעולם שהילברט רוצה להציג כאתגר למאה החדשה, ובמרכזו ניצבות מספר בעיות חשובות, אבל הוכחת משפט פרמה **איננה** אחת מהן.

מעניין להיווכח שאפילו במבט לאחור, לאחר הוכחת ויילס וכפי שהדברים נראים היום, הילברט הוכיח חוש מידה מאוזן ביותר בעת בחירתו. אם בוחנים את התפתחות בעיית רימן לאחר 1900, אנו מבינים שהמאמצים שהושקעו בה הובילו לתיאוריות ולרעיונות רבים ומגוונים. ויותר חשוב: יש היום מספר רב של תוצאות שתלויות בנכונותה של השערת רימן. כלומר, ההשערה היא יסוד ונקודת מוצא לתחום נרחב של רעיונות מתמטיים נוספים. הדבר גם נכון, ולעתים במידה רבה יותר, לבעיות האחרות שהילברט כלל ברשימתו (למשל בעיית 10, העוסקת באפשרות של מציאת אלגוריתם כללי לפתרון כל משוואה דיופאנטית נתונה). משפט פרמה, לעומת זאת, מציג תמונה אחרת, אותה אפרט בהמשך.

רשימת הבעיות של הילברט הציתה את דמיונם של מתמטיקאים רבים אז, וגם היום היא מוזכרת לעתים קרובות. כמו בכל פרק אחר בתולדות המתמטיקה חשוב לנתח את המעמד האמיתי של הרשימה באופן שקול ולתת לה את ערכה האמיתי ואת הכבוד המגיע לה, אבל גם להבין את הקשרה האמיתי ולשפוט אותה שיפוט מאוזן. מבלי שאנסה לעשות זאת במאמר הזה, חשוב לציין, למשל, שלא כל אחת מעשרים ושלוש הבעיות שברשימה תאמו את הקריטריונים של הילברט עצמו לבעיה חשובה. גם אמירתו של הילברט המצוטטת לעיל, שעל פיה תורה מתמטית, או בעיה, לא תיחשב לשלמה אם לא ניתן להסבירה לאדם הראשון שתפגוש ברחוב, תואמת מעט מאוד מן הבעיות שברשימה, והיא דווקא נכונה מאוד לגבי בעיית פרמה (כוונתי היא לניסוח הבעיה, אבל בשום אופן לא להוכחת ויילס, שהבנתה דורשת מטען כבד מאוד של מתמטיקה רלוונטית וזמן פנוי בכמויות נכבדות כדי לרדת לסוף דעתו). אולי זו בעצם הסיבה מדוע הילברט הזכיר את בעית פרמה בהקדמה, על אף שהוא לא כלל אותה ברשימה עצמה. גם בהסתכלות לאחור לא כל הבעיות התבררו כחשובות באותה מידה, על פי כל קריטריון שנרצה לאמץ.

מן הנאמר עד כה, ברור מדוע צריך להתייחס בספקנות רבה ובזהירות לקביעות פסקניות, דוגמת זו של סינג, כאילו משפט פרמה (או כל בעיה אחרת, לצורך העניין) היווה "בעיה מתמטית חשובה", לא כל שכן, "הבעיה המתמטית החשובה ביותר בעולם", כפי שנטען בכריכת הספר. בהמשך אנסה לעמוד על מספר נקודות חשובות בסיפור כולו כדי לספק הערכה מאוזנת יותר של מיקום הבעיה לאורך ההיסטוריה של 250 שנה של מתמטיקה.

כדי לסיים פרק זה ברצוני להצביע על כוחה ומעמדה של רשימת בעיות דוגמת זו של הילברט כעבור מאה שנים. אחד האתגרים שהילברט קבע לדורות הבאים בעצם ניסוח הרשימה שלו הוא הצורך לנסח רשימה דומה עם תחילת המאה הבאה. מכיוון שבשנת 2000 דובר בעצם בתחילת המילניום, ולא סתם של עוד מאה, הרי שהאתגר התברר כמכובד ומחייב שבעתיים. מבין הניסיונות שנעשו בעניין הזה, הבולט והמוכר מכולם הוא זה של שבע הבעיות שנכללו ברשימה של מכון קליי. שלוש עובדות חשובות מבדילות בין שתי הרשימות, זו של הילברט ב-1900 וזו של מכון קליי בשנת 2000. העובדה הראשונה היא שבעוד הילברט חיבר לבדו רשימה בעלת תוקף גורף עבור המתמטיקה כולה, בשנת 2000 נדרשו מספר מתמטיקאים בולטים כדי לחבר רשימה בעלת תוקף וסמכות מקצועית דומים. העובדה השנייה קשורה בפרס הגבוה שיינתן לפותרים, רעיון שהילברט לא העז לעלות על דעתו. העובדה השלישית היא המהירות שבה הרשימה הזו הפכה נחלתם לא רק של הקהילה המתמטית כולה, אלא של קהל עצום ורב של ציבור מתעניין, ללא זיקה מקצועית ישירה למתמטיקה. שלוש עובדות אלו מעידות כאלף עדים על השינויים העמוקים שחלו במאה השנים שחלפו בדיסציפלינה המתמטית, במעמדה הפנימי והציבורי, ובהקשר החברתי הרחב יותר שבה היא פועלת. מגבלות המקום לא מאפשרות לערוך כאן השוואה על מהות הבעיות והרכבן, מה שיכול להאיר היבטים מעניינים נוספים של ההתפתחות הזו. כמו כן, רק העתיד יגלה אם לרשימה

של מכון קליי תהיה השפעה דומה לזו שהיתה לרשימת הילברט. אבל בינתיים ניתן לקבוע בוודאות שמה שנותר משותף להילברט ולחברי הועדה של שנת 2000 היא ההבנה של מרכזיותן של בעיות לא פתורות לפיתוח הולך ונמשך של תורות ורעיונות מתמטיים, ושל המתמטיקה כולה כדיסציפלינה.

הדרמה של משפט פרמה – היתה או לא היתה?

לשם הכנת ספרו סיימון סינג נדרש להשקיע מאמצים גדולים באיסוף והבנה של חומר רב, ואת החומר הזה הציג בצורה ברורה ושווה לכל נפש. משימה כלל וכלל לא פשוטה זו הסתמכה גם על יצירת מבנה דרמטי שסיפק תשתית רחבה לעלילה הבסיסית של הסיפור, ונועדה לרתק את הקוראים. אולם מי שיקרא את הספר בעיון יגלה עד מהרה שאותו מבנה דרמטי הוא מוגזם ומלאכותי. תולדות המתמטיקה מתאפיינות ברמת דרמטיות נמוכה בהרבה מזו שמוצגת בספר, או אם לנסח זאת בצורה מדוייקת יותר, בדרמטיות מסוג אחר לחלוטין. כאשר בוחנים תהליכים ארוכי-טווח ואת האופן שבו השתנו התפישות הבסיסיות ביותר של המתמטיקה לאורך ההיסטוריה, הדרמטיות המיוחדת שבבסיס תולדות המתמטיקה באה לידי ביטוי מובהק. כל אחד מהשלבים בהיסטוריה הזו, לעומת זאת, נעדר בדרך כלל את סוג הדרמטיות שסינג משווה להם בספר. מיד נתאר כמה דוגמאות לכך, אבל כדאי לפתוח דווקא במספר ציטוטים מתוך הספר שבהם הצליח סינג להעביר בצורה יפה מאוד, לטעמי, את המהלכים המרכזיים בסיפור ואת משמעותם. כך למשל, הדימוי הבא אשר מובא מפי ויילס כדי לתאר את דרכו אל ההוכחה:

> הדרך הטובה ביותר לתאר את חווייתי המחקרית במתמטיקה היא לדמיין שנכנסים לדירה חשוכה. אתה נמצא בחדר הראשון והכול חשוך, ממש חשוך, ואתה מתחיל להיתקל ברהיטים הפזורים. בהדרגה אתה לומד איפה כל רהיט נמצא ולבסוף - לאחר כשישה חודשים – אתה מוצא את מתג החשמל ולפתע הכול מואר ואתה יכול לראות בדיוק איפה אתה עומד.

לא צריך להיות מתמטיקאי בסדר גודל של ויילס, או להיות עסוק בבעיה כל-כך מורכבת ובעלת היסטוריה טעונה, כדי להיות שותפים לתחושה הזאת, המתוארת פה בצורה קולעת כל כך. תחושה זו היא נחלתו של כל מי שהתמודד אי-פעם עם בעיה מתמטית וגישש באפלה, עד שלבסוף היא הוארה באור נגוהות, כאשר נמצא אותו מתג. במקרה של ויילס מדובר על אותם רגעים מרגשים בוודאי מבחינתו שבהם מצא את הפרטים החשובים שעוד נותרו לו כדי לסיים את הוכחתו. על כך מוסיף סינג ואומר:

> לאורך שמונה שנות המסע של ויילס הוא נעזר למעשה בכל פריצות הדרך של תורת המספרים במאה ה-20 ושילב אותן בהוכחה יחידה אחת בעלת עוצמה אדירה. הוא יצר, יש מאין, טכניקות מתמטיות שלמות ושילב אותן עם טכניקות מסורתיות בדרכים שלא נחשבו אפשריות קודם לכן.

ומן התיאור הקולע של עבודת ויילס כמסע מתמטי-אישי מורכב ורב-משמעות, עובר מיד סינג לטענה הסוחפת והדרמטית שעליה מושתת הספר כולו:

> המשפט האחרון של פרמה הפך ל"גביע הקדוש" (Holy Grail) של המתמטיקה כולה. חיים שלמים וסטגוניים הוקדשו – ולעתים אף הוקרבו – למען מציאת ההוכחה.

"חיים שהוקדשו ואף הוקרבו" זה לא עניין של מה בכך, ובמיוחד כאשר חלק מן האנשים—בתיאורו של סינג—ממש התאבדו בדרכם (הלא מוצלחת) אל ההוכחה. כאן מדובר בדרמה אמיתית שהקורא ילך אחריה בשקיקה, אבל שדורשת מאיתנו התייחסות ביקורתית קצת יותר, תוך בדיקה מדוקדקת של העובדות ההיסטוריות. נמשיך לעקוב בעזרת סינג:

> אוֹילר, גדול המתמטיקאים של המאה הי"ח, נאלץ להודות בכישלון. סופי ז'רמן אימצה זהות של גבר כדי לחקור תחום אסור על נשים, והשיגה את פריצת הדרך המשמעותית ביותר של המאה הי"ט. אווריסט גלואה הנועז שירבט את תוצאות מחקרו עמוק אל תוך הלילה בטרם יצא אל מותו בדו-קרב ב-1832. יוטאקה טאנייאמה, שתובנותיו יובילו בסופו של דבר לפתרון, שם קץ לחייו באופן טרגי ב-1958. לעומת זאת, פאול וולפסקהל, תעשיין גרמני נודע, טען שפרמה הציל אותו מהתאבדות, ומיסד פרס עשיר לאדם הראשון שיוכיח את המשפט.

ובכן, זה נכון שאוילר היה גדול המתמטיקאים של המאה ה-18, ושהוא לא פתר את הבעיה, כלומר, הוא לא הוכיח את השערת פרמה למקרה הכללי. ייתכן שאפילו הוא הודה בכך, אם כי לי לא ידוע איפה הוא עשה את זאת ובאילו מילים. לעומת זאת, אוילר הוכיח בצורה יפה, ותוך כדי פיתוח טכניקות חדשות, מקרים פרטיים של המשפט. אבל הנקודה החשובה מבחינה היסטורית היא, שבעת שאוילר עסק בבעיה (נושא אחד, שולי יחסית, מבין עשרות סוגיות חשובות ומעמיקות ביותר, הן מתמטיות והן פיזיקליות, להם הקדיש מחשבה לאורך חייו) הבעיה עוד לא נחשבה לשונה במהותה, ובוודאי שלא לבעיה בעלת חשיבות מיוחדת, בהשוואה לבעיות רבות אחרות בתחום תורת המספרים. היתה זאת רק עוד אחת מן הבעיות שפרמה לא פתר והשאיר לבאים אחריו. בל נתאר לנו את אוילר, אם כן, מוסר איזה הודעה דרמטית לעיתונות שבה הוא מבשר קבל עם וקהילה מתמטית על כשלונו להתמודד עם ״הבעיה החשובה ביותר בתולדות המתמטיקה״.

גם סיפורה של סופי ז׳רמן (Sophie Germain 1776-1831) הוא אכן מרתק. כשרונה המתמטי של סופי ז׳רמן היה יוצא דופן בכל קנה מידה. היא ניהלה לאורך שנים התכתבות מרתקת עם מתמטיקאים חשובים כמו גאוס ולג׳נדרה (Adrian Marie Legendre 1752-1833), כשהיא פונה אליהם תחילה תחת שם העט ״מסייה לבלאנק״, כדי לא להסגיר את עובדת היותה אשה, שמא לא תקבל את תשומת הלב הראויה. ובאמת, כניסת נשים לחיים האקדמיים באירופה בכלל ולמחקר מתמטי פעיל בפרט, היא תופעה די מאוחרת, וסופי ז׳רמיין היא אחד משתי נשים יחידות, שמוכרות בתרומתן למתמטיקה במאה הי״ט (השניה היא סופיה קובלבסקייה - Sofia Kovalevskaya 1850-1891). לחששה של ז׳רמיין היה בהחלט על מה להתבסס, אם כי בסופו של דבר כאשר נודע לשני בני שיחתה שמדובר באשה, הערכתם רק גברה. ולְמה שנוגע לסיפורנו: גם אם ז׳רמיין אימצה זהות של גבר ״כדי לחקור תחום אסור על נשים״ (משפט פחות או יותר נכון, אבל בעל קונוטציה לא כל כך מדוייקת בפני עצמו) הרי שה״תחום האסור״ הזה, היה המדע בכלל או לכל הפחות המתמטיקה, אבל בשום אופן לא המחקר הקשור בהשערת פרמה כתחום ידע בפני עצמו. התיאור של סינג כאן הוא מגמתי ולא מדוייק במקרה הטוב. בהמשך עוד אעיר על תרומתה החשובה של ז׳רמיין לניסיונות להוכיח את השערת פרמה.

בהתייחסותו אל אֶווריסט גלואה (Evariste Galois 1811-1832) סינג ממש הגדיש את הסאה. דמותו הססגונית של גלואה אהובה למדי על מתמטיקאים, היסטוריונים של המדע, וכותבי ספרים פופולריים על מתמטיקה, ואין בכך כל פליאה. בעוד שרוב הביוגרפיות של מתמטיקאים הן צפויות מבחינה חיצונית ודומות זו לזו (למד ב-, סיים דוקטורט ב-, התמנה לפרופסור ב-, חקר את -, הצטיין ב-, וכו׳), גלואה הוא היחיד במקצוע שעליו אפשר לכתוב שמת בדו-קרב על רקע רומנטי – לא פחות ולא יותר. גם הלהט המהפכני של גלואה זכה לתשומת לב רבה, יחד עם ההתעלמות הגמורה שבה התקבלו רעיונותיו ותרומתו מצד חשובי המתמטיקאים בתקופתו.

בשנתיים האחרונות לחייו הקצרים כתב גלואה מספר עבודות שלא זכו לתגובה, ולמעשה הן לא נקראו כלל על ידי המתמטיקאים שאליהם הן נשלחו (מעניין לציין שדווקא סופי ז׳רמיין היתה בין הראשונים להבחין, עוד בחייו, בכשרונו הנדיר של גלואה). העבודות הללו כללו רעיונות חשובים ומקוריים ביותר, שרק עשרים שנה מאוחר יותר זכו לפרסום. השאלה שאליה קשורים רעיונותיו של גלואה עמדה אף היא פתוחה מאות בשנים, והיתה לכל הדעות מרכזית ומרתקת הרבה יותר מהניסיונות להוכיח את השערת פרמה: מציאת הנוסחה למשוואה פולינומית מסדר חמישי ומעלה (הפתרונות למשוואות מסדר שלישי ורביעי היו ידועים עוד מהמאה הט״ז). שני מתמטיקאים, רופיני (Paolo Ruffini 1765-1822) ואבל (Niels Henrik Abel 1802-1829), הקדימו את גלואה בהבנה היסודית שבניגוד למה שידוע במקרה של משוואות ריבועיות, קוביות או מסדר ארבע, לא קיימת נוסחה אחת כללית, הבנויה מסדרת פעולות אלגבריות פשוטות (סכום, חיסור, כפל, חילוק, והוצאת שורשים מכל סדר שהוא) על המקדמים, ושממנה מתקבלים הפתרונות לכל משוואה פולינומית מסדר חמש. עבודותיו המהפכניות של גלואה היו מכוונות לשאלה הכללית והמדוייקת עוד יותר: בהינתן משוואה פולינומית אחת בסדר כלשהו, האם ניתן למצוא את כל פתרונותיה באמצעות סדרת פעולות אלגבריות פשוטות (סכום, חיסור, כפל, חילוק, והוצאת שורשים מכל סדר שהוא) על המקדמים שלה?

גלואה לא רק פתר את הבעיה הזו, אלא שבעשותו כך העניק לעולם המתמטי כלי רעיוני בעל השפעה מרחיקת לכת בתחומים רבים ומגוונים, שבלעדיו אין לתאר את המתמטיקה וחלק ניכר מהפיזיקה במאה העשרים, הלא הוא מושג ה״חבורה״. ברור שבהוכחת ויילס, ובחלק מהעבודות שעליהן הוא התבסס, מושג החבורה בא לידי ביטוי באופן בולט, באותה מידה שמושגים רבים אחרים (פונקציה או שדה מספרים, לשם דוגמה) מופיעים היום דרך קבע בכל מחקר מתמטי של ממש. הקשר המרומז בין המאמצים האדירים, כביכול, להוכיח את השערת פרמה, לבין העובדה שגלואה ״שירבט את תוצאות מחקרו עמוק אל תוך הלילה בטרם יצא אל מותו בדו-קרב ב-1832״

הם מופרכים מן היסוד, ולא רק בגלל שאין כל קשר בין רעיונותיו של גלואה לבין ניסיון כלשהו להוכיח את ההשערה; למעשה לא ידוע כלל שגלואה התעניין אי-פעם בהשערה הזאת. הקשר המרומז הזה הוא מופרך גם מכיוון שהוא מניח כמובן מאליו עוד אחד מהמיתוסים הרבים שצצו סביב דמותו של גלואה, דהיינו, שאת רעיונותיו החשובים על אודות תורת החבורות הוא שרבט ביום האחרון לחייו. תרחיש כזה היה יכול לשרת סרט מתח על חייו ולהאדיר עוד יותר את הסטטוס המיתי של גלואה, אך למרבה הצער הוא לא כל כך קשור למציאות ההיסטורית. גלואה בעצם כתב מספר מאמרים בנושא, או בנושאים האחרים, בשנתיים האחרונות לחייו וחלקם אפילו התפרסמו (הגם שכאמור החשובים מביניהם לא ראו אור ולא נבדקו כראוי על ידי המתמטיקאים שאליהם נשלחו). בלילה האחרון לחייו גלואה אכן כתב על מתמטיקה, ואפילו הזכיר חבורות, אבל לא שם המקום שבו פיתח את רעיונותיו החשובים, והמקור שממנו אלה נודעו מאוחר יותר. ובכן, אפילו חייו הדרמטיים בהחלט של גלואה לא מצליחים ליצור פרק דרמטי נוסף בתולדות משפט פרמה.

וכך גם בנוגע ליוטאקה טאנייאמה (Yutaka Taniyama 1927-1958), שגם את התאבדותו המסתורית סינג מגייס לטובת הדרמטיות המדומה של הסיפור על משפט פרמה. ב-1955 הציג טאנייאמה בסימפוזיון שהתקיים בטוקיו שתי בעיות שעל בסיסן נוסחה מאוחר יותר השערה שקשורה ליחס בין "עקומות אליפטיות" לבין "שדות של תבניות מודולריות" - שני מושגים מתמטיים חשובים, שלפני ההשערה איש לא העלה בדעתו כי יש קשר ביניהם. השערה זו, הידועה בשם "השערת טאנייאמה-שימורה" נקשרה שנים רבות מאוחר יותר (כפי שאזכיר בהמשך) להוכחה אפשרית של משפט פרמה, ולמעשה הוכחת ויילס להשערת פרמה היא לא אחרת מאשר הוכחת מקרה מרכזי של "השערת טאנייאמה-שימורה". אבל טאנייאמה עצמו לא חשב כלל על האפשרויות הללו ב-1955. הסיבה להתאבדותו ב-1958 נותרה תעלומה לא פתורה, אבל ברור לכול שאין לה כל קשר ל"השערת טאנייאמה-שימורה", ולא כל שכן, ממילא, להוכחת משפט פרמה, כפי שקורא תמים בספרו של סינג עשוי לחשוב.

האלמנט האחרון מבין אלה שבעזרתם מנסה סינג להגביר את האופי הדרמטי של הסיפור קשור לשמו של וולפסקהל ולהתאבדותו שלא היתה, בזכות משפט פרמה כמובן. כפי שכבר ציינתי, על פי האגדה שסינג מאמץ בחדווה אל תוך תיאורו, וולפסקהל תרם את הקרן למתן פרס כספי משמעותי למי שיוכיח את המשפט, בעקבות אהבה נכזבת לצעירה שמעולם לא זוהתה. בייאושו הרומנטי כי רב, החליט וולפסקהל לשים קץ לחייו ביריה בחצות הליל. את השעות שנותרו עד אז החליט וולפסקהל לבלות בספרייתו כאשר הוא מעלעל, לא פחות ולא יותר, בספרי מתמטיקה העוסקים בניסיונות להוכיח את השערת פרמה. עיונו המעמיק בספרות הזו ריתקה אותו עד כדי כך— מַשָל היה רבי אליעזר וחבריו שהיו מסובין בבני-ברק והיו מספרים ביציאת מצרים בליל הסדר— שרק עם עלות השחר הבחין בזמן שחלף לו. התעמקותו במתמטיקה, ובפרט במשפט פרמה, הסיטו אותו מהחלטתו להתאבד: "המתמטיקה חידשה את רצונו לחיים", צוהל סינג. "וולפסקהל שיכתב את צוואתו לאור האירועים של אותו הלילה. פרס של מאה אלף מארק היה דרכו לשלם את חוב הכבוד שלו לחידה שהצילה את חייו."

ביחד עם הסיפורים האחרים שבספר, סיפורו של וולפסקהל תורם את המרכיבים האחרונים והמכריעים—אהבה, כסף, נקודת אור בחיים עגומים—להפיכת הדרמה למושלמת. חבל רק שהסיפור הוא בדיה. ב-1997, במסגרת החגיגות לציון הישגו האדיר של ויילס, החליט מתמטיקאי גרמני מהעיר קאסל, קלאוס בארנר, לנסות ולגלות כמה עובדות מוצקות יותר על חייו של התורם המפורסם בתולדות המתמטיקה, פאול וולפסקהל.[3] בארנר חקר מקורות שונים על אודות חייו של וולפסקהל, וסיפורו הוא מעט שונה מן האגדה המקובלת. וולפסקהל למד רפואה וסיים את לימודיו ב-1880, ככל הנראה בכתיבת תיזה בתחום רפואת העיניים. עוד בזמן לימודיו התחילו להתגלות אצלו סימפטומים ראשוניים של מחלת הטרשת הנפוצה, ו-וולספקבל הגיע למסקנה שלא יהיה לו עתיד במקצוע כמו רפואה. הוא החליט לשנות כיוון וללמוד מתמטיקה, מקצוע שממילא תמיד אהב, ושבו יוכל לעסוק גם אם יהיה מרותק בעתיד לכיסא גלגלים. בין 1881 ו-1883 הוא למד בברלין, ושמע את הרצאותיו של אדורד ארנסט קומר (Edward Ernst Kummer 1810-1893), אחד המתמטיקאים שתרמו את התרומות החשובות בדרך להוכחת משפט פרמה, כפי שעוד נראה. אין ספק שוולפסקהל התעניין במשפט פרמה עוד בתקופה ההיא, ואף פרסם מספר עבודות בתחום תורת המספרים האלגבריים. ב-1890 איבד למעשה וולפסקהל את יכולת התנועה שלו, ומשפחתו שיכנעה אותו להתחתן כדי שיהיה מי שיטפל בו בהמשך. בחירת הכלה, למרבה הצער, לא היתה מוצלחת עבור וולפסקהל, ועל פי חקירתו של באנר, לאחר שנישא ב-1903

[3] המאמר הוא: Klaus Barner, “Paul Wolfskehl and the Wolfskehl Prize”, *Notices AMS* 44 (10), November 1997, 1294-1303. באתר האינטרנט של סינג יש הפניה למאמר הזה, אבל סינג לא ממש מדגיש עד כמה הוא משנה את האופי של הסיפור שהוא עצמו מספר.

חייו של הפכו לגיהנום. ב-1905 וולפסקהל אכן שינה את צוואתו לטובת אהבת חייו היחידה, שהעניקה משמעות כלשהי לשנותיו האחרונות, תורת המספרים. גם סוג של רומנטיקה, ללא ספק, אבל לא במובן המקובל בסיפור על וולפסקהל והפרס. אולי גם הרצון להפחית במעט את ההון שהותיר לאישתו, שאותה תיעב ככל הנראה, שיחק כאן תפקיד. על כל פנים, אם אכן שקל וולפסקהל להתאבד היה זה בגלל הדיכאון העמוק שבו היה נתון עקב מחלתו, ולא בשל אהבה נכזבת לאשה לא ידועה. משפט פרמה ממילא לא הציל את חייו.

המשפט האחרון של פרמה – הסיפור האמיתי

הגיע, אם כן, הזמן, להגיד משהו קונקרטי יותר על משפט פרמה ועל תולדות הניסיונות להוכיחו. אסקור עתה בקצרה כמה אבני דרך מרכזיות בסיפור, ומיד יתברר שמאז כתב פרמה בשולי ספרו, מעט לאחר 1630, ועד 1984, כמות המחקרים החשובים שכללו תרומה שקשורה ישירות לבעיית פרמה היתה מועטה יחסית (לעומת זאת כמות ההוכחות השגויות והמופרכות שנוסחו בידי חובבים, ולעתים אף בידי מתמטיקאים מקצועיים, היתה גדולה מאוד). יתרה מזאת: נראה שלאורך כל התקופה הזאת, מתמטיקאים מובילים הצהירו הצהרות חד-משמעיות על כך שמדובר בבעיה שולית שחבל לבזבז עליה זמן ואנרגיה.

בסביבות 1630 כתב פרמה את טענתו בשולי הכרך של האריתמטיקה של דיופאנטוס תוך כדי עיון בו, אך, מפאת קוצר היריעה, הוא לא כתב את ההוכחה שהתיימר שהיתה בידו. הדרמה שנוהגים לשַוות לסיפור מתחילה ממש באקט הזה, המוזר מעט בעינינו. אבל חשוב להדגיש מראש שפרמה נהג באופן דומה במקרים רבים. התוצאה שהפכה למפורסמת כל כך עם השנים לא היתה בשום אופן היחידה (ובוודאי שלא החשובה ביותר מנקודת ראותו של פרמה אז) שאותה רשם בשוליים של ספר. למעט מקרה אחד, פרמה לא פרסם בחייו שום תוצאה מתמטית שאליה הגיע! יתרה מזו, התנהלותו האופיינית בנושאים אלה מובילה אותנו למסקנה אפשרית, שמהר מאוד הוא הבין שההוכחה "הראויה לציון", שאליה התכוון, לא היתה נכונה. אכן, פרמה נהג לשלוח לעתים תכופות תוצאות מתמטיות חדשות לחבריו, תוך שהוא מאתגר אותם למצוא בעצמם את ההוכחות הדרושות. אלא שדווקא את התוצאה הקשורה במשפטו המפורסם הוא שלח כחידה לחבריו רק עבור המקרים $n = 3$ ו-$n = 4$. לעומת זאת, ככל הידוע ממכתביו, את המקרה הכללי של ההשערה פרמה לא הזכיר מעולם מלבד ההערה הידועה בשולי הספר. ייתכן, אם כן, שאת ההוכחה לשני המקרים הראשוניים פרמה אכן ידע, או חשב שידע, ולא מופרך לשער (אם כי אין לכך סימוכין ישירים) שזמן מה לאחר הרישום בשוליים הוא הבין שאין בידו הוכחה למקרה הכללי. בין כך ובין כך, ברור שפרמה לא ייחס להשערה הזו מעמד מיוחד, והכינוי "המשפט האחרון" מתברר לעתים כמטעה: אין הכוונה למשפט האחרון שפרמה כתב או רמז לאמיתותו, אלא לטענה האחרונה שנותרה ללא הוכחה מבין השערותיו הרבות.

חלק גדול מהישגיו החשובים של פרמה בתורת המספרים נודעו ברבים בזכות פועלו של בנו סמואל. ב-1670 פרסם סמואל פרמה מהדורה של התרגום לצרפתית של האריתמטיקה של דיופאנטוס, ובה כלל הערות ומכתבים של אביו. סמואל פרמה חשש שאלמלא הפרסום הזה הישגים אלה יפלו לתהום הנשייה. הודות למהדורה הזו אנו מכירים לא רק את המשפט המפורסם, אלא גם אחרים נוספים. אבל מכל מורשתו של פרמה בתורת המספרים אנו מכירים באופן ישיר רק הוכחה אחת, והיא ההוכחה לטענה הדומה באופיה לטענתו המפורסמת. הטענה קובעת כי "לא קיימים שלושה מספרים שלמים חיוביים, x,y,z, המקיימים את התבנית

$$x^2 + y^2 = z^2$$

ואשר בנוסף על כך, מקיימים את התנאי ש- $xy/2$ הוא מספר ריבועי [כלומר, חזקה שנייה של מספר טבעי כלשהו]."

תוצאה זאת היא מעניינת לא רק משום שהיא מאפשרת הצצה אל מכלול הבעיות שהעסיקו את פרמה, ושממנו "המשפט האחרון" איננו אלא רק דוגמה אחת, אלא בעיקר משום שממנה ניתן לגזור הוכחה אפשרית למקרה $n = 4$ של ה"משפט האחרון" (הגם שפרמה עצמו לא כתב הוכחה כזו). אבל מה שחשוב עוד יותר הוא, שהוכחתו של פרמה הצביעה על דרך כללית שתאפשר לפתור בעיות רבות נוספות בתורת המספרים. המדובר הוא בשיטה שמכונה "שיטת הירידה האינסופית" (infinite descent), המייצגת עיקרון פשוט להבנה, אם כי לא תמיד פשוט להפעלה הלכה למעשה, ושבאמצעותו מוכיחים טענות על מספרים טבעיים, על דרך הסתירה. נניח שברצוננו להוכיח שתבנית מסויימת לא מתקיימת לעולם עבור שום מספר שלם חיובי m. כדי להפעיל את "שיטת הירידה האינסופית" אנו מניחים שהטענה נכונה עבור מספר שלם חיובי מסויים m ואז מחפשים

דרך לגזור, מן ההנחה הזאת, שהטענה בהכרח מתקיימת גם עבור מספר שלם חיובי אחר, m', שהוא קטן מ-m. ברור שאם הצלחנו בכך, הרי שבאותה דרך ניתן יהיה למצוא מספר שלם חיובי נוסף m'', שהוא קטן מ-m', וכך אפשר יהיה ליצור, כביכול, סדרה אינסופית יורדת של מספרים שלמים חיוביים. הפרוצדורה הזאת מביאה אותנו לסתירה, משום שיש מספר שלם חיובי קטן ביותר, 1, ולכן "סדרה אינסופית יורדת של מספרים שלמים חיוביים" היא סתירה מניה וביה.

ובכן, כאשר יש בידנו הוכחה לגבי המקרה $n = 4$ מתבררת גם עובדה נוספת, חשובה מאוד אף היא: כדי להוכיח את המשפט בכלליותו, מספיק להוכיח את המשפט עבור המספרים הראשוניים. אכן, בהנתן מספר שלם חיובי כלשהו m, אילו מצאנו שלושה מספרים שלמים x,y,z המקיימים

$$x^{4m} + y^{4m} = z^{4m},$$

הרי שמצאנו שלושה מספרים שלמים x^m, y^m, z^m המקיימים את התבנית של משפט פרמה עבור $n = 4$, בניגוד למה שהוכח עבור המקרה הזה. נובע מכך, שמשפט פרמה הוא נכון עבור כל חזקה n שמתחלקת ב-4. מצד שני, אם $n > 2$, ו-n איננו מתחלק ב-4, הרי ש-n הוא מספר שאיננו חזקה של 2, ולכן הוא מתחלק במספר ראשוני כלשהו p, נניח $n = pm$. ברור עתה, שעל מנמת להוכיח שאין שלושה מספרים שלמים x,y,z המקיימים $x^n + y^n = z^n$, מספיק להוכיח זאת עבור $x^p + y^p = z^p$.

מעתה ואילך, אם כן, הודות לרעיון של פרמה עצמו ומה שמשתמע ממנו, הוכחת המשפט הכללי מחייב אותנו להוכיח רק את המקרה של המספרים הראשוניים. זה נראה על פניו כצמצום משמעותי מאוד של מרחב האפשרויות להוכחה, אבל עד מהרה התברר שעדיין ההוכחה הכללית של ההשערה היתה רחוקה מאוד.

לאחר פרסום המהדורה ע"י סמואל פרמה ב-1670, ועד 1753, מתמטיקאים כמעט ולא התעסקו בבעיות שפרמה השאיר אחריו, ובאופן ספציפי לא התעסקו כלל במה שנקרא מאוחר יותר "המשפט האחרון". ב-1753 מופיע אוילר בסיפור. אוילר היה מתמטיקאי פורה באופן שהדעת מתקשה להבין. הוא עסק בכל תחומי המתמטיקה והפיזיקה בתקופתו, ובין היתר גם בתורת המספרים. חשוב לציין שבתקופת אוילר לא היה ממש תחום מובחן שנקרא בשם הזה, "תורת המספרים", אלא אוסף בעיות מורכבות פחות או יותר שנחשבו לחלק מן האריתמטיקה. השם "אריתמטיקה גבוהה" נשאר בשימוש עד סוף המאה הי"ט (ואף מעבר לזה), אם כי כבר אז ביחד עם המונח המוכר לנו היום "תורת המספרים". אוילר קרא את ספרו של פרמה, ראה שיש שם חומר מעניין, פתר חלק מהבעיות, וחלק אחר לא פתר. הבעיה שמעסיקה אותנו כאן שייכת לחלק שאוילר לא פתר. במכתב לידידו גודלבך טען אוילר שהצליח להוכיח את המשפט עבור החזקה $n = 3$. ההוכחה שלו התבררה כשגויה, והבעיה שבה לא ניתנת לתיקון בקלות. ואולם, הרעיונות שדרושים לצורך התיקון אכן מופיעים במקומות אחרים בעבודתו, ולכן יש צדק מסויים באמירה שאוילר הוכיח את המקרה $n = 3$ של המשפט האחרון של פרמה.

התחנה הבאה בסיפור מתרחשת ב-1770 בעבודתו של עוד מתמטיקאי בולט מאוד, ז'וזף לואי לגראנז' (Joseph Louis Lagrange 1736 - 1813). כמו אוילר, גם לגראנז' עסק בתחומים רבים ומגוונים, כולל תורת המספרים. הוא הוכיח משפט אחר שפרמה השאיר לא מוכח, שגם בו אוילר ניסה את כוחו ללא הצלחה. המשפט אומר: "כל מספר שלם ניתן לכתיבה כסכום של לא יותר מאשר ארבעה מספרים ריבועיים." הנה אם כן מצב העניינים לאשורו: פרמה השאיר מאחוריו בעיות רבות, ומסוגים שונים. חלקן נפתרו במהירות יחסית, ואילו חלק אחר דרש זמן רב יותר, אפילו שמתמטיקאים חשובים, כמו אוילר, התמודדו איתן. סינג כותב שאוילר "הודה בכישלונו". למעשה, לא היתה שום סיבה לאוילר להתמקד בקשיים שמצא דווקא בבעיה הזאת, ולהכריז על כישלון. רק כעבור זמן מה, ככל שניסיונות רבים לא צלחו, בעוד שיתר הבעיות התחילו לקבל פתרון כזה או אחר, התבררה בהדרגה ההשערה הזאת כבעלת משמעות מיוחדת, משמעות שלא קשורה לחשיבות בולטת ומובנת מאליה. כל חשיבותו של המשפט האחרון של פרמה, מכאן ואילך, היתה נעוצה ברצון לפתור בעיה שאחרים נכשלו בה.

בשלב הזה של הסיפור, סינג כותב שבתחילת המאה ה-19 ביסס המשפט האחרון של פרמה את מעמדו כבעיה הגדולה ביותר בתורת המספרים.[4] מתוך ההיסטוריה הארוכה של מה שמוצג כבעיה שהעסיקה את מיטב המוחות במשך יותר מ-250 שנה, כבר עברנו מעל מאה שנה ובקושי ראינו מאמצים כנים לפותרה.

---

[4] במקור מופיע: The most notorious problem in number theory ולא כמו בתרגום העברי "הבעיה הגדולה". המילה "notorious" מתארת אולי יותר נכון את המעמד של הבעיה. באתר האינטרנט של סינג גם מופיעה המילה notorious, בעוד שבכריכה של הספר מודיעים לנו שמדובר על "The World's Greatest Mathematical Problem".

בתחילת המאה הי״ט מופיעה דמות חשובה מאוד בסיפור, הלא היא סופי ז׳רמיין, מתמטיקאית שכבר הזכרנו. ז׳רמיין הוכיחה את המשפט החשוב הבא: ״אם n וגם $2n+1$ הם שני מספרים ראשוניים (כמו למשל 5 ו- 11), ואם שלושת המספרים השלמים z, y, x מקיימים את התבנית:

$$x^n + y^n = z^n$$

אזי אחד משלושת המספרים הנ״ל מתחלק ב-n.״ לתוצאה הזו היתה השלכה עמוקה, כאשר היא חילקה את המשפט לשני מקרים נפרדים, שיילוו את תולדות המשפט בהמשך דרכו:

מקרה 1 – אין שלושה מספרים שלמים חיוביים z, y, x אשר מקיימים $x^n + y^n = z^n$ כאשר אף לא אחד מהשלושה אינו מתחלק מתחלק ב-n

מקרה 2 – אין שלושה מספרים שלמים חיוביים z, y, x אשר מקיימים $x^n + y^n = z^n$, כאשר אחד ורק אחד מן השלושה מתחלק ב-n

ההפרדה הזו אפשרה התקדמות משמעותית בהוכחה: ז׳רמיין עצמה הוכיחה את מקרה 1 עבור כל הראשוניים הקטנים מ-100, ואילו לז׳נדרה הרחיב את הוכחותיה לכל הראשוניים הקטנים

מ-197. מקרה 2 התגלה כקשה הרבה יותר. מקרה 2 עבור $n = 5$ הוכח רק ב-1825 בעבודות נפרדות ומשלימות של לז׳נדרה ודיריכלה. אותו דיריכלה הוכיח ב-1832 את מקרה 2 עבור $n = 14$, וזאת במסגרת מאמציו להוכיח עבור $n = 7$. המקרה $n = 7$ התברר כקשה מעל המצופה וההוכחה שלו הושגה ע״י לאמה (Gabriel Lamé 1795-1870) רק ב-1839.

אנחנו נמצאים כבר 200 שנה לאחר הניסוח המקורי של פרמה, ובידנו לא הרבה יותר מאשר אוסף של תוצאות נפרדות, ומספר טכניקות שפותחו, אם כי לאו דווקא לצורך הוכחת המשפט עצמו. משפט סופי ז׳רמיין הוא תוצאה מכובדת וחשובה שהפוטנציאל שלה מתברר מהר מאוד. כמה מתמטיקאים מתחילים כבר לחשוב שיש פה בעיה משמעותית, אם אחרי 200 שנה עוד לא פתרו אותה. האקדמיה הצרפתית למדעים בפריז הציעה פרס כספי ומדליית זהב עבור ההוכחה, אבל הבעיה הוכנסה לרשימת הפרס הגדול של האקדמיה (Grand Prix) רק ב-1857, אז הוא הוענק לקומר, מסיבות שיתבררו בהמשך. ההוכחה של לאמה עבור המקרה $n = 7$ היתה קשה למדי, והיא אולי הראשונה שכללה פיתוח של טכניקות חדשות שנועדו האופן ספציפי להתמודד עם ההוכחה הזו. אותו לאמה יהיה מעורב בפרשת הדרכים המשמעותית ביותר של הבעיה לאורך המאה הי״ט, אשר התרחשה ב-1847 בפריז. אבל לפני שנגיע לפרשה הזאת, עלינו לחזור אחורה ולהסתכל על פועלו של עוד ענק שהוזכר רק ברמז, קארל פרידריך גאוס.

כפי שסינג מציין בספרו, אחד משערי הכניסה של סופי ז׳רמיין לעולם של תורת המספרים היה יצירת המופת של גאוס, שראתה אור ב-1801, *Disquisitiones Arithmeticae*. מדובר בספר רב-השפעה שרבים משווים את חשיבותו בתולדות המתמטיקה לזו של האלמנטים של אוקלידס (Euclid) מהמאה השלישית לפנה״ס. הספר הציג בפעם הראשונה בצורה מקיפה ושיטתית תוצאות רבות שנראו עד כה כאוסף אקראי של בעיות נפרדות ושל טכניקות עבודה הקשורות בדרכים שונות לתחום האריתמטיקה. ספרו של גאוס כונן למעשה את מה שמוכר מאז כתחום של ״תורת המספרים״, ובוודאי שאת ״תורת המספרים האלגברית״ כפי שהיא התפתחה בגרמניה, בצורה מרחיקת לכת, לאורך המאה הי״ט. מעבר לכך תרומותיו של גאוס בתחומים רבים אחרים של המתמטיקה ושל הפיזיקה היו אף הם חשובות ביותר ורבות-השפעה לא פחות, ולכן אין פלא שסינג מנסה לבחון בספרו את האופן שבו נהג גאוס אל מול מה שמהווה, לטענת סינג, ״החשובה מבין כל הבעיות של המתמטיקה״. אלא שהעובדות ההיסטוריות מציבות אתגר קשה עבור סינג. ״באופן תמוה״, כותב סינג, גאוס לא פירסם מאומה בקשר למשפט האחרון של פרמה. יתרה מזאת: במכתב לחברו אולברס (Heinrich Olbers 1758-1840) – אסטרונום גרמני חשוב בן תקופתו, אשר עודד את גאוס להתמודד על הפרס של האקדמיה – כותב גאוס: ״אני מודה ומתוודה שהמשפט האחרון של פרמה, כמשפט מבודד, מעורר אצלי עניין מועט בלבד, שכן הייתי יכול בקלות להציע משפטים רבים מהסוג הזה, משפטים שאי-אפשר להוכיח או לסתור״. מה אומר סינג על כך? ״ייתכן שבעברו...״ (ובמקור באנגלית: ... historians suspect that) ניסה גאוס להתמודד עם הבעיה ונכשל, ותגובתו לאולברס היתה תגובה של תסכול אינטלקטואלי ואכזבה. אלא שעמדתו של גאוס היא ״תמוהה״ רק עבור מי שמניח מראש שמדובר בבעיה החשובה במתמטיקה בכל הזמנים. ללא הנחה מוקדמת כזו, אפשר להתייחס לדבריו של גאוס כפשוטם: הוא לא חשב שזו בעיה חשובה כלל וכלל! אחד הצירים המרכזיים של *Disquisitiones* נסוב סביב משפט ההדדיות הריבועית (ראו מסגרת 2), המהווה דוגמה קלאסית לבעיה חשובה בעיניי

מתמטיקאי כמו גאוס (אבל לא רק גאוס: כבר ראינו שהילברט כולל את הבעיה ברשימתו, ובהמשך עוד נראה אחרים העוסקים בה באינטנסיביות). גאוס פרסם בחייו לא פחות משבע הוכחות שונות למשפט ההדדיות הריבועית. בכל אחת מן ההוכחות הללו הוא קיווה למצוא דרך שתאפשר את הכללת המשפט לחזקות גבוהות יותר, ואמנם, הוא עצמו התמודד בהצלחה עם המקרים $n = 3$ ו-$n = 4$.

חשיבות עמוקה בהתמודדותו עם בעית ההדדיות היתה לשימוש של גאוס במערכת מספרים מסוג חדש, המכונה בימינו "השלמים הגאוסיאניים", דהיינו מספרים מהצורה:

$$a + ib$$

כאשר i מייצג, כמקובל, את השורש הריבועי של -1, ואילו a ו-b מייצגים שני מספרים שלמים. מדובר, אם כן, במערכת מספרים המהווה חלק מהמספרים המרוכבים, וגאוס חקר את התכונות המיוחדות שלהם. כבר הזכרנו בהקשר של בעיית רימן את העובדה המפתיעה שעל מנת לקבל מידע חשוב על המספרים השלמים אנחנו יכולים לפנות לתחום הרחב יותר של המספרים המרוכבים. הראשון שהעלה את הרעיון המפתיע הזה היה אוילר (בדיוק בחקרו את התוצאות שהזכרנו לעיל,) אבל הוא הפך לנחלת הכלל ולדרך מקובלת בתחום בעקבות הפיתוח השיטתי של השלמים של גאוס ב-*Disquisitiones* . השימוש במספרים המרוכבים בעקבות גאוס גם ישחק תפקיד מכריע כחלק מהניסיונות להוכיח את משפט פרמה אחרי 1800, אבל אין כל זה משנה את העובדה הביסיסית שגאוס לא ראה במשפט הזה מטרה ראויה להשקעת מאמציו.

נחזור עתה לאירועים של שנת ב-1847 באקדמיה למדעים בפריז סביב המשפט האחרון של פרמה. כפי שאמרתי, ב-1839 הצליח לאמה להוכיח את מקרה 2 של המשפט עבור $n = 7$, בהוכחה קשה, ארוכה ומסובכת. כאן התקבץ בפעם הראשונה גרעין של התעניינות אמיתית וממוקדת סביב המשפט, שכלל מתמטיקאים מהשורה הראשונה כמו אוגוסטן לואי קושי (Augustin Louis Cauchy 1789-1857) וז'וזף ליאוביל (Joseph Liouville 1809-1882). כראוי לחוג המתמטיקאים המובילים בצרפת, אליהם השתייכו, הם עסקו בו-זמנית במספר בעיות ובתחומים שונים, ובתוך זה גם הקדישו מזמנם לניסיונות הוכחה למשפט פרמה. מסכת חילופי רעיונות ודיונים מעמיקים (שלא נעדרו מהם היצרים העזים ומנות גדושות של "קנאת סופרים" אופיינית לחברי האקדמיה המכובדים) החלה ב-1 במרץ, כאשר לאמה הציג דרך אפשרית להוכחה של המשפט הכללי. הגישה של לאמה התבססה על רעיון של ליאוביל, אשר הציע לפרק את התבנית המופיעה בליבו של המשפט לגורמים, באופן הבא:

$$x^n + y^n = (x + y)\,(x + ry)\,(x + r^2y)\ \dots\ (x + r^{n-1}y)$$

כאן n הוא מספר אי-זוגי, ו-r הוא מספר מרוכב, שמקיים את התנאי $r^n = 1$ ו-$r \neq 1$. הקורא החרוץ יכול לוודא שאכן המשוואה הזאת מתקיימת. על הפירוק הזה מפעילים טיעון המבוסס על הטכניקה הידועה של ירידה אינסופית, ובאופן זה, בעזרת השימוש במספרים מרוכבים כפי שעשה גאוס בעבודתו על משפט ההדדיות, חשב לאמה להוכיח את משפט פרמה. הדיונים שבאו בעקבות הדיווח של לאמה לאקדמיה עסקו, מחד גיסא, בשאלה החשובה למתדיינים, מי הקדים מביניהם להציג את הרעיונות המכריעים, ומאידך גיסא בשאלה הטכנית, האם הפירוק לגורמים שבמרכז ההוכחה, מקיים את התנאי החשוב של היותו פירוק יחיד לגורמים ראשוניים. כאן ציפתה לכולם הפתעה גדולה כאשר התברר שהתשובה לשאלה הטכנית הזו היא שלילית. תשובה שלילית זו היתה כרוכה בשינוי תפישה מהותי באשר לטבעם של המספרים הראשוניים כפי שהם הובנו עוד מימי אוקלידס (ראו מסגרת 3). היא גם התבררה כקטלנית לגבי האסטרטגיה שבאמצעותה חשבו חברי האקדמיה לפתח הוכחה למשפט פרמה ב-1847.

הדבר התברר סופית בין חברי האקדמיה הפריזאית ב-24 למאי, כאשר ליאוביל קרא בפניהם מכתב שנשלח מגרמניה על ידי קומר, ואשר כלל העתק ממאמרו משנת 1844. שלוש שנים לפני הדיון בפריז הציג קומר דוגמה של מערכת מספרים שבה הנחת הפירוק היחיד הרגילה אינה תקפה, וב-1846 הוא הציע כיוון חשיבה חדיש לחלוטין ("תורת המספרים הראשוניים האידיאליים") שבאמצעותה ניתן להתגבר על הקושי במערכות בעייתיות כגון אלה. קומר גם הסביר לעמיתיו הצרפתיים שבאמצעות תורתו ניתן להוכיח את משפט פרמה עבור כל מספר ראשוני מסוג מסויים, שהוא כינה "ראשוניים רגולריים" (ראו מסגרת 4).

גישתו החדשה של קומר קטעה באחת כיוון שנראה מבטיח מאוד לפתרון כללי של בעיית פרמה. ואולם, היא פתחה כיווני מחקר עשירים ביותר ולמעשה הובילה, דרך מאמציהם המאוחרים יותר של מתמטיקאים כמו דדקינד (Richard Dedekind 1831-1916) וקרונקר (Leopold Kronecker 1823-1891), להגדרה מחודשת של תורת המספרים האלגבריים ולְמה שכונה בהמשך "אלגברה קומוטטיבית", תחום בעל חשיבות מכרעת לפיתוח המתמטיקה לאורך המאה העשרים. בהקשר

המצומצם הרבה יותר של משפט פרמה, קומר פרץ נתיב חשוב להוכחות אפשריות עבור מקרים נפרדים. כך למשל, קומר עצמו הוכיח, בלא מעט מאמץ חישובי, שכל הראשוניים עד 100 הם ראשוניים רגולריים, כהגדרתו, למעט 37, 59, 67. נגזר, אם כן, מן המשפטים הכלליים שהוכיח, שמשפט פרמה תקף עבור כל הראשוניים הקטנים מ-100, למעט שלושת המקרים הללו. את שלושת המקרים הוכיח קומר בנפרד, וכך התבררה השאלה של תקפות משפט פרמה לכל החזקות מתחת למאה. כל מה שנותר, לכאורה, הוא להמשיך בחקירת סדרת הראשוניים כדי לוודא מי מהם הוא רגולרי (ואז המשפט תקף עבורו באופן אוטומטי), ומי לא-רגולרי (ואז אפשר לנסות ולהוכיח בנפרד את המשפט עבורו). אלא שבפועל הנתיב הזה לא אומץ ברצינות עד תחילת המאה העשרים ועל כך עוד נחזור בהמשך. בנתיב שהוביל בסופו של דבר להוכחת ויילס, ואותו נתאר בקיצור נמרץ בהמשך, מעט מאוד התחדש עד 1984! לעומת זאת, אלפי הוכחות לא נכונות הוצעו במשך השנים (למשל: מעל 1000 בין 1908 ו-1912 בלבד). אבל על מעמדו האמיתי של משפט פרמה לאורך השנים אפשר ללמוד לא רק דרך מה שנעשה בשנים הללו, אלא גם, ואולי בעיקר, דרך מה שלא נעשה, כפי שניווכח.

הזרם המרכזי של תורת המספרים וההתעלמות ממשפט פרמה

בחלוקה של המתמטיקה לתת-דיסציפלינות, העיסוק במשפט האחרון של פרמה שייך למה שמכונה "תורת המספרים האלגברית". כבר אמרתי שספרו של גאוס *Disquisitiones Arithmeticae* הוא למעשה אשר כונן את התחום. התחום ראה פעילות מעניינת ומעמיקה לאורך כל המאה הי"ט, במיוחד בגרמניה. ב-1896 פרסם הילברט דו"ח ארוך ומפורט על מצב המחקר בתחום, הידוע מאז בשמו הגרמני *Zahlbericht*, ובו תוספת משפטים חדשים וטכניקות משוכללות לעיסוק בבעיות המרכזיות של התחום. ה-*Zahlbericht* שיחק בסוף המאה תפקיד מקביל לזה שהיה לספרו של גאוס בתחילתה: הן כסיכום של מה שנעשה לפניו והן כקביעת הקנון לגבי מה שייעשה בהמשך. מעניין לראות היכן עומד המשפט האחרון של פרמה בתקופה שבין שני הספרים המגדירים, למעשה, את התחום כולו.

את דעתו הנחרצת של גאוס כבר ראינו. מה חשב על משפט פרמה מי שתרם את התובנה החשובה ביותר לעיסוק בו מאז מחצית המאה, ארנסט קומר? בזכות אמירות של מתמטיקאים שונים במעבר המאות תשע-עשרה ועשרים, ובראשם הילברט, השתרשה האמונה כאילו קומר הגיע לתובנותיו על אודות הפירוק לגורמים ראשוניים מתוך מוטיבציה ברורה להוכיח את משפט פרמה. האמת ההיסטורית שונה. לאחר 1860 הזכיר קומר לעתים את חשיבותה ההיסטורית של השערת פרמה, אבל את תורת המספרים האידיאלים שלו הוא הפעיל לטובתה לראשונה רק ב-1847. את התוצאות שהזכרתי לעיל לגבי תקיפות המשפט עבור מספרים ראשוניים קטנים מ-100 הוכיח קומר רק ב-1858. "המשפט האחרון של פרמה" – הכריז קומר בדומה לגאוס – "הוא קוריוז בתורת המספרים ובשום אופן לא סוגיה מרכזית." וכמו גאוס, גם קומר ראה במשפט ההדדיות מסדר גבוה את "השאלה המרכזית ופסגת המחקר של תורת המספרים" בימיו. שאלה זו היוותה ללא כל ספק מקור המוטיבציה העיקרי של קומר בפיתוח תורת האידיאלים הראשוניים.

קומר פיתח את תורתו במסגרת חקירת מערכות המספרים שהיוו הכללה של המספרים הראשוניים הגאוסיאנים, ואשר מאוחר יותר נקראו "שדות של מספרים אלגבריים". במכתבו לאולברס, גאוס טען שפיתוח שיטתי של התורה הזאת יוביל ללא ספק לפריצות דרך משמעותיות ביותר, "ומשפט פרמה יופיע אז כאחת מתוצאות המשנה הפחות מעניינות של התיאוריה." בין התורמים החשובים לשאלת ההדדיות מסדר גבוה ניתן למצוא מתמטיקאים בולטים מאוד, כגון קרל גוסטב יעקובי (Carl Gustav Jacobi 1804-1851) ופרדינד גוטהולד איזנשטיין (Gothold Eisenstein 1823-1852). בין מפתחי תורת השדות האלגבריים ניתן למנות את דדקינד וקרונקר. אלה גם אלה לא התעניינו באופן מיוחד, אם בכלל, במשפט פרמה. הוא הדין לגבי שורה ארוכה של חוקרי תורת המספרים האלגברית, לפני ואחרי ה-*Zahlbericht*: הרמן מינקובסקי (Hermann Minkowski 1864-1909), קורט הנזל (Kurt Hensel 1861-1914), אלכסנדר אוסטרובסקי (Alexander Ostrowski 1893-1986), אמיל ארטין (Emil Artin 1898-1962), אריך הקה (Erich Hecke 1887-1947), קארל לודיג זיגל (Carl Ludwig Siegel 1896-1981), ועוד.

ומה לגבי ה-*Zahlbericht* עצמו? רק סעיף קצרצר בן שני עמודים דן בהוכחות הקיימות למשפט עבור חזקות שהן מספרים ראשוניים רגולריים. זה הכול! על כך יש להוסיף את אי-הכללת הבעיה

במסגרת רשימתו מ-1900 שעליה הרחבתי לעיל, והנה לנו תמונה ברורה וקוהרנטית של המעמד שהילברט ייחס לבעיה בכללותה.

עוד סקירה חשובה שמדגישה את הנאמר עד כה לגבי החשיבות שיוחסה למשפט הופיעה ב-1918, כאשר המתמטיקאי האמריקאי ליאונרד יוג'ין דיקסון (Leonard Eugene Dickson 1875-1954) פרסם ספר שזכה לפופולריות רבה: *History of the Theory of Numbers*. משפט פרמה מופיע בכרך השני מתוך שלושת כרכיו. מתוך כמעט שמונה מאות דפים של הכרך ומתוך שלושים ושבעה פרקיו, דיקסון הקדיש פרק אחד בן 45 עמודים כדי למנות כ-300 עבודות, לאו דווקא חשובות ורובן קצרות מאוד, שנכתבו עם השנים על אודות המשפט. את דעתו על המשפט אמר אף הוא באופן הברור ביותר: "המשפט האחרון של פרמה חסר חשיבות מיוחדת בפני עצמו, ואם תתפרסם הוכחה מלאה שלו הוא יאבד את המקור העיקרי לתשומת הלב בו."

רוב המתמטיקאים שדיקסון מזכיר בסקירתו רחוקים מלהיות בשורה הראשונה. ואולם, אותם מתמטיקאים מן השורה הראשונה שהוא אכן מזכיר, מופיעים כאן עם עבודה די שולית שלהם. כך למשל לגבי הילברט, אשר ב-1894 פרסם עבודה קצרה ובה שיכלול של אחת ההוכחות של קומר. דיקסון מזכיר גם כמה עבודות משל עצמו בתחום. מקרה מעניין שכדאי להזכיר הוא של פרדיננד לינדמן (Ferdinand Lindemann 1852-1939), מנחהו של הילברט בעת שכתב דוקטורט בקניגסברג, ואשר קנה את תהילתו כאשר הוכיח ב-1882 שהמספר π (פי) הוא מה שמכונה "מספר טרנסצנדנטלי". הוכחתו היא מרשימה לכל הדעות ובעלת השלכות על תחומים רבים (הידוע מביניהם מתייחס לבעיה עתיקת-יומין: אי-האפשרות לרבע את המעגל – כלומר לבנות ריבוע ששטחו זהה לשטח מעגל נתון באמצעות סרגל ומחוגה). לאחר ההוכחה הזאת לינדמן הפך למתמטיקאי מפורסם ביותר, ובעל קשרים רבים בכל אירופה, אבל לא היו לו תרומות משמעותיות נוספות. בין היתר הוא פרסם מספר הוכחות למשפט פרמה בין 1901- ו-1909, אך בסופו של דבר כולן התבררו כשגויות. שני המתמטיקאים עם התרומות החשובות ביותר שדיקסון מזכיר לאחר קומר הם דימיטרי מירימנוף (Dimitry Mirimanoff 1861-1945) וארתור וויפריך (Arthur Wieferich 1884-1954).[5] אפילו לגבי השניים האחרונים ניתן לקבוע שתרומותיהם להוכחת משפט פרמה אינן נמנות עם עבודותיהם החשובות ביותר.

העדות האחרונה שברצוני להזכיר כאן, להתעלמות הכמעט מוחלטת ממשפט פרמה כבעיה חשובה במתמטיקה ואפילו בתחום המצומצם יותר של תורת המספרים מקורה במסמך מעניין וכמעט נשכח שנכתב בעברית ובארץ ישראל של 1925. היתה זאת השנה של טקס הנחת אבן-הפינה לאוניברסיטה העברית בהר הצופים, ובין הנואמים הראשיים היה אדמונד לנדאו (Edmund Landau 1877-1938). לנדאו היה מתמטיקאי גרמני, בן למשפחה ברלינאית בעלת שורשים עמוקים והון רב. הוא היה בין המתמטיקאים המובילים בעולם, ובוודאי שבתחום התמחותו, תורת המספרים האנליטית. הוא היה גם ציוני נלהב, שנרתם באופן אישי למפעל האוניברסיטה העברית בירושלים, אשר החל לקרום עור וגידים בתקופה זו. הוא עלה ארצה ב-1927 בכוונה להשתקע בירושלים, כשבידו מינוי כפרופסור למתמטיקה הראשון באוניברסיטה העברית. ברם, שהייתו בארץ היתה קצרה ביותר, וכעבור שמונה עשר חודשים חזר לגרמניה. הנאום שנשא בהר הצופים כאשר הוזמן לצורך זה, עוד ב-1925, היה אולי הטקסט הראשון שעסק במתמטיקה מתקדמת, אשר נכתב בעברית מודרנית.[6] כותרתו היתה: "בעיות פתורות וסתומות בתורת המספרים האלמנטריים." רשימתו של לנדאו הכילה עשרים ושלוש בעיות. לנדאו הסביר לקהל שהסיבה למספר היתה היות 23 מספר ראשוני המתאים מאוד לנושא ההרצאה. ייתכן שגם המספר שברשימת הבעיות של הילברט מ-1900 הדהד במוחו כאשר בחר בו.

ההזדמנות שנקרתה בדרכו של לנדאו היתה חגיגית ביותר בכמה מובנים. גם ככה לנדאו היה איש קפדן באופן קיצוני בכל מעשיו, ובוודאי כאשר דובר במלאכת חיבור טקסטים מתמטיים. אין ספק שהוא התייחס בכובד ראש ראוי לגודל האירוע כאשר בחר בבעיות שיציג לעם היושב בציון, ולקרואים המכובדים הרבים. תיאור שלם של הרשימה חורג ממסגרת מאמר זה, ועל כן אסתפק באמירה שעל אף המלה "יסודית" שבכותרת, בין השאלות שהציג לנדאו היו גם כאלה שנחשבו קשות עד מאוד בין אנשי תורת המספרים. ולענייננו: מה לגבי משפט פרמה? ובכן, משפט פרמה לא מוזכר כלל וכלל ברשימתו העברית של לנדאו! כפי שאמרתי, לנדאו חקר את תורת המספרים, אבל במסגרת מסורת המכונה "אנליטית" שבה למשפט פרמה אין מקום רב ממילא. אבל

---

[5] משום מה, סינג מתאר את מירימנוף כ"עמיתו" של קומר, על אף שהוא סיים דוקטורט בז'נבה עשר שנים לאחר מותו של קומר בגרמניה.

[6] Shaul Katz, "Berlin Roots - Zionist Incarnation: The Ethos of Pure Mathematics and the Beginnings of the Einstein Institute of Mathematics at the Hebrew University of Jerusalem", *Science in Context* 17 (1-2), 199-234 (2004).

ברשימתו לנדאו בפירוש כלל גם בעיות רבות מהמסורת האלגברית. את משפט פרמה ללא הזכיר כלל.

משפט פרמה במאה העשרים – הדרך לווילס ודרכים אחרות

לאורך המאה העשרים נעשו מאמצים נוספים להוכיח את משפט פרמה. רובם המכריע לא היו קשורים לזרם הרעיונות שבסופו של דבר הוביל להוכחה של ויילס. יתרה מזאת, גם הקשר ההדוק בין זרם אחרון זה לבין הוכחה אפשרית של המשפט התברר, באופן מובהק, לא לפני 1983. אופן הצגת הדברים בתיאור של סינג מאדיר את הדרמטיות של אירועים מסויימים הרבה מעבר ליחס הראוי להם ומעמיד אותם לשירות טענת המפתח שלו, כאילו משפט פרמה היתה החשובה מבין החידות המתמטיות של מאתיים חמישים השנה האחרונות. מעבר לבעיה הזו, אופן הסקירה של סינג (ובעקבותיו, חלק גדול ממאמרי הפופולריזציה הרבים שנכתבו מאז על הפרשה כולה) גם מתעלם לחלוטין מן החידושים החשובים ומן המהלכים הנועזים שנעשו במאה העשרים לקראת הוכחת המשפט, ואשר לא השתלבו בסופו של דבר בזרם ה"מנצח", זה שוויילס הביא לשיא.

ברצוני, אם כן, להזכיר בקיצור נמרץ ביותר שני זרמים שונים של חשיבה מתמטית לקראת הוכחת משפט פרמה במאה העשרים. אתחיל במהלכים שהביאו להוכחת ויילס, מהלכים הקשורים בהשערת טאנייאמה-שימורה. חשוב לחזור ולהדגיש שההשערה הזו, הקושרת שני תחומים מתמטים שנראו קודם לכן כמרוחקים האחד מן השני ובלתי-קשורים במהותם (עקומות אליפטיות ותבניות מודולריות), לא נוסחה במקור בקשר כלשהו למשפט פרמה. הקשר התברר בדיעבד רק ב-1984 מתוך השערה של גונתר פריי (Gunther Frey) אשר הצביעה על כך שאילו הוּכחה אמיתותה של השערת טאנייאמה-שימורה הרי שניתן יהיה לגזור ממנה את אמיתותו של משפט פרמה. בהמשך, ב-1985, קנת ריבת (Kenneth Ribet) הוכיח משפט הקובע, שאכן משפט פרמה נגזר כמסקנה ישירה מן ההשערה. ההוכחה של משפט פרמה נראתה לראשונה בהישג יד, על ידי השלמה של מטלה ברורה, גם אם קשה: הוכחת ההשערה של טאנייאמה-שימורה. חשוב להזכיר כאן עוד שלוש התפתחויות הקשורות בזרם הרעיונות הזה:

(1) בשנות ה-70 המוקדמות עסק אנדרה וייל (André Weil 1906-1998), מן הבולטים בחוקרי המספרים במאה העשרים, בעקומות אליפטיות ובהשערת טאנייאמה-שימורה. יש הקוראים מאז להשערה החשובה בשם " טאנייאמה-וייל", או "טאנייאמה-שימורה-וויל", ויש החושבים שלא נכון בשום ואופן לכלול את וייל בין אבות ההשערה. בין כך ובין כך, אין ספק שמעורבותו של וייל בבעיות הקשורות להשערה סייעה במידה נכרת להפצת דבר קיומה וחשיבותה.

(2) ב-1977 עסק בארי מייזר (Barry Mazur) במחקר הקשור במעבר בין סוגי עקומות אליפטיות הבנויות על מספרים ראשוניים שונים. רעיונותיו שימשו השראה לריבֶּת בהוכחת השערת פריי.

(3) ב-1983 הוכיח גרד פלטינגס (Gerd Faltings) השערה שנוסחה ב-1922 ע"י לואיס מורדל (Louis Joel Mordell 1888-1972). ממשפט פלטינגס משתמע כי עבור $n > 2$ יש לכל היותר מספר סופי של שלשות מספרים שלמים x, y, z, ללא גורמים ראשוניים משותפים, המקיימים $x^n + y^n = z^n$. מדובר, לכל הדעות, בתוצאה קרובה ביותר למשפט פרמה עצמו, ובכל זאת דרכי ההוכחה של פלטינגס לא נראו כבעלות פוטנציאל להוביל, בדרך של שכלולים נוספים, להוכחת המשפט הכללי. יתר על כן, ניסיון להוכיח את משפט פרמה לא היווה מוטיבציה ישירה לעבודתו של פלטינגס.

ב-1993 הציג ויילס בקיימברידג' את הוכחתו, שהיא הוכחה של השערת טאנייאמה-שימורה עבור סוג מסויים וחשוב של עקומות אליפטיות (שמכונות: "עקומות אליפטיות יציבות-למחצה"). בעת ההרצאה נכחו באולם קבוצה גדולה של מומחים מהשורה הראשונה. כך תיאר מייזר את האווירה ששררה:

> מעולם לא ראיתי הרצאה רבת-תהילה כמו זו, גדושה ברעיונות נפלאים, טעונה במתח דרמטי שהלך ונבנה בהדרגה. רק שורת-מחץ אחת היתה אפשרית כאן.

ואכן ויילס סיכם במשפט קצר וקולע: " ... וזה מוכיח את משפט פרמה. אני חושב שאעצור כאן". הסיפור האישי של ויילס ושל דרכו להוכחה מְזמן אמנם רגעי דרמה אמיתיים, אבל אחרי כל שיא דרמטי יכול לבוא גם אנטי-קליימקס, וזה בדיוק מה שקרה כאן. לצורך הבדיקה מדוקדקת של ההוכחה היא נשלחה, בחלקים, למספר מומחים שונים. המתמטיקאי ניקולס כץ מצא בעיה לא טריוויאלית שהיתה טעונת תיקון יסודי על מנת להשלים את ההוכחה. הדרמה נמשכה כאשר ויילס התמיד במאמציו, אמנם באווירה פחות מרוממת מאשר בחודשים שקדמו להרצאתו, ותוך

שהוא שומר רוב הזמן על שתיקה. כעבור כמה חודשים ויילס הצליח להתגבר על הבעיה בעזרת תלמידו ריצ׳רד טיילור, וההוכחה פורסמה במאי 1995 בכתב העת *Annals of Mathematics*.

אילו רצה מתמטיקאי כלשהו בסוף שנות ה-70 של המאה העשרים לברר את המצב המעודכן של הניסיונות להוכיח את משפט פרמה, עמדו לרשותו מספר סקירות שנכתבו בעת ההיא על ידי יודעי-דבר.[7] בסקירות הללו הקורא לא היה מוצא ולו אחד מן השמות שהוזכרו בעמודים האחרונים: בוודאי שלא את ויילס, אבל אפילו לא את מורדל,[8] ובמיוחד לא את טאנייאמה או את שימורה. מאידך הוא היה מוצא שמות רבים שלא הופיעו בזמנו בסקירה של דיקסון מ-1920, אבל שנעדרים כמעט לחלוטין גם מספרו של סינג ב-1996 – ובעקבותיו גם מְרבים מתוך אינספור הטקסטים המתארים את הישגו של ויילס ומה שבא בעקבותיו.

כמה מילים על הצד הזה של הסיפור, מתוך הקשר הרחב יותר של ההיסטוריה של המתמטיקה מאז המחצית השנייה של המאה הי״ט ועד ימינו. נוכחנו כי קומר הוכיח ב-1858 את המשפט עבור כל המספרים הראשוניים עד 100, תוך שהוא מטפל באופן נפרד בשלושת המקרים הלא-רגולריים: 37, 59, 67 . בעיקרון, הדרך נותרה פתוחה להמשיך ולהוכיח את המשפט עבור ערכים גבוהים יותר, עם טיפול נפרד לכל ראשוני לא-רגולרי שיצוץ ויעלה בדרך. בפועל הדרך הזאת לא משכה מתמטיקאים רבים – ובוודאי שלא רבים מבין הבולטים – שיעמיקו וילכו בה. מדוע? זו שאלה חשובה שאת התשובה לה אתן כאן בקיצור רב. אחת ההתפתחויות החשובות שנבעו מתוך הכיוונים החדשים שקומר עצמו פיתח כאשר עסק בתורת המספרים הראשוניים האידיאלים היתה, כאמור, פיתוחה של תורת המספרים האלגברית בידי קרונקר ודדקינד. קרונקר ודדקינד קידמו את הענף החדש והחשוב הזה תוך השלמה הדדית של תוצאות ושל פיתוח טכניקות. יחד עם זאת, הם ייצגו שתי גישות שונות, ולעתים אף מנוגדות, בדגשים שאפיינו את עבודתם המתמטית. בתורתו של קרונקר, החישובים הפרטניים והמפורטים במערכות המספרים שאותן הוא חקר היוו את מוקד ההתעניינות והכוח המניע העיקרי שלה. אצל דדקינד המוקד נסוב סביב מבנים תיאורטיים מופשטים, המבוססים על מספר מושגי יסוד מקיפים, שמאפשרים גזירת משפטים כלליים ובניית תיאוריה מסודרת ושיטתית מאוד, תוך הימנעות מירבית מחקירת המקרים הפרטיים ומחישובים עם דוגמאות, ולו החשובות שבהן.[9]

הדגש ה״מושגי״ או ״סטרוקטורלי״ שאפיין את עבודתו של דדקינד – בניגוד לדגש ה״חישובי״ יותר של קרונקר – השתלב בַהשפעות העמוקות של עוד מספר מתמטיקאים והפכה לדומיננטית ביותר מאז סוף המאה הי״ט ובחלק גדול של המאה העשרים, ולא רק בענף המתמטי הזה, אלא בענפים רבים אחרים. ב-*Zahlbericht* רב-ההשפעה, למשל, הכריז הילברט במפורש שהוא עשה כל מאמץ להימנע מן ה״כלים החישוביים המורכבים מאוד״ של קומר, ולדבוק בעקרונותיו של רימן, לפיהם יש להשלים הוכחות לא בדרך של חישובים אלא על פי ״רעיונות טהורים״ ככל האפשר. גם חברו מינקובסקי, שכמוהו היה מומחה מוביל בתורת המספרים, חשב שהגישה הזו היא רלוונטית כעיקרון מנחה למתמטיקה כולה. הוא כינה אותה בשם ״העיקרון השני של דיריכלה״[10] ועל פיו ״יש לפתור בעיות תוך המעטה בחישובים עיוורים ובמקסימום של מחשבה תחילה.״

לא פלא לגלות, אם כן, את המגמות שסקירתו המקיפה של דיקסון מביאה לידי ביטוי. הזרם המרכזי של תורת המספרים לאחר קומר תרם מעט מאוד להוכחות המשפט, ועוד פחות מזה כאשר מדובר על דרך של חישובים שימשיכו את הכיוון שנפתח עם עבודתו של קומר. ואכן, שתי התרומות המשמעותיות ביותר בחצי הראשון של מאה העשרים בכיוון החישובי הזה נעשו על ידי מי שצמחו ואף פעלו מחוץ לזרם המרכזי. הראשון שבהם היה אאוטסיידר של ממש: הדֶני יוהן לודויג ינסן (Johan Ludvig Jensen 1859-1925) אשר ב-1915 הוכיח שיש מספר אינסופי של ראשוניים לא-רגולרים. ינסן לא למד מתמטיקה בצורה מסודרת ומעולם לא קיבל מינוי אקדמי כלשהו. הוא עבד בחברת הטלפונים הדנית ועסק במתמטיקה רק בזמנו הפנוי.

---

[7] שתי דוגמאות חשובות לכך הם: Paulo Ribenboim, “Recent results on Fermat's last theorem”. *Canad. Math. Bull.* 20 (1977), no. 2, 229—242; Harold M. Edwards, *Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*. New York, Springer-Verlag (1977).

[8] ריבנבוים פרסם סקירה נוספת ב-1980 ובה שמו של מורדל כבר נזכר: Paulo Ribenboim, *13 Lectures on Fermat’s Last Theorem*. New York, Springer-Verlag (1980).

[9] Leo Corry, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures.* Basel and Boston, Birkhäuser (2nd edition, 2003).

[10] ה״עיקרון של דיריכלה״, שאלי רמז כאן מינקובסקי, הוא רעיון טכני ידוע מאוד מתחום האנליזה המתמטית, ששיחק תפקיד חשוב בהתפתחות הפיזיקה המתמטית במאה הי״ט.

גם הארי ואנדיבר (Harry Vandiver 1882-1973) לא הלך במסלול המקובל לחוקרי תורת המספרים, וגם כאשר הפך למתמטיקאי מסודר מבחינה מוסדית, הוא המשיך בדרכו הייחודית מבחינת התכנים. הוא לא סיים לימודי תיכון, והמעט שלמד באוניברסיטאות שונות, למד בדרך לא שיטתית ולא מסודרת. ב-1900 החל לפרסם מאמרי מחקר מקוריים בכתבי-עת שונים, בין היתר בשיתוף עם ג׳ורג׳ דייויד בירקהוף (George David Birkhoff 1884-1944), מן המשפיעים שבמתמטיקאים באמריקה בתחילת המאה העשרים. בחסותו קיבל ואנדיבר משרת הוראה בקורנל ב-1919. באותה שנה הוא גם עבד עם דיקסון על עריכת הספר על תולדות תורת המספרים. מאוחר יותר עבר לאוניברסיטת טקסס, שם קיבל מינוי קבע. החל מ-1924 פירסם שורה ארוכה של מאמרים על משפט פרמה. מאמר שפירסם ב-1929 היה בעל חשיבות מיוחדת והוא זיכה אותו בפרס קול (Cole Prize) מטעם האיגוד המתמטי האמריקאי עבור עבודה מצטיינת בתחום תורת המספרים.

הביטוי המיידי ביותר של הדרך הלא שגרתית בה הלך ואנדיבר מצא את ביטויו בעבודות שביצע, יחד עם קבוצת עוזרים, אשר במרכזן שורה של חישובים ארוכים מאוד ומייגעים, הקשורים במציאת מספרים ראשוניים רגולריים. לצורך החישובים הסתייע במכונת חישוב שולחנית משוכללת במונחי התקופה. בדרך זו הצליח להוכיח את המשפט עבור כל הראשוניים הקטנים מ-619, כולל ה-36 מקרים מביניהם שגילה כי הם לא-רגולריים. המגבלות הטכניות של המכונה שעמדה לרשותו לא אפשרו לו להתקדם מעבר לכך. ארכיונו של ואנדיבר שמור בספרייה של אוניברסיטת טקסס, אוסטין, והוא גדוש בגיליונות עמוסי חישובים, הממתינים להיסטוריון שיבוא לגאול אותם מן השכחה ויגלה, אולי, פנינים מעניינות על דרך חשיבתו המקורית. אבל ההתמקדות בחישובים הפרטניים כדרך מרכזית להתמודדות עם הוכחת משפט פרמה הגיעה לשיא מעניין וחריג ב-1954 כאשר ואנדיבר החל לשתף פעולה עם אֶמה ו-דֶריק להמר (Derrick & Emma Lehmer), והשלושה השתמשו לראשונה במחשב דיגיטלי, לצורך חישובם של ראשונים רגולריים.

בני הזוג להמר היו מעורבים, ביחד ובנפרד, הן בהוכחות ״רגילות״ של משפט פרמה, והן בהפעלת מחשבים לחישובים הקשורים במספרים ראשוניים, במסגרת בעיית ״ראשוני מרסן״ (Mersenne Primes), בעיה קלאסית אחרת בתורת המספרים. ב-1941, למשל, בני הזוג יצרו מעין סינתזה של גישות שונות להתמודדות עם משפט פרמה, והוכיחו שמקרה 1 נכון עבור חזקות קטנות מ-253,747,899. מאוחר יותר, במאמרם המשותף מ-1954, השתמשו השלושה במחשב דיגיטלי והראו שכמעט חצי מהראשוניים הקטנים מ-2000 הם ראשונים לא-רגולריים, תוך שהם מוכיחים את המשפט עד התקרה הזאת.

שיתוף הפעולה של בני הזוג להמר עם ואנדיבר הוליד כיוון מחקרי חדש ומפתיע, שבמובנים רבים משמש עד עצם היום הזה. טכניקות חישוביות באמצעים אלקטרוניים ידעו פיתוח מואץ מאז 1951, והשימוש במחשבים במתמטיקה בכלל ובהוכחות מתמטיות בפרט נעשה יותר ויותר נפוץ עם השנים (כולל, למשל, בדרך של חישובים מבוזרים שמתבצעים בו-זמנית באלפי מחשבים ביתיים ומשתלבים אל תוך אלגוריתם מבוזר אחד ענק באמצעות האינטרנט). מהלכים כגון אלה הובילו להרחבה משמעותית של הידע על אודות מקרים ספציפיים של תכונות של מספרים ראשוניים, ובכלל זה ידע הקשור במשפט פרמה (אם כי יש לציין שגם בשטח הזה לא כבעיה ראשונה במעלה). כך למשל, השיטות הללו אפשרו לזהות מספרים ראשוניים רגולריים ולא-רגולריים בגבהים הולכים ונוסקים. ב-1992 התקרה הזו הגיעה למיליארד. משפט פרמה בכללותו הוכח בדרכים אלו עד לערכים גבוהים יותר ממיליארד, ומקרה 1 של המשפט, עד לערכים גבוהים הרבה יותר.

יטעה מי שיחשוב שהוכחת ויילס, הקובעת את אמיתות המשפט לכל ערך אפשרי, תעצור את פיתוחן של דרכי ההוכחה החישובית מהסוג שתיארתי כאן. העניין בפיתוח שיטות החישוב חדשות ומשוכללות והפעלתן על שאלות שונות בתורת המספרים, במיוחד בהקשר של תכונות של מספרים ראשוניים מסוגים שונים, הוא חזק ומבוסס דיו שמתמטיקאים ומדעני מחשב רבים וטובים ימשיכו לחקור אותו על היבטיו השונים, גם לאחר שידוע שהמשפט הוא נכון עבור כל מספר אפשרי.

סיכום: משפט פרמה כבעיה מתמטית חשובה ... רק בסוף הדרך

כסיכום, ברצוני לחזור אל הילברט ולשאלת הבעיות החשובות במתמטיקה. לסוגיה הזאת נדרש גם בארי מייזר ב-1991, שנתיים טרם היוודע הצלחת מאמציו של ויילס להוכחת טאנייאמה-שימורה. בהזדמנויות שונות הדגיש מייזר את התפקיד ההולך וגובר של השערות מרכזיות במתמטיקה של המאה העשרים וראה בכך תופעה ייחודית למאה הזו, וחסרת תקדים בתולדות

הדיסציפלינה.[11] את השערת טאנייאמה-שימורה הוא ציין במיוחד, כהשערה המשחקת "תפקיד סטרוקטורלי עמוק ביותר בכל דרך החשיבה שלנו, ובציפיותינו בתחום האריתמטיקה". ההשערה נראתה כבר אז כבעלת השלכות רבות, שאחת מהן היא המשפט האחרון של פרמה. עליו אמר מייזר את הדברים הבאים:

> המשפט האחרון של פרמה תמיד היה יקירם של המתמטיקאים החובבים, וכפי שהדברים עומדים היום, נראה שהם צדקו בהתאהבותם בו: על אף שטרם נמצא לו פתרון, הוא שימש השראה לכמות נכבדת של מתמטיקה מהשורה הראשונה. על אף העובדה שאין לו ולו שימוש אחד (אפילו בתוך תורת המספרים!), יש לו בכל זאת תרומה משיקית מעניינת אחת לתרום לתורת המספרים: אמיתות המשפט תיגזר מתוך השערות חיוניות ומרכזיות ביותר לתחום כולו. על אף שהוא לא יהיה יחיד בכך, המשפט האחרון של פרמה ישמש "מבחן" מעניין באופן לא שגרתי עבור ההשערות הללו.[12]

ובכן, לאחר כל ההיסטוריה הארוכה של המשפט, ורגע לפני האופוריה הגדולה שתלווה את הישגו של ויילס, מייזר מתאר את מצב העניינים בצורה קולעת ביותר ומפתיעה בפשטותה, שמעמידה את חשיבותו **המשיקית בלבד** של משפט פרמה במסגרת הראויה: אין זאת שהשערת טאנייאמה-שימורה חשובה משום שהיא מאפשרת להוכיח את המשפט האחרון של פרמה, אלא ההיפך המוחלט. המשפט האחרון של פרמה מתגלה אחרי כל השנים הללו, שבהן מי שייחס לו חשיבות עליונה היו בעיקר החובבנים, כמוצג מתמטי בעל משמעות רבה **בגלל מה שהוא עושה להשערת טאנייאמה-שימורה!**

אבל הסיפור לא נגמר כאן: בסוף המאמר מייזר מקדיש עמוד וחצי בלבד, כדי להפיג את סקרנותו האפשרית של הקורא, להסביר את הקשר בין ההשערה לבין הוכחת המשפט, ואגב כך הוא מזכיר שהשערת טאנייאמה-שימורה איננה אלא חלק קטן מתוך תוכנית מחקר רחבה ביותר, המכונה "תוכנית לנגלדנס" (Langlands Program). גם כאשר הוכחת טאנייאמה-שימורה בגרסתה המלאה פורסמה ב-1999, המתמטיקאים המעורבים בעניין דאגו להדגיש שהישגו של ויילס מקבל את מלוא משמעותו כאשר רואים אותו במסגרת תוכנית לנגלנדס. ויילס פיתח כלים—הם הדגישו—שהעשירו את התחום באופן מהותי ושיעסיקו את החוקרים "עד סוף המילניום" החדש.[13] תיאור של תוכנית לנגלנדס היא הרבה מעבר לענייננו במאמר זה, אבל אפשר להסתפק כאן בציון נקודה מעניינת הקשורה בו: קיימים קשרים משמעותיים בין תוכנית לנגלנדס והבעיות בהן היא עוסקת לבין חלק מן הנושאים שהילברט העלה ברשימת הבעיות שלו ב-1900, ובמיוחד בבעיה מספר 12 שבה. בעיה 12 הרחיבה רעיון מקורי של קרונקר תוך נגיעה בקשר שבין פונקציות אליפטיות לבין מספרים אלגבריים. האמירה הבאה מיוחסת להילברט ב-1932 בקשר לבעיה הזו:

> תורת המכפלות המרוכבות של הפונקציות האליפטיות המודלריות מאפשרת קשר הדוק בין תורת המספרים לבין האנליזה המתמטית. היא מהווה את אחד החלקים היפים ביותר, לא רק של המתמטיקה אלא של המדע בכללותו.[14]

באופן כללי יותר, החיפוש אחר קשרים עמוקים ובלתי צפויים בין תורת מתמטיות מרוחקות-לכאורה היה אחד מתווי ההיכר של עבודת הילברט והוא שימש לו קריטריון ראשון במעלה לגבי איכותן של עבודות מתמטיות בכלל. בשל כך, אין כל ספק שהשערת טאנייאמה-שימורה היתה זוכה לתשומת לב עמוקה מצידו של הילברט, אילו זכה להכיר אותה, ושבסוף הדרך הוא היה מצטרף בשמחה לחגיגות לציון הישגו של ויילס: קודם כול בגלל הצלחתו בהוכחת טאנייאמה-שימורה, ורק במקום השני בגלל ההשלכה על הוכחת המשפט האחרון של פרמה. הוא בוודאי גם היה שמח לוותר סוף-סוף על התרנגולת המטילה ביצי-זהב.

---

[11] Barry Mazur, "Conjecture", *Synthese* 111, (1997), 197-210.

[12] Barry Mazur, "Number Theory as Gadfly", *Amer. Math. Monthly*, 98(1991), 593- 610. הציטוט בעמ' 594.

[13] כפי שמופיע במאמר סקירה: Henri Darmon, "A Proof of the Full Shimura-Taniyama-Weil Conjecture Is Announced". *Notices of the AMS*, December 1999, 1397-1401.

[14] פרטים נוספים על בעיה מס' 12 וסיפורה המעניין מופיעים: ב- Norbert Schappacher, "On the history of Hilbert's twelfth problem: a comedy of errors", *Matèriaux pour l'histoire des mathématiques au XXe siècle (Nice, 1996)*, Sémin. Congr., 3, Soc. Math. France, Paris, (1998), 243–273.

.

===

מסגרת 1 - השערת רימן

מאז התעניינו בני-אדם ברצינות בחקר תכונות המספרים השלמים, חשיבותם של המספרים הראשוניים בלטה לעין. עוד ב"אלמנטים" של אוקלידס (בערך משנת 300 לפה"ס) הוכח שקיימים אינסוף מספרים ראשוניים, וההוכחה לכך הפכה מאז לאחת הדוגמאות הקלאסיות של הוכחה "יפה" או "אלגנטית". אלא שהידיעה על אינסופיותם לא אומרת מאומה על התפלגותם בתוך הקבוצה של המספרים הראשוניים. בהינתן מספר ראשוני מסויים, אין לנו מושג, על פניו, מהו המספר הראשוני הבא בתור. למעשה, ידוע שהסדרה של המספרים הראשוניים מתנהגת בצורה משונה ובלתי-צפויה למדי. כך למשל, אחת התכונות הבולטות בה היא ההופעה של זוגות מספרים ראשוניים רצופים (כמו למשל 17 ו-19) באופן מפתיע, ובהתפלגות שלא מתנהלת לפי שום תבנית מובנת מאליה. אם ניקח לדוגמה את המספר 10,000,000 ונשאל כמה מספרים ראשוניים יש בין המאה שבאים לפניו, נמצא את הרשימה הבאה:

9,999,901

9,999,907

9,999,929

9,999,931

9,999,937

9,999,943

9,999,971

9,999,973

9,999,991

לעומת זאת, במאה המספרים שלאחר מכן, אנו מוצאים רק שני ראשוניים

10,000,019

10,000,079

בסוף המאה הי"ח פרץ גאוס דרך בחקר שאלת התפלגות הראשוניים (הוא פרץ דרכים גם בתחומים רבים וחשובים אחרים), כאשר במקום לנסות ולברר את הצורה המדוייקת של ההתפלגות הזו, הפנה את מבטו לשאלה אחרת: "כמה מספרים ראשוניים ישנם הקטנים ממספר נתון N?" על אף הצורה האקראית למדי שבה מופיעים הראשוניים לאורך הדרך, התברר לגאוס, בדרך ישירה אך מייגעת של חישוב וספירה עד תקרה גבוהה מאוד של מספרים, שלשאלה הזו יש אולי תשובה פשוטה ומסודרת. אם נציין ב $p(N)$ את מספר הראשוניים שבין 1 לבין N, וב-$\log(N)$ את הלוגריתמוס של N, גאוס שיער שהנוסחה הבאה היא נכונה:

$$p(N) \approx N / \log(N)$$

זה ניחוש יפה לכל הדעות, אך מהר מאוד התברר שהוא נעשה מדוייק פחות ופחות (אם כי לא בהרבה מאוד) ככל ש-N גדל ונמשך. נשאלת אם כן השאלה, שמא ניתן למצוא אומדן מדוייק של הסטייה בין השערת גאוס לבין הערך האמיתי של $p(N)$. זמן קצר לאחר גאוס, עוד אחד מענקי המתמטיקה, רימן, חקר בעצמו את השאלה הזאת והציע דרך מקורית לחישוב הסטייה הזו. לצורך העניין הוא נעזר בפונקציה שהוגדרה על ידי אוילר ושהיתה כבר בשימוש בהקשר של תורת המספרים בעבודה של דיריכלה. הפונקציה, שמכונה פונקצית זטא (*zeta function*), מיוצגת על ידי הטור האינסופי:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots$$

רימן הציע אומדן אחר מזה של גאוס, יותר מקורב אבל עדיין לא מדוייק. אבל לצד זה הוא מצא דרך לתקן את הסטייה החדשה, ובחשבו את ההפרש הזה הוא התמקד בערכים של s שבהם

פונקציית זטא שווה אפס. כדי שהחישוב של רימן יספק את התשובה הרצויה, נדרש שכל הערכים s המאפסים את הפונקציה יהיו מהצורה

$$s = ½ + ai$$

כאשר i מייצג את השורש הריבועי של 1- ואילו a מציין מספר ממשי כלשהו.

השערת רימן היא הטענה שפוקנציית הזטא מתאפסת רק על ערכים של s שהם מהצורה הנ״ל.

==

מסגרת 2 - הדדיות ריבועית והדדיות מסדרים גבוהים

בהינתן מספר שלם p, שני מספרים שלמים a ו-b נקראים ״קונגרואנטים מודולו p״, אם ורק אם הם משאירים שארית זהה כאשר מחלקים אותם ב- p (או בניסוח אחר אבל שקול: כאשר ההפרש ביניהם מתחלק ב-p). נהוג לסמן את יחס הקונגרואנציה מודולו p באופן הבא:

$$a \equiv b \pmod p$$

יחס הקונגרואנציה מתנהג במובנים רבים כמו יחס השוויון, ולכן אפשר לנסח באמצעותו מעין משוואות. אכן, בהינתן מספר ראשוני כלשהו p, כל מספר שלם q שלא מתחלק ב- p, נקרא ״שארית ריבועית״ של p אם קיים מספר שלם x המקיים:

$$x^2 \equiv q \pmod p$$

משפט ההדדיות הריבועית קובע את התנאים שתחתם, בהינתן שני מספרים ראשוניים שונים, p ו-q , q הוא שארית ריבועית של p אם ורק אם p הוא שארית ריבועית של q. במילים אחרות, המשפט קובע את התנאים לקיום מספרים שלמים x,y המקיימים את הפסוק:

$$x^2 \equiv q \pmod p \iff y^2 \equiv p \pmod q$$

לפני גאוס, גם אוילר וגם לגרנז׳ עסקו בשאלה הזאת, ולז׳נדרה ניסח תוצאה דומה לזו של גאוס,אך תוך מתן הוכחה שגויה. גאוס ניסח והוכיח ב-*Disquisitiones* משפט הדדיות הקובע כי:

1. אם אחד מהמספרים q או p (או שניהם) הוא מהצורה $4k + 1$ אזי לשתי הקונגרואנציות הנ״ל יש פתרון, או לאף אחת אין
2. אם שני המספרים q או p הם מהצורה $4k + 3$ אזי לאחת הקונגרואנציות הנ״ל יש פתרון ולשניה אין

חוקי ההדדיות מסדרים גבוהים תוקפים אותה בעיה, עבור שאריות מסדרים גבוהים יותר. גאוס עצמו ניסח חוק הדדיות עבור החזקה 4, אבל לא הוכיח אותו. יעקובי מצא הוכחה לאחר שגאוס פירסם את החוק, אבל הוא לא פירסם אותה, אלא הציג אותה בפני תלמידיו. איזנשטיין פרסם הוכחה מלאה ב-1844, ולאחר מכן עוד ארבע הוכחות שונות. קומר פירסם ב-1848 השערה בנוגע לחוק ההדדיות הכללי. ב-1859 הוא נתן הוכחה שהיתה תקיפה למספרים ראשוניים, למעט קבוצה קטנה מהם. אולם, ניסוחו לא היה הכללי ביותר שניתן לנסח. המטלה לנסח ולהוכיח חוק כללי כזה הופיעה כבעיה מספר תשע ברשימה של הילברט ב-1900. פיליפ פורטוונגלר (Philip Fürtwangler 1869-1940) היה המתמטיקאי שתרם את התרומות החשובות ביותר לפתרון הבעיה, בין 1902 ו-1928.

==

מסגרת 3 - מספרים ראשונים ומספרים בלתי-פריקים

כדי להבין את שאלת הפירוק היחיד לגורמים ראשוניים ואת גודל ההפתעה שזומנה לחברי האקדמיה הפריזאית ב-1847, עלינו לחזור למאה השלישית לפנה״ס, לספרי האריתמטיקה ב״אלמנטים״ של אוקלידס.

בספר השביעי של ה״אלמנטים״ מוגדר מספר ראשוני באופן המוכר לנו היום, כמספר שמתחלק אך ורק בעצמו ובמספר 1, או במילים אחרות, כאי-פריקות של המספר לגורמים ראשוניים. בין המשפטים הרבים שמטפלים שם במספרים ראשוניים מופיע המשפט הבא: ״אם מספר ראשוני מחלק מכפלה של שני מספרים שלמים, הרי שהוא מחלק את אחד הגורמים במכפלה״. כך למשל, 3 מחלק את 42, ואם אנו מפרקים את 42 לשני גורמים (למשל, 6, ו-7), הרי ש-3, שהוא מספר ראשוני, חייב לחלק את אחד מהם, במקרה הזה את 6. לעומת זאת, אם ניקח את 6, שאיננו מספר ראשוני אבל מחלק את 42, ואם נחלק את 42 לשני גורמים, למשל 21 ו-2, הרי ש-6 איננו חייב לחלק את אף אחד מן הגורמים הנ״ל. מאז ימיו של אוקלידס התכונה המסויימת הזו נתפשה כאיפיון מחייב של כל מספר ראשוני, ולמעשה כשקולה להגדרה הבסיסית יותר, דהיינו, תכונת האי-פריקות לגורמים.

אחת המסקנות החשובות הנובעות בקלות מסך המשפטים של אוקלידס על אודות המספרים הראשוניים הוא מה שמכונה היום ״המשפט היסודי של האריתמטיקה״, הקובע כי כל מספר שלם ניתן לכתיבה כמכפלה של גורמים ראשוניים בדרך אחת ויחידה (למעט סדר הגורמים). זו תוצאה המוכרת לכול, עוד מבית הספר יסודי, כאשר מפרקים מספר לגורמים לצורך מציאת מכנים משותפים לשברים. בפועל, הראשון שניסח והוכיח בצורה מסודרת את המשפט היה גאוס, והוא גם הראשון שניסח והפעיל אותו על מערכת מספרים שונה ממערכת המספרים השלמים. אכן, גאוס הוכיח את המשפט היסודי של האריתמטיקה עבור השלמים הגאוסיאנים, אותם הגדרתי לעיל. מובן שלצורך זה הוא היה צריך להגדיר מיהם הראשוניים של מערכת השלמים הגאוסיאנים, ובעשותו כן גאוס הניח כמובן מאליה את השקילות בין שתי ההגדרות של הראשוניים.

כאשר דנו קושי, ליוביל ולאמה בהוכחת משפט פרמה המבוססת על פירוק לגורמים

$$x^n + y^n = (x + y)\,(x + ry)\,(x + r^2y)\,\ldots\,(x + r^{n-1}y),$$

ובשאלה אם הפירוק הזה הוא פירוק יחיד, הם הרחיבו טיעונים מהסוג שגאוס הפעיל בהוכחתו הדומה בתחום השלמים הגאוסיאנים. אכן, הגאוסיאניים בנויים באמצעות המספר i המקיים את התנאי $i^2 = -1$, ולכן $i^4 = 1$, ואילו בפירוק הנ״ל מופיע מספר אי-זוגי n ומספר אחר r המקיים $r^n = 1$. כמו גאוס, הם גם הניחו את השקילות בין שני המושגים של ראשוניות במערכת נתונה. כאן מקור ההפתעה, שהרי בפועל, כפי שהראה קומר, ההנחה הזאת פשוט איננה נכונה!

בכדי להדגים את הבעייתיות שבהנחה, הבא נתבונן בעוד מערכת מספרים דומה לשלמים הגאוסיאנים, דהיינו המספרים מהצורה $a + \sqrt{-5}\,b$. במערכת הזו ניתן לפרק את המספר 21 בשתי צורות שונות, כדלקמן:

$$21 = (4+\sqrt{-5}).(4-\sqrt{-5}) = 3.7$$

יתר על כן, ניתן עוד להוכיח, עם קצת עבודה לא לגמרי טריוויאלית, שבמערכת הזאת ארבעת המספרים שמופיעים כזוגות של גורמים ל-21 הם בעצמם אי-פריקים, כלומר אף לא אחד מהם אינו ניתן לכתיבה כמכפלה של מספרים אחרים באותה מערכת. אבל כפי שהפירוק הנ״ל מראה, המספרים האלה אינם ראשוניים במובן השני, כלומר במובן (VII 30), כי למשל המספר 3 אינו מחלק אף אחד מהגורמים שבמכפלה השמאלית. לאור הדוגמה הזאת מתברר שיש להפריד בין שתי תכונות שנראו עד כה כשקולות מניה וביה, לטובת התובנה שהשקילות בין שני המובנים (ולכן המשפט היסודי של האריתמטיקה) מתקיימים אך ורק במערכות מסויימות של מספרים, כמו

המספרים השלמים הרגילים (כפי שבא לידי ביטוי באלמנטים של אוקלידס) או במספרים השלמים הגאוסיאנים (כפי שבא לידי ביטוי ב-*Disquisitiones*).

==

מסגרת 4 - ראשונים רגולריים

בהגדרתו של קומר, מספר ראשוני נקרא ראשוני רגולרי, אם הוא לא מחלק את המונה של אף לא אחד מ"מספרי ברנולי", B_2, B_3, B_{p-3}. מספרי ברנולי, B_n, הופיעו לראשונה בעבודתו של יעקב ברנולי (1654-1705),בהקשר של תורת ההסתברות. מאוחר יותר הם גם התגלו כרלוונטיים במגוון תחומים של המתמטיקה.

מספרי ברנולי מופיעים כמקדמים של טור החזקות של הפונקציה $G(z) = z / (e^z - 1)$

$$G(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{z^k}{k!} \qquad |z| < 2\pi$$

רשימת מספרי ברנולי מתחילה כך :

B_0=1 ; B_1=-½ ; B_2= 1/6 ; B_3= 0 ; B_4= -1/30 ; B_5=0 ; B_6= 1/42 ; …

בין הראשוניים הקטנים מ-100 יש רק שלושה שאינם רגולריים : 37, 59, 67

כך למשל, 37 איננו רגולרי כי הוא מחלק את המונה של B_{32}

$$B_{32} = \frac{7709321041217}{510} = \frac{208360028141 \times 37}{510}$$

157 הוא הראשוני הנמוך ביותר שמחלק שני מונים של מספרים ברנולי , B_{62} ו- B_{110}

ב-1915 הוכיח ינסן, שיש מספר אינסופי של ראשוניים לא-רגולרים. לעומת זאת, טרם הוכח שיש מספר אינסופי של ראשוניים רגולריים. מאידך השערות שונות בתורת המספרים מצביעות על כך שמעל 60% מסך כל הראשוניים צריכים להיות רגולריים.