водит в себя $\langle c_4, c_5, c_7, c_8 \rangle$. Используя таблицу умножения, легко проверить, что $\delta \in L(SL_2) = L(F)$.

Автор выражает глубокую благодарность А.Л.Онищику за постоянное внимание к работе и полезные советы.

Литература

1. Drucker D. Exceptional Lie algebras and the structure of the hermitian symmetric spaces. – Mem. Amer. Math. Soc., 1978, 16, N 208.
2. Hijikata H. A note on the groups G_2, F_4. – J. Math. Soc. Japan, 1963, 15, N 2, 159 – 164.
3. Humphreys J.E. Introduction to Lie algebras and representation theory. – N.Y. – Heidlb. – B., 1972.
4. Борель А. Линейные алгебраические группы. – М., 1972.
5. Дьедонне Ж. Геометрия классических групп. – М., 1974.
6. Кольца, близкие к ассоциативным. – М., 1978.
7. Онищик А.Л. Разложения редуктивных групп Ли. – Матем.сб.,1969, 80, № 4, 553-599.

Поступила 1 ноября 1979 г.

ГРУППА ХОДЖА И АЛГЕБРА ЭНДОМОРФИЗМОВ АБЕЛЕВА МНОГООБРАЗИЯ

М.В.Боровой

В этой заметке доказывается, что если абелево многообразие A над $\mathbb{C}$ не имеет нетривиальных эндоморфизмов, то его группа Ходжа $Hg\,A$ является $\mathbb{Q}$-простой алгебраической группой. Фактически получен несколько более общий результат. Заметка возникла в связи с работой С.Г.Танкеева [1]. Автор благодарен Ю.Г.Зархину за полезные обсуждения.

Пусть A – абелево многообразие над $\mathbb{C}$. Положим $V=H_1(A,\mathbb{Q})$. Обозначим через T^1 компактный одномерный тор над $\mathbb{R}$: $T=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|=1\}$. Обозначим через $\varphi: T^1\to GL(V)$ гомоморфизм, задающий комплексную структуру в $V_{\mathbb{R}}=H_1(A,\mathbb{R})$. Группой Ходжа $Hg\,A$ абелева многообразия A называется наименьшая среди таких алгебраических подгрупп $H\subset GL(V)$, определенных над $\mathbb{Q}$, что $H_{\mathbb{R}}\supset im\,\varphi$. Обозначим через $End\,A$ кольцо эндоморфизмов абелева многообразия A и положим $End^\circ A=End\,A\otimes\mathbb{Q}$.

Теорема. Пусть F – центр алгебры $End^\circ A$ и F_0 – подалгебра неподвижных точек инволюции Розати в F. Положим $G=Hg\,A$ и обозначим через r число сомножителей в разложении $G'=(G,G)$ в почти прямое произведение $\mathbb{Q}$-простых групп. Тогда $r\le\dim_{\mathbb{Q}}F_0$.

Следствие 1. Если $F=\mathbb{Q}$ (в частности, если $End^\circ A=\mathbb{Q}$), то $Hg\,A$ является $\mathbb{Q}$-простой группой.

Прежде чем доказывать теорему и выводить из нее следствие 1, опишем необходимые для дальнейшего свойства группы Ходжа.

Предложение (см. [2]). (а) Группа Ходжа – связная редуктивная группа.

(б) Централизатор K группы $im\,\varphi$ в $G_{\mathbb{R}}$ является максимальной компактной подгруппой в $G_{\mathbb{R}}$.

(в) $G'_{\mathbb{R}}$ – группа эрмитова типа (т.е. ее симметрическое пространство является эрмитовым симметрическим).

(г) Алгебра $End^\circ A$ есть централизатор группы $Hg\,A$ в $End\,V$.

(д) Для любой поляризации P абелева многообразия A группа Ходжа $Hg\,A$ сохраняет соответствующую невырожденную кососимметрическую форму ψ_P на пространстве V.

Вывод следствия 1 из теоремы. Обозначим через C центр группы G. Из пункта (г) предложения следует, что $C\subset F^*$. Значит, в условиях следствия 1 $C\subset\mathbb{Q}^*$. Из пункта (б) предложения следует, что $C_{\mathbb{R}}$ – компактная группа, следовательно, C – конечная группа и $G=G'$. В силу теоремы G является $\mathbb{Q}$-простой группой.

Лемма 1. Пусть H – такой нормальный делитель в G, определенный над $\mathbb{Q}$, что группа $H_{\mathbb{R}}$ компактна. Тогда $H\subset C$ (где C – центр группы G).

Доказательство. В силу пункта (б) предложения $H_{\mathbb{R}}\subset K$, где K – централизатор группы $im\,\varphi$ в $G_{\mathbb{R}}$. Следовательно, $im\,\varphi$ содержится в (определенном над $\mathbb{Q}$) централизаторе $Z(H)$ группы H. Из определения группы Ходжа следует тогда, что $G=Z(H)$. Отсюда $H\subset C$. Лемма доказана.

Лемма 2. Рассмотрим естественное представление ρ группы $G'_{\mathbb{R}}$ в пространстве $V_{\mathbb{R}}$. Обозначим через r_ρ число попарно неэквивалентных слагаемых в разложении представления ρ в прямую сумму $\mathbb{R}$-неприводимых представлений. Тогда $r_\rho=\dim_{\mathbb{Q}}F_0$.

Доказательство. Положим $\mathfrak{A}=End^\circ A\otimes\mathbb{R}$ и выпишем разложение $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1+\ldots+\mathfrak{A}_{r_{\mathfrak{A}}}$ полупростой алгебры $\mathfrak{A}$ в сумму простых. В силу пункта (г) предложения $r_\rho=r_{\mathfrak{A}}$. Далее, известно (см. [3]), что инволюция Розати действует на центре F_i алгебры $\mathfrak{A}_i$

тождественно, если $F_i \cong \mathbb{R}$, и как комплексное сопряжение, если $F_i \cong \mathbb{C}$. Отсюда следует, что $F_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R} + \ldots + \mathbb{R}$ (z_α слагаемых), откуда $\dim_{\mathbb{Q}} F_0 = z$. Итак, $\dim_{\mathbb{Q}} F_0 = z_\alpha = z_\rho$. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Обозначим через z_{nc} число некомпактных групп в разложении $G'_{\mathbb{R}} = G_1 \cdot \ldots \cdot G_N$ группы $G'_{\mathbb{R}}$ в почти прямое произведение $\mathbb{R}$-простых групп. Из результатов Сатаке [4] известно, что для каждого $\mathbb{R}$-неприводимого представления ρ', входящего в разложение представления ρ на $\mathbb{R}$-неприводимые, существует не более одной такой некомпактной группы G_i $(1 \leq i \leq N)$, что ограничение $\rho'|_{G_i}$ нетривиально. Следовательно, $z_{nc} \leq z_\rho$. С учетом леммы 2, $z_{nc} \leq \dim_{\mathbb{Q}} F_0$.

Далее, так как $G'_{\mathbb{R}}$ – группа эрмитова типа, то группы $G_1, \ldots, G_N$ – тоже группы эрмитова типа, и, следовательно, абсолютно простые. Рассмотрим действие группы $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ на множестве групп $G_1, \ldots, G_N$. Орбитам группы Галуа взаимно однозначно соответствуют $\mathbb{Q}$-простые нормальные делители группы G'. В силу леммы I в каждой орбите есть хотя бы одна некомпактная группа G_i. Следовательно, число орбит, т.е. число z $\mathbb{Q}$-простых нормальных делителей в G', не превосходит числа z_{nc} некомпактных групп среди $G_1, \ldots, G_N$. Получаем, что $z \leq z_{nc} \leq \dim_{\mathbb{Q}} F_0$. Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть $End^0 A = \mathbb{Q}$. Выпишем разложение $\rho_{\mathbb{C}} = \rho_1 \otimes \ldots \otimes \rho_N$ представления $\rho_{\mathbb{C}}$ полупростой группы $G_{\mathbb{C}}$ в пространстве $V_{\mathbb{C}}$ в тензорное произведение неприводимых представлений ρ_i групп $G_{i\mathbb{C}}$ $(i = 1, \ldots, N)$ – простых сомножителей группы $G_{\mathbb{C}}$. Тогда каждое из представлений ρ_i сохраняет невырожденную кососимметрическую билинейную форму, а число N является нечетным.

Действительно, в силу следствия I группа Галуа транзитивно переставляет группы $G_{i\mathbb{C}}$ и представления ρ_i. Отсюда и из пункта (д) предложения вытекает следствие 2.

Литература

I. Танкеев С.Г. Об алгебраических циклах на абелевых многообразиях. – Изв. АН СССР, Сер. матем., 1978, 42, № 3, 667-696.

2. Mumford D. Families of abelian varieties. – Algebraic groups and discontinuous subgroups. Providence, 1966, 347 – 351.

3. Мамфорд Д. Абелевы многообразия. – М., I97I.

4. Satake I. Holomorphic imbeddings of symmetric domains into a Siegel space. – Amer. J. Math., 1965, 87, 425 – 461.

Поступила I7 ноября 1980 г.

ИНВАРИАНТЫ ТРИВЕКТОРА ДЕВЯТИМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Г.В.Егоров

В работе найдены свободные образующие алгебры инвариантов тривектора девятимерного пространства при естественном действии группы $SL_3(\mathbb{C})$. Как показано в [3], рассматриваемая алгебра инвариантов совпадает с алгеброй инвариантов некоторой конечной группы, порожденной отражениями. Про эту алгебру известно [I], что она свободна и что степени свободных образующих равны I2, I8, 24 и 30. Отсюда видно, что полную систему свободных образующих будут составлять любые четыре инварианта этих степеней, не удовлетворяющие ни одному из соотношений типа

$$c_1 F_{12}^2 = F_{24}\ ; \quad c_2 F_{12} F_{18} = F_{30}\ ; \ c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

В работе введено понятие графа инварианта и проверены эти условия для инвариантов, графы которых приведены на рис. I.

Используется обозначение $(ijk) = e_i \wedge e_j \wedge e_k$, где $e_1, \ldots, e_9$ – базис основного пространства.

I. Граф инварианта. Инварианты ищутся в виде полной свертки тензорного произведения $3K$ экземпляров тривектора и K форм объема, где $3K$ – степень инварианта. С точностью до знака инвариант полностью определяется комбинаторной структурой вхождения сворачиваемых индексов. В частности, если индексы двух экземпляров тривектора при свертке распределяются между формами объема одинаковым образом, то получающийся инвариант тождественно равен нулю. В дальнейшем будут рассматриваться только такие свертки, в которых индексы никакого тривектора не входят сразу в три формы объема. Для таких инвариантов вводится понятие графа инварианта.

Сопоставим каждой форме объема вершину графа. Тривектору, два индекса которого сворачиваются с формой A, а оставшийся индекс, в дальнейшем называемый выходящим, – с формой объема B, сопоставим ориентированное ребро AB. В частности, $A = B$, если все три индекса сворачиваются с одной и той же формой. Полученный граф определяет инвариант с точностью до знака.

Необходимое условие неравенства инварианта нулю состоит в том, что его граф не содержит кратных ориентированных ребер. Необходимое условие непредставимости инварианта в виде произведе-