

סיכום השיעור הקודם והשלמות

- הספקטרום של Max Planck לקרינת גוף שחור.
- בגבול הקלאסי $\hbar\omega \ll \tau$ מתקיים חוק החלוקה השווה \leftarrow נוסחת Rayleigh-Jeans.
- בגבול הקוונטי $\hbar\omega \gg \tau$ מתקיימת הקפאה קוונטית של אותה דרגת חופש. זה מה שמונע את התבדרות הספקטרום כאשר $\omega \rightarrow \infty$.
- חוק Wien ושימושיו: מדידת טמפרטורה של כור היתוך.
- **מודל Debye**: אינטרפולציה בין חוק Dulong-Petit ובין הגבול $\tau \rightarrow 0$.
- קיבול החום של חומר מוצק בטמפרטורות נמוכות תלוי בתכונות החומר. כאשר $T \ll \theta$, התלות באה דרך θ , שתלוי בצפיפות האטומים ובמהירות הקול:

$$C_V \cong \frac{12\pi^4 Nk_B}{5} \left(\frac{T}{\theta}\right)^3; \quad \theta \equiv \frac{\hbar v}{k_B} \left(\frac{6\pi^2 N}{V}\right)^{1/3}$$

- פונונים באנלוגיה לפוטונים: קוונטים של עירור אופני התנודה הנורמאליים של תנודות האטומים במוצק.
- הטיפול הקוונטי המדויק ב"גז פוטונים" ו"גז פונונים" התאפשר משום שהמצב הרב-חלקיקי של כל אוסילטור הרמוני אופיין ע"י "גורם האיכלוס" s .

לקחים מהטיפול בגז של פוטונים או פונונים

- במקום לחפש את המצב המיקרוסקופי של כל חלקיק (פוטון או פונון) באופן פרטני, מה שהיה מחייב לתייג את החלקיקים למרות היותם זהים, פשוט ספרנו כמה חלקיקים (זהים) היו בכל אחד מהמצבים החד-חלקיקיים.
- הבעיה אז היא כי מספר החלקיקים איננו נתון מראש ואף איננו קבוע.
- לכן, ננסה לוותר על מספר חלקיקים קבוע, גם כאשר מדובר בחלקיקים אשר אינם יכולים להיווצר או להיעלם כמו הפוטונים או הפונונים, כשם שויתרנו מקודם על אנרגיה טוטאלית קבועה.
- זה יאפשר לנו, בסופו של דבר, לתת טיפול קוונטי מלא למערכת של חלקיקים ללא אינטראקציות, דהיינו **גז אידיאלי**, ללא הגבלה על הצפיפות שלו!
- לצורך זה, צריך להגדיר "מגע דיפוזיוני" בין מערכות שונות, (שמאפשר מעבר חלקיקים אך איננו משנה את המצבים המיקרוסקופיים) וכן "אמבט חלקיקים".

פוטנציאל כימי; התפלגות גיבס

המערכות A, B נמצאות במגע תרמי ודיפוזיוני (וגם במגע עם אמבט חום). התנאי ל"שיווי משקל" הוא F טוטאלי מינימאלי:

$$F_{A+B} = F_A(\tau, N_A) + F_B(\tau, N_B) = \min; \quad N_A + N_B = N = \text{const}$$

$$\Rightarrow 0 = \left(\frac{\partial F_A}{\partial N_A} \right)_\tau - \left(\frac{\partial F_B}{\partial N_B} \right)_\tau \quad \text{התנאי לשיווי משקל:}$$

לכן מתבקשת ההגדרה הבאה ל**פוטנציאל כימי μ** :

$$\mu \equiv \frac{\partial F(\tau, V, N \dots)}{\partial N}$$

• μ גודל אינטנסיבי.

• שוויון של ערכי μ הוא התנאי ל**שיווי משקל דיפוזיוני**.

דוגמה: μ של גז אידיאלי קלאסי

$$F = N\tau \left[\log \left(\frac{N}{Vn_Q(\tau)} \right) - 1 \right]; \quad n_Q(\tau) = \left(\frac{m\tau}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \mu = \tau \log \left(\frac{N}{Vn_Q(\tau)} \right) = \tau \log \left(\frac{P}{\tau n_Q(\tau)} \right)$$

תכונות כלליות של μ

• μ תלוי רק בשניים מתוך שלושה משתנים בלתי תלויים: $\mu = \mu(\tau, P)$ או

$$\mu = \mu(\tau, N/V)$$

• זו תכונה כללית, שנובעת מכך ש- μ גודל אינטנסיבי:

$$\mu(\tau, \lambda V, \lambda N) = \mu(\tau, V, N) = \mu(\tau, 1, N/V)$$

• אם מביאים שתי מערכות שוות טמפרטורה A, B לידי מגע דיפוזיוני ותרמי,

אזי חלקיקים יעברו מהמערכת בעלת μ גבוה אל המערכת בעלת μ נמוך:

$$F = F_A(\tau, N_A) + F_B(\tau, N_B); \quad N_A + N_B = \text{const}; \quad 0 > \delta F = (\mu_A - \mu_B) \delta N_A$$

• פוטנציאל כימי אינטרינזי ופוטנציאל כימי טוטאלי, כאשר המערכות A, B נמצאות תחת השפעה של אנרגיה פוטנציאלית חיצונית שתלויה במקום $V(\mathbf{r})$:

$$F_A \rightarrow F_A + N_A V(\mathbf{r}_A); \quad F_B \rightarrow F_B + N_B V(\mathbf{r}_B)$$

$$\mu_{\text{tot}} = \mu_{\text{in}} + V(\mathbf{r}) \quad \text{פוטנציאל כימי טוטאלי:}$$

• כך אפשר למנוע מעבר בין מערכות בעלות μ_{in} אינטרינזי שונה:

$$\Rightarrow \delta F = (\mu_A - \mu_B) \delta N_A + [V(\mathbf{r}_A) - V(\mathbf{r}_B)] \delta N_A = (\Delta \mu_{\text{in}} + \Delta V) \delta N_A$$

פוטנציאל אלקטרוכימי $\mu_{\text{tot}} = \mu_{\text{in}} + q\phi(\mathbf{r})$: הוא המטען החשמלי

של חלקיק אחד.

דוגמה: נוסחת הלחץ הבָּאָרומטרי

$$\mu_{\text{tot}} = \mu_{\text{in}} + Mgh = \text{const}$$

$$\tau \log\left(\frac{n(h)}{n_Q(\tau)}\right) + Mgh = \tau \log\left(\frac{n(0)}{n_Q(\tau)}\right) \Rightarrow \log\left(\frac{n(h)}{n(0)}\right) = -\frac{Mgh}{\tau}$$

$$\Rightarrow n(h) = n(0) \exp\left(-\frac{Mgh}{\tau}\right)$$

$$Z(\tau, V, N_1 \dots N_r) = \prod_{i=1}^r Z_i(\tau, V, N_i)$$

חוק Dalton

$$F(\tau, V, N_1 \dots N_r) = \sum_{i=1}^r F_i(\tau, V, N_i) \Rightarrow P = \sum_i P_i = \sum_i n_i \tau$$

$$\Rightarrow P(h) = \tau \sum_i n_i(0) \exp\left(-\frac{M_i gh}{\tau}\right)$$

שינוי צפיפות של מרכיבי האטמוספירה עם הגובה

$$\Rightarrow n_i(h) = n_i(0) \exp\left(-\frac{M_i gh}{\tau}\right)$$

• הרכב האויר בגובה פני הים (פרקציות מולקולריות):

$$\text{N}_2 - 80\% \quad M_{\text{N}}=14$$

$$\text{O}_2 - 19\% \quad M_{\text{O}}=16$$

$$\text{Ar} - 1\% \quad M_{\text{Ar}}=40$$

• שאלה: מהו הרכב האויר בגובה 20 ק"מ מעל פני הים?

סיכום השיעור הקודם והשלמות

- דרגת חופש מיקרוסקופית של מערכת שנמצאת במגע תרמי עם אמבט חום בטמפרטורה τ , האנרגיה הממוצעת שלה **במשטר קלאסי** היא תמיד מסדר גודל של τ . **במשטר קוונטי**, כלומר כאשר יש "הקפאה קוונטית" של אותה דרגת חופש, האנרגיה הממוצעת שלה יכולה להיות שונה מאוד מ- τ .
- הטיפול הקוונטי המדויק ב"גז פוטונים" ו"גז פונונים" התאפשר משום שהמצב הרב-חלקיקי של כל אוסילטור הרמוני אופיין ע"י "**גורם האיכלוס**" s . גורם זה זהה עם "דרגת העירור" של האוסילטור ההרמוני.
- מגע דיפוזיוני, שיווי משקל דיפוזיוני, פוטנציאל כימי אינטרינזי ופוטנציאל כימי טוטאלי.
- הנוסחה הבארומטרית.
- מסקנה מהנוסחה הבארומטרית: לא רק הלחץ תלוי בגובה מעל פני הים, אלא גם ההרכב של האוויר!
- תערובת גזים אידיאליים קלאסיים, חוק Dalton.

μ בהקשרים אחרים

$$dF = -SdT - PdV + \mu dN \quad \Rightarrow \quad \mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V}$$

$$dU = d(F + TS) = TdS - PdV + \mu dN \quad \Rightarrow \quad \mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S,V}$$

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN \quad \Rightarrow \quad -\frac{\mu}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_{U,V}$$

התפלגות גיבס; פונקצית החלוקה של גיבס

מערכת H נמצאת במגע תרמי ודיפוזיוני עם אמבט חום וחלקיקים R . מה ההסתברות שיש בה N חלקיקים ושהיא נמצאת במצב המיקרוסקופי s ?

$$g_{R+H} = g_R \times 1 = g_R[N_0 - N, U_0 - \varepsilon_s(N)] = \exp[\sigma_R(N_0 - N, U_0 - \varepsilon_s(N))]$$

$$d\sigma = \frac{1}{\tau} dU + \frac{P}{\tau} dV - \frac{\mu}{\tau} dN$$

$$\cong \exp \left[\sigma_R(N_0, U_0) - N \frac{\partial \sigma_R}{\partial N_0} - \varepsilon_s \frac{\partial \sigma_R}{\partial U_0} + \frac{1}{2} N^2 \frac{\partial^2 \sigma_R}{\partial N_0^2} + N \varepsilon_s \frac{\partial^2 \sigma_R}{\partial N_0 \partial U_0} + \frac{1}{2} \varepsilon_s^2 \frac{\partial^2 \sigma_R}{\partial U_0^2} + \dots \right]$$

$$\Rightarrow P(N, s) = P(N, \varepsilon_s(N)) \propto \exp \left(\frac{\mu N - \varepsilon_s(N)}{\tau} \right) \quad \text{התפלגות גיבס:}$$

זה תקף גם אם המערכת קטנה!!

$$Z_G(\beta, \mu) \equiv \sum_N \sum_s e^{\beta[\mu N - \varepsilon_s(N)]} = \sum_N e^{\beta \mu N} Z_N \quad \text{פונקצית החלוקה של גיבס:}$$

$$\langle N \rangle = \sum_N \sum_s N P(N, \varepsilon_s(N)) = \tau \frac{\partial \log Z_G(\beta, \mu)}{\partial \mu} \quad \text{מספר חלקיקים ממוצע:}$$

$$\frac{\partial \log Z_G(\beta, \mu)}{\partial \beta} = \mu \langle N \rangle - \langle \varepsilon \rangle \rightarrow \mu N - U \quad \text{חישוב האנרגיה הממוצעת:}$$

חישוב השונות של N

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{\tau, V} = \tau \frac{\partial^2 \log Z_G(\beta, V, \mu)}{\partial \mu^2} = \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\sum N e^{-\beta[\varepsilon_s(N) - \mu N]}}{\sum e^{-\beta[\varepsilon_s(N) - \mu N]}} \right) = \beta \left(\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 \right) \equiv \beta \langle (\Delta N)^2 \rangle$$

$$\Rightarrow \langle (\Delta N)^2 \rangle = \tau \left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_{\tau, V} = O(N) > 0; \quad \langle (\Delta N)^2 \rangle^{1/2} = O(N^{1/2}) \ll N$$

דוגמה: עבור גז אידיאלי קלאסי מקבילים

$$\mu = \tau \log \left(\frac{N/V}{n_Q(\tau)} \right) \Rightarrow N = V n_Q(\tau) e^{\mu/\tau} \Rightarrow \left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_{\tau, V} = \frac{V n_Q(\tau) e^{\mu/\tau}}{\tau} = \frac{N}{\tau} \Rightarrow \langle (\Delta N)^2 \rangle = N$$

הפוטנציאל התרמודינמי הגרנד-קנוני Φ

$$\Phi \equiv U - \tau\sigma - \mu N = F - \mu N$$

• כאן מדובר במערכת H גדולה שנמצאת במגע תרמי ודיפוזיוני עם אמבט של חום וחלקיקים R .

• μ, τ הם פרמטרים של האמבט.

• **טענה:** Φ/τ מזערי כאשר המערכת המשולבת $H+R$, שהיא מערכת סגורה ומבודדת, נמצאת בקונפיגורציה המאקרוסקופית המסתברת ביותר שלה:

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_R(N_0 - N, U_0 - U) + \sigma_H$$

$$\cong \sigma_R(N_0, U_0) - N \frac{\partial \sigma_R}{\partial N_0} - U \frac{\partial \sigma_R}{\partial U_0} + \frac{1}{2} N^2 \frac{\partial^2 \sigma_R}{\partial N_0^2} + NU \frac{\partial^2 \sigma_R}{\partial N_0 \partial U_0} + \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial^2 \sigma_R}{\partial U_0^2} + \dots + \sigma_H$$

$$= \sigma_R(N_0, U_0) - \frac{\Phi}{\tau} + O\left(\frac{1}{N_0}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \sigma_R}{\partial U_0} = \frac{1}{\tau}; \quad \frac{\partial \sigma_R}{\partial N_0} = -\frac{\mu}{\tau}$$

מציאת המינימום של Φ/τ

עושים תחילה מינימיזציה של Φ/τ כאשר N קבוע, ורק לאחר מכן מאפשרים ל- N להשתנות:

$$0 = \frac{\partial}{\partial N} \left[\frac{F_H(\tau_R, V, N) - \mu_R N}{\tau_R} \right] = \frac{\mu_H(\tau_R, V, N) - \mu_R}{\tau_R} \Rightarrow N = N(\tau_R, V, \mu_R)$$

$$\Phi_{\text{eq}} \equiv \Phi(\tau, V, \mu) = F_H(\tau, V, N(\tau, V, \mu)) - \mu N(\tau, V, \mu)$$

זוהי טרנספורמציה לג'נדר מהמשתנה הבלתי תלוי N אל המשתנה הבלתי תלוי μ : $d\Phi \equiv d(F - \mu N) = -\sigma d\tau - PdV - Nd\mu$

לכן $\Phi_{\text{eq}}(\tau, V, \mu)$ היא **פונקציה תרמודינמית בסיסית של המערכת!**

$$\frac{\partial^2}{\partial N^2} \left[\frac{F_H(\tau_R, V, N) - \mu_R N}{\tau_R} \right] = \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{\mu_H(\tau_R, V, N) - \mu_R}{\tau_R} \right)$$

$$= \beta \left(\frac{\partial \mu}{\partial N} \right)_{\tau, V} = \left[\tau \left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_{\tau, V} \right]^{-1} = \langle (\Delta N)^2 \rangle^{-1} > 0$$

(כמעט) סיכום הנושא של "מגע דיפוזיוני"

- "אמבט חלקיקים" = ויתור על מספר חלקיקים קבוע N במערכת.
- התפלגות גיבס.
- פונקצית החלוקה של גיבס.
- חישוב השונות של N : $\langle (\Delta N)^2 \rangle = O(N)$.
- "פוטנציאל התרמודינמי הגרנד-קנוני" כפונקציה תרמודינמית בסיסית.
- אם מערכת נמצאת במגע תרמי ודיפוזיוני עם אמבט של חום וחלקיקים, ואם היא מורכבת מ- r תת-מערכות ללא אינטראקציה או במגע חלש (תרמי ודיפוזיוני) זו עם זו, אזי אפשר לחשב את פונקצית החלוקה של גיבס כמכפלה של פונקציות חלוקה של גיבס של כל התת-מערכות:

$$Z_G = \sum_{N_1, s_1} \sum_{N_2, s_2} \dots \sum_{N_r, s_r} \exp \left(- \sum_{i=1}^r \beta [\varepsilon_{s_i}(N_i) - \mu N_i] \right) = \prod_{i=1}^r Z_{Gi}(\beta, V, \mu)$$

הקשר בין Z_G ו- Φ

$$Z_N = \sum_s e^{-\beta \varepsilon_s(V, N)} = e^{-\beta F(\tau, V, N)} \Rightarrow Z_N > 1; \beta F < 0$$

$$\beta F = O(-N) \Rightarrow Z_N = e^{+O(N)}; \quad Z_{N=0} = 1 \Rightarrow F(\tau, V, N=0) = 0$$

$$Z_G = \sum_N \sum_s e^{-\beta \varepsilon_s(V, N) + \beta \mu N} = \sum_N Z_N e^{\beta \mu N} = \sum_N e^{-\beta [F(\tau, V, N) - \mu N]} > 1$$

$$\beta [F(\tau, V, N=0) - \mu(N=0)] = 0; \quad \beta [F(\tau, V, N) - \mu N] = O(\pm N)$$

$$Z_G \cong A \exp \left\{ -\min_N [\beta (F(\tau, V, N) - \mu N)] \right\}; \quad 1 < A < O(+N)$$

$$\log Z_G = -\min_N \{ \beta [F(\tau, V, N) - \mu N] \} + O(\log N) = -\Phi_{\text{eq}}(\tau, V, \mu) / \tau$$

$$\Rightarrow \beta \Phi_{\text{eq}}(\tau, V, \mu) = -\log Z_G(\tau, V, \mu) < 0$$

• **לכן:** חישוב של $Z_G(\tau, V, \mu)$ ייתן לנו את מלוא המידע על התכונות התרמודינמיות של המערכת.

• זה נכון גם אם המערכת איננה נמצאת במגע עם אמבט חום ו/או חלקיקים!

גז אידיאלי קוונטי

- אם המערכת H בשיווי משקל עם אמבט של חום וחלקיקים R , אזי אפשר לטפל לחוד בכל אחד מהמצבים החד-חלקיקיים s של H עם איכלוס אפשרי כלשהו n_s :

$$Z_G = \sum_{n_1, n_2, \dots} \exp\left[\beta \sum_s n_s (\mu - \varepsilon_s)\right] = \prod_s \left(\sum_{n_s} e^{\beta n_s (\mu - \varepsilon_s)} \right) \equiv \prod_s Z_s; \quad Z_s = \sum_n e^{\beta n (\mu - \varepsilon_s)}$$

- **אבל:** בוזונים ופרמיונים; עקרון Pauli. $\Rightarrow \log Z_G = \sum_s \log Z_s$

- **עקרון Pauli לפרמיונים:** במצב חד-חלקיקי לא יכול להימצא יותר מחלקיק זהה אחד.

- **לבוזונים:** אפשר לאכלס מצב חד חלקיקי באיכלוס כלשהו, ללא הגבלה.

- **הערה בדבר הקשר עם סימטריה:** כל פונקצית גל רב-חלקיקית חייבת להיות סימטרית (במקרה של בוזונים זהים) או אנטי-סימטרית (במקרה של פרמיונים זהים) תחת חילוף הקואורדינטות של שני חלקיקים זהים.
- הערה בדבר הקשר עם הספין של החלקיק.

התפלגות פרמי-דירק לפרמיונים

ההסתברויות לאיכלוסים שונים ע"י פרמיונים זהים:

$$Z_F = \sum_{n=0}^1 e^{\beta n(\mu-\varepsilon)} = 1 + e^{\beta(\mu-\varepsilon)}; \quad P_F(\varepsilon, n=0) = \frac{1}{1 + e^{\beta(\mu-\varepsilon)}};$$

$$P_F(\varepsilon, n=1) = \frac{e^{\beta(\mu-\varepsilon)}}{1 + e^{\beta(\mu-\varepsilon)}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}; \quad P_F(\varepsilon, n > 1) = 0$$

$$\Rightarrow f_F(\varepsilon) \equiv \langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} = P_F(\varepsilon, n=1)$$

זו נקראת התפלגות פרמי-דירק (Fermi-Dirac distribution)

התפלגות בוז-איינשטיין (Bose-Einstein)

לבוזונים

$$\lambda \equiv e^{\beta\mu}$$

$$Z_B = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta n(\mu - \varepsilon_s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n e^{-\beta n \varepsilon_s} = \frac{1}{1 - \lambda e^{-\beta \varepsilon_s}} = \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - \varepsilon_s)}}$$

זו נקראת התפלגות בוז-איינשטיין:

$$f_B(\varepsilon) \equiv \langle n \rangle = \frac{\sum_n n \lambda^n e^{-\beta n \varepsilon}}{\sum_n \lambda^n e^{-\beta n \varepsilon}} = \lambda \frac{\partial \log Z_B}{\partial \lambda} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1} \neq P_B(\varepsilon, 1)$$

אלה ההסתברויות לאיכלוסים שונים ע"י בוזונים זהים:

$$P_B(\varepsilon_s, n) = e^{\beta n(\mu - \varepsilon_s)} \left(1 - e^{\beta(\mu - \varepsilon_s)} \right) = \lambda^n e^{-\beta n \varepsilon_s} \left(1 - \lambda e^{-\beta \varepsilon_s} \right)$$

שאלה: אלו ערכים יכול μ לקבל?

$$f_F(\varepsilon) \equiv \langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

• התפלגות פרמי-דירק:

$$f_B(\varepsilon) \equiv \langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

• התפלגות בוזה-
איינשטיין:

• כל ההבדל הוא ± 1
במכנה.

סיכום השיעור הקודם והשלמות

- הקשר בין Z_G ובין Φ .

- גז אידיאלי קוונטי.

- בוזונים ופרמיונים.

- החשיבות של עקרון פאולי להסברת התכונות הכימיות של אטומים.

$$f_F(\varepsilon) \equiv \langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

- התפלגות פרמי-דירק:

$$f_B(\varepsilon) \equiv \langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

- התפלגות בוז-איינשטיין:

- אלו ערכים יכול μ לקבל?

"המשטר הקלאסי" של גז אידיאלי קוונטי

המשטר הזה מתקיים כאשר קיים: $e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \gg 1$ or $e^{\beta\varepsilon} \gg e^{\beta\mu} \equiv \lambda$

$$\Rightarrow f_F(\varepsilon) \cong f_B(\varepsilon) \cong e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} = \lambda e^{-\beta\varepsilon} \equiv f_{\text{Class}}(\varepsilon) \ll 1$$

כאשר **כל המצבים החד-חלקיקיים** נמצאים במשטר הקלאסי, אזי:

$$\langle N \rangle = \sum_s f_{\text{Class}}(\varepsilon_s) = \lambda \sum_s e^{-\beta\varepsilon_s} = \lambda Z_1 = \lambda n_Q V \Rightarrow \lambda = \frac{\langle N \rangle}{n_Q(\tau) V} = \frac{\langle n \rangle}{n_Q(\tau)}$$

$$\Rightarrow \mu = \tau \log \lambda = \tau \log \left(\frac{\langle n \rangle}{n_Q(\tau)} \right) \rightarrow \mu = \tau \log \left(\frac{n}{n_Q(\tau)} \right)$$

אם המצב החד-חלקיקי הנמוך ביותר הוא בעל אנרגיה 0, אזי התנאי לכך שכל המצבים הללו הם במשטר קלאסי הוא:

$$\lambda \ll 1 \Rightarrow n \ll n_Q(\tau) \Rightarrow -\frac{\mu}{\tau} \gg 1$$

גדלים תרמודינמיים אחרים של גז אידיאלי

חד-אטומי קוונטי במשטר הקלאסי

$$dF = -\sigma d\tau - PdV + \mu dN \Rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{\tau, V} = \mu(\tau, V, N) = \tau \log \frac{N/V}{n_Q(\tau)}$$

$$F(\tau, V, N=0) = 0 \Rightarrow F(\tau, V, N) = \int_0^N dN \mu(\tau, V, N) = N\tau \left(\log \frac{N/V}{n_Q(\tau)} - 1 \right)$$

- קיבלנו שוב את התוצאה הידועה עבור גז אידיאלי קלאסי.
- מדרך הקבלה נובע כי התוצאה תקפה כאשר מתקיים

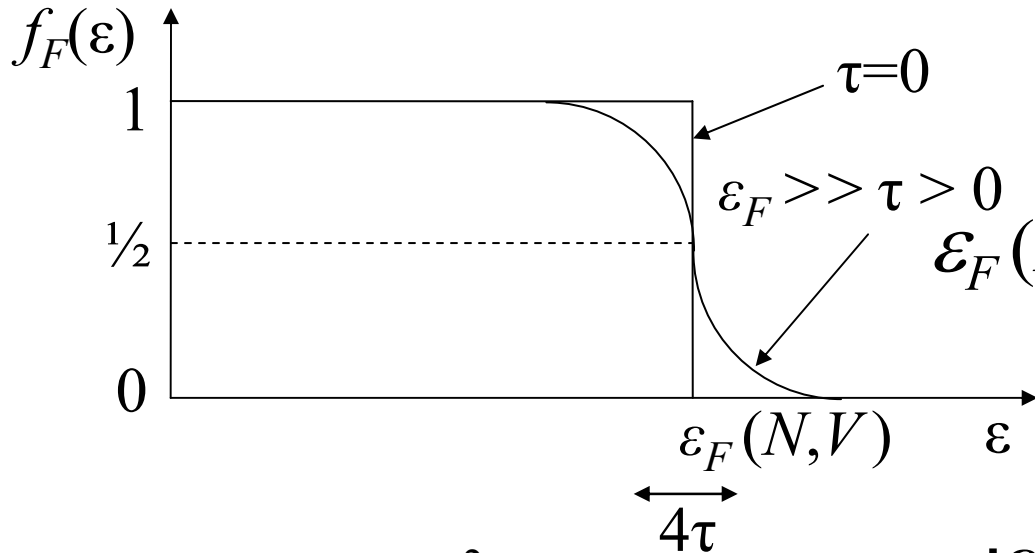
$$n \equiv \frac{N}{V} \ll n_Q(\tau) \equiv \left(\frac{m\tau}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}$$

- בכדי להתקרב למצב הזה, אפשר להקטין את הצפיפות n או להגדיל את הטמפרטורה τ .

סיכום השיעור הקודם והשלמות

- המשטר הקלאסי של גז אידיאלי קוונטי: זה כאשר בכל המצבים החד-חלקיקיים האיכלוס הממוצע $\langle n \rangle$ קטן בהרבה מ-1. אז גם מקבלים שצפיפות החלקיקים מקיימת $N/V \ll n_Q(\tau)$.
- חישבנו את μ , עבור גז אידיאלי קוונטי במשטר הקלאסי, כאשר T, V, N נתונים. חישבנו גם את הפונקציה התרמודינמית הבסיסית $F(T, V, N)$. הראינו מתי זה קירוב טוב.
- גז אידיאלי קוונטי נקרא מנוון כאשר יש מצבים חד-חלקיקיים עם איכלוס ממוצע $\langle n \rangle$ אשר איננו הרבה יותר קטן מ-1.
- פרמיונים אלמנטריים (אלקטרון, פרוטון, ניוטרון) ובוזונים אלמנטריים (פוטון, פונון, פֵּיוֹן).
- החשיבות של עקרון פאולי להבנת התכונות של אטומים: מדוע באטומים כבדים לא נמצאים כל האלקטרונים במצב החד-חלקיקי הכי נמוך? מדוע שני אטומים דוחים זה את זה דחייה כה חזקה כאשר המרחק ביניהם קטן מסכום הרדיוסים שלהם?
- פרמיונים מורכבים ובוזונים מורכבים: אופיו של החלקיק (פרמיון או בוזון) נקבע ע"י מספר הפרמיונים האלמנטריים שמרכיבים אותו.
- גז אידיאלי קוונטי מנוון של פרמיונים זהים.
- חישוב של אנרגיית פרמי כאשר V, N נתונים.
- כאשר $0 \leftarrow \tau$, אזי $\mu \leftarrow \varepsilon_F(V, N) : \varepsilon_F(V, N) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n_F}{L} \right)^2 = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$
- כאשר $\tau \ll \varepsilon_F$, אזי האיכלוס של מרבית המצבים החד-חלקיקיים דומה מאוד לאיכלוס שהיה להם כאשר המערכת הייתה במצב היסוד הרב-חלקיקי שלה.

גז קוונטי פרמיוני מנוון



$$f_F(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} = \langle n \rangle$$

כאשר $\tau \leftarrow 0$, אזי $\mu \leftarrow \epsilon_F(N, V)$

• גז של פרמיונים נקרא

מנוון כאשר $\tau < \epsilon_F$

חישוב של אנרגיית פרמי ϵ_F :

$$\epsilon_{\mathbf{n}} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi |\mathbf{n}|}{L} \right)^2; \quad \mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) = 1, 2, 3, \dots; \quad |\mathbf{n}| \equiv (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2}$$

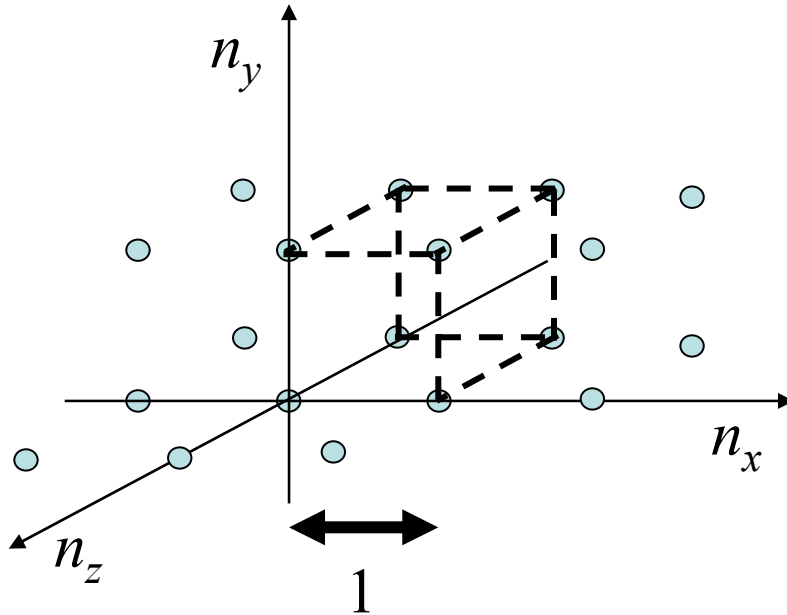
n_F הוא רדיוס הכדור במרחב \mathbf{n} שמכיל את כל המצבים המאוכלסים כאשר $\tau = 0$. בחישובו צריך להביא בחשבון גם את הספין של האלקטרון:

$$\epsilon_F \equiv \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n_F}{L} \right)^2; \quad N = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} n_F^3 \Rightarrow n_F = \left(\frac{3N}{\pi} \right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow \epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 N}{L^3} \right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$$

שימו לב: כאן n מסמן את צפיפות האלקטרונים במרחב הרגיל $n = N/V$

סריג קובי של המצבים של חלקיק חופשי במרחב n



- המקצוע של תא היחידה בסריג הזה ארכו 1, לכן הנפח של התא אף הוא 1.

אנרגיה U ; לחץ P ; טמפרטורת פרמי T_F

$$U_0 \equiv U(\tau = 0, V, N) = 2 \sum_{|\mathbf{n}| \leq n_F} \varepsilon_{\mathbf{n}} = 2 \cdot \frac{1}{8} \int_0^{n_F} 4\pi n^2 \varepsilon_{\mathbf{n}} dn = \frac{\pi^3}{2m} \left(\frac{\hbar}{L} \right)^2 \int_0^{n_F} n^4 dn$$

$$= \frac{\pi^3}{10m} \left(\frac{\hbar}{L} \right)^2 n_F^5 = \frac{3}{5} N \varepsilon_F \Rightarrow \frac{U_0}{N} = \frac{3}{5} \varepsilon_F = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3} \propto n^{2/3}$$

• עד כדי קבועים כפליים מסדר גודל 1, הלחץ שווה לצפיפות

$$P_0 = - \left(\frac{\partial U_0}{\partial V} \right)_{\sigma, N} = \frac{2}{3} \frac{U_0}{V} = \frac{2}{5} n \varepsilon_F \propto n^{5/3} \quad \text{האנרגיה, וגם ל- } n\varepsilon_F$$

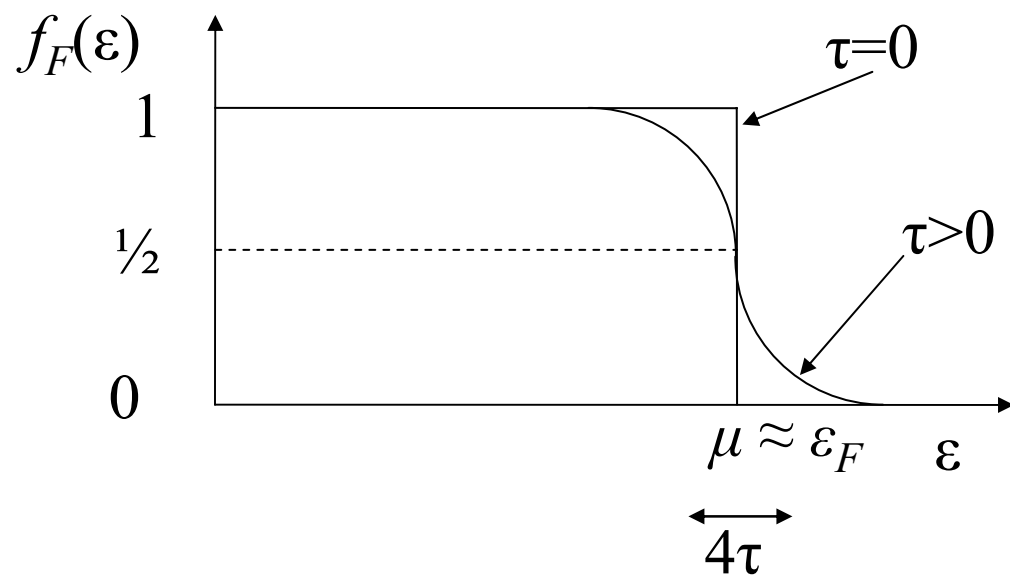
האלקטרונים החופשיים במתכת מתאפיינים כדלקמן:

$$; T_F \approx 10^4 - 10^5 \text{ K} \leftarrow \varepsilon_F \equiv \tau_F \equiv k_B T_F \approx 1 - 10 \text{ eV}$$

$$P_0 \sim 10^6 \text{ atm}$$

• סדר גודל של השינוי באנרגיה, ובעקבותיו קיבול החום, כאשר

$$\Delta U \sim N \frac{\tau}{\varepsilon_F} \cdot \tau = \frac{N \tau^2}{\varepsilon_F} \ll N \tau \Rightarrow \frac{C_V}{k_B} \sim \frac{N \tau}{\varepsilon_F} \ll \frac{3}{2} N \equiv \frac{C_V(\text{classical mono})}{k_B} \quad \text{: } \tau \ll \varepsilon_F$$



• קומפריביביליות איזותרמית κ_T :

$$\kappa_T \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T,N} = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial P} \right)_T; \quad v \equiv \frac{V}{N}$$

• תרומתם של האלקטרונים החופשיים

במתכת למודול הנפחי $1/\kappa_T$:

$$\frac{1}{\kappa_T} = n \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_T \propto n^{5/3}; \quad \frac{1}{\kappa_T} \sim P_0 \sim 10^{11} \frac{\text{Newton}}{\text{m}^2}$$

זזה גדול מאוד!

סיכום השיעור הקודם והשלמות

- אנרגית פרמי, אנרגיה פר חלקיק, לחץ, וקומפרסיביליות עבור גז פרמיונים מנוון כאשר $\tau = 0$.
- ערכים מספריים של הגדלים הללו עבור גז של אלקטרונים "חופשיים" במתכת.
- קיבול חום של גז פרמיוני מנוון – חישוב מקורב עד כדי גורם כפלי מסדר גודל 1.
- הערך המוקטן של C_V , לעומת ערכו בגז אידיאלי קלאסי, הוא דוגמה נוספת לתופעה של "הקפאה קוונטית של דרגות חופש": דרגות החופש כאן הן המצבים החד-חלקיקיים. כאשר $\tau \ll \varepsilon_F$, אזי רוב המצבים הללו אינם משנים את אכלוסם כאשר τ משתנה.

צפיפות המצבים החד-חלקיקיים $D(\varepsilon)$

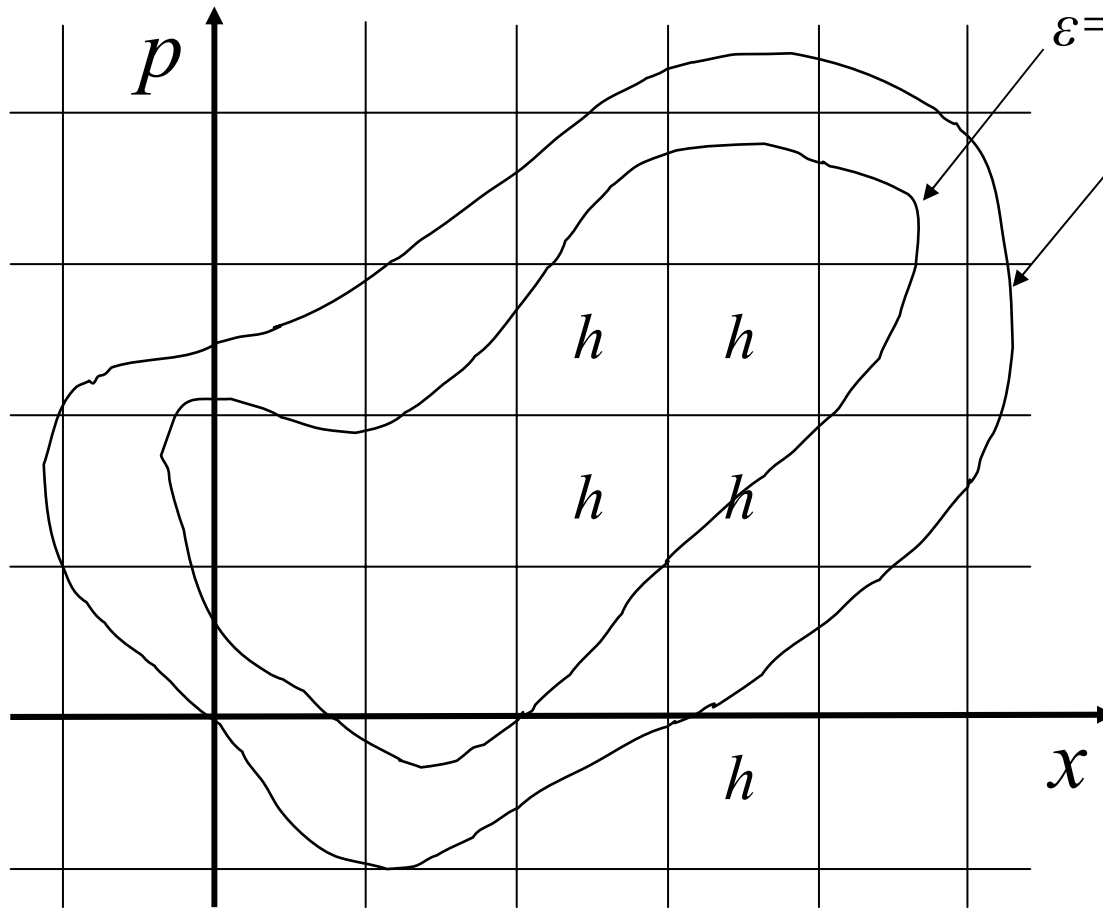
$$\int_{-\infty}^{\varepsilon} D(\varepsilon) d\varepsilon = g(\varepsilon) \Rightarrow D(\varepsilon) = g'(\varepsilon)$$

$$n \equiv |\mathbf{n}| \Rightarrow \varepsilon_n \equiv \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 \Rightarrow n(\varepsilon) = \frac{L}{\pi} \left(\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2} \right)^{1/2}$$

$$g(\varepsilon) = \frac{2}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} [n(\varepsilon)]^3 = \frac{V(2m\varepsilon)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}$$

$$\Rightarrow D(\varepsilon) = g'(\varepsilon) = \frac{V(2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \varepsilon^{1/2}; \quad D(\varepsilon_F) = \frac{3}{2} \frac{N}{\varepsilon_F}$$

צפיפות מצבים במרחב הפזות; תמונה סמי-קלאסית



זו צפיפות המצבים
במרחב k
($d =$ הממדיות):

$$\frac{V_d}{(2\pi)^d}$$

זה שוב מאשר את הבחירה של h כשטח של מצב קוונטי אלמנטרי במישור $x-p$.

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{d^3x d^3p}{h^3} \rightarrow \frac{Vd^3k}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 \frac{dk}{d\varepsilon} d\varepsilon = \frac{V(2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2}}{4\pi^2 \hbar^3} d\varepsilon$$

• רק חסר פה גורם 2, בשל ספין $1/2$, כדי שתוצאה זו תתלכד עם החישוב הקודם של $D(\varepsilon)$.

מצבים של חלקיק חופשי בודד בקובייה $L \times L \times L$ עם תנאי שפה מחזוריים על פונקצית הגל

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}; \quad \mathbf{k} = \left(\frac{2\pi n_x}{L}, \frac{2\pi n_y}{L}, \frac{2\pi n_z}{L} \right); \quad n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

- שימו לב להבדלים בערכי \mathbf{k} לעומת הערכים שהופיעו כאשר הנחנו תנאי שפה $\psi(\mathbf{r}) = 0$!

- במרחב \mathbf{k} , המצבים הללו מיוצגים ע"י נקודות של סריג קובי, ובו המקצוע של תא היחידה אורכו $2\pi/L$. לכן הנפח של תא יחידה הוא $(2\pi/L)^3$, ולכן צפיפות המצבים במרחב \mathbf{k} היא כדלקמן:

$$\frac{1}{(2\pi/L)^3} = \frac{L^3}{(2\pi)^3} = \frac{V}{(2\pi)^3}$$

- אם נבחר קופסה בצורת מנסרה ישרת זוויות, המצבים יהיו שונים אך צפיפות המצבים תהיה אותה.

כלליות התוצאה עבור $D(\varepsilon)$ ו- $V_d / (2\pi)^d$

- התוצאות הללו נשארות ללא שינוי גם אם בוחרים תנאי שפה אחרים לפונקצית הגל או צורה אחרת של קופסה.
- לאמיתו של דבר, תנאי השפה המדוייקים הם מסובכים מאוד ואינם ידועים כלל!
- בפועל, חלקיק מעולם לא יימצא באחד מהמצבים החד-חלקיקיים שאינם תלויים בזמן.
- כמעט תמיד, כל מה שחשוב לתכונות המאקרוסקופיות הנפחיות זה צפיפות המצבים.
- להלן נראה כי, במקרה של גז פרמיוני מנוון, כל מה שחשוב זה $D(\varepsilon_F)$.

סיכום השיעור הקודם והשלמות

- אנרגית פרמי, אנרגיה פר חלקיק, לחץ, וקומפרסיביליות עבור גז פרמיונים מנוון כאשר $\tau = 0$.
- ערכים מספריים של הגדלים הללו עבור גז של אלקטרונים "חופשיים" במתכת.
- קיבול חום של גז פרמיוני מנוון – חישוב מקורב עד כדי גורם כפלי מסדר גודל 1.
- הערך המוקטן של C_V , לעומת ערכו בגז אידיאלי קלאסי, הוא דוגמה נוספת לתופעה של "הקפאה קוונטית של דרגות חופש": דרגות החופש כאן הן המצבים החד-חלקיקיים. כאשר $\tau \ll \varepsilon_F$, אזי רוב המצבים הללו אינם משנים את אכלוסם כאשר τ משתנה.
- צפיפות המצבים הקוונטיים של חלקיק בודד ליחידת אנרגיה.
- צפיפות המצבים של חלקיק בודד ליחידת נפח במרחב פאזות סמי-קלאסי.
- צפיפות המצבים של חלקיק בודד ליחידת נפח במרחב וקטורי הגל \mathbf{k} .
- האוניברסאליות של צפיפות המצבים ליחידת אנרגיה במערכת גדולה: $D(\varepsilon)$ איננה תלויה בתנאי השפה המדוייקים.
- האוניברסאליות של צפיפות המצבים במרחב \mathbf{k} : תלויה רק בממדיות d .

שימושים עבור $D(\varepsilon)$ ועבור צפיפות מצבים במרחב \mathbf{k}

• באמצעות צפיפות המצבים החד-חלקיקיים $D(\varepsilon)$, והאיכלוס הממוצע של מצב

חד-חלקיקי s ע"י פרמיונים או בוזונים $\langle n_s \rangle = f(\varepsilon_s)$, אפשר לחשב כל מיני גדלים מאקרוסקופיים של מערכת גדולה:

$$\langle N \rangle = \sum_s f(\varepsilon_s) \rightarrow \int d\varepsilon D(\varepsilon) f(\varepsilon); \quad \langle U \rangle = \sum_s \varepsilon_s f(\varepsilon_s) \rightarrow \int d\varepsilon \varepsilon D(\varepsilon) f(\varepsilon)$$

• כאשר המצבים של חלקיק בודד מאופיינים גם ע"י וקטור גל \mathbf{k} , אזי כדאי להשתמש בפונקצית צפיפות המצבים במרחב \mathbf{k} : $V/(2\pi)^3$

$$\langle N \rangle = \int d^3k \frac{V}{(2\pi)^3} f(\varepsilon_{\mathbf{k}}) \rightarrow \int 4\pi k^2 dk \frac{V}{(2\pi)^3} f(\varepsilon_{|k|})$$

$$\langle U \rangle = \int d^3k \frac{V}{(2\pi)^3} \varepsilon_{\mathbf{k}} f(\varepsilon_{\mathbf{k}}) \rightarrow \int 4\pi k^2 dk \frac{V}{(2\pi)^3} \varepsilon_{|k|} f(\varepsilon_{|k|})$$

• הרדיוס k_F של כדור פרמי במרחב \mathbf{k} עבור פרמיונים חופשיים בעלי ספין $1/2$:

$$N = 2 \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \frac{4\pi k_F^3}{3} = \frac{V}{3\pi^2} k_F^3 \Rightarrow k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}; \quad \varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$$

חישוב הפוטנציאל התרמודינמי הגרנד-קנוני Φ והלחץ P ,

עבור גז אידיאלי קוונטי של פרמיונים או בוזונים

$$Z_{F,s} = 1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_s)}; \quad Z_{B,s} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta n(\mu - \varepsilon_s)} = \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - \varepsilon_s)}}$$

$$\begin{aligned} \Phi(\tau, V, \mu) &= -\tau \log Z_G(\tau, V, \mu) = -\tau \sum_s \log Z_s = \mp \tau \sum_s \log \left(1 \pm e^{-\beta(\varepsilon_s - \mu)} \right) \\ &= \mp \tau \int d\varepsilon D(\varepsilon) \log \left(1 \pm e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \right) = \mp \tau \int d\varepsilon D(\varepsilon) \log \left(1 \pm \lambda e^{-\beta\varepsilon} \right) \begin{cases} \text{Fermions} \\ \text{Bosons} \end{cases} \end{aligned}$$

$$D(\varepsilon) \propto V \Rightarrow \Phi(\tau, V, \mu) = -P(\tau, \mu)V$$

תוצאה זו היא כללית ביותר, כלומר היא תקפה גם במערכת שאיננה מנוונת, ואפילו בכזו שאיננה כלל גז אידיאלי משום שיש אינטראקציות בין החלקיקים. במקרה הכללי היא נובעת משיקולים של אקסטנסיביות/אינטנסיביות:

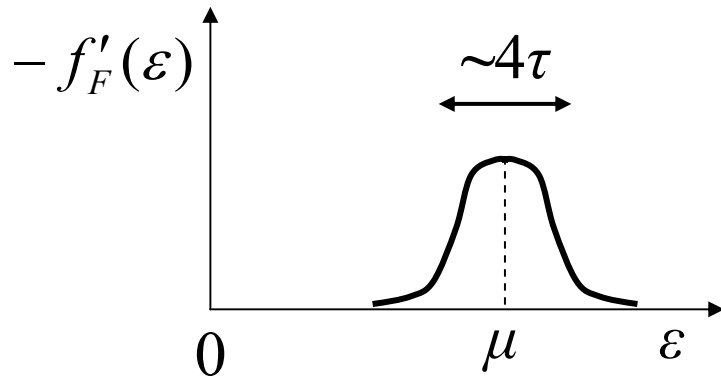
$$\frac{1}{\lambda} \Phi(\tau, \lambda V, \mu) = \Phi(\tau, V, \mu) \Rightarrow \Phi(\tau, V, \mu) = V \Phi(\tau, 1, \mu) = -P(\tau, \mu)V$$

שיטת Sommerfeld לחישוב גדלים של

גז פרמיונים מנוון כאשר $\tau \ll \varepsilon_F$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f_F(\varepsilon) q(\varepsilon) = [f_F(\varepsilon) Q(\varepsilon)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f'_F(\varepsilon) Q(\varepsilon); \quad Q(\varepsilon) \equiv \int_{-\infty}^{\varepsilon} d\varepsilon q(\varepsilon)$$

$$f_F(\infty) = 0; \quad Q(-\infty) = 0; \Rightarrow [f_F(\varepsilon) Q(\varepsilon)]_{-\infty}^{\infty} = 0$$



נניח גם כי $\tau \ll \mu$, ונפתח את $Q(\varepsilon)$ סביב $Q(\mu)$:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f'_F(\varepsilon) Q(\varepsilon) = -\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f'_F(\varepsilon) \left[Q(\mu) + (\varepsilon - \mu)Q'(\mu) + \frac{(\varepsilon - \mu)^2}{2} Q''(\mu) + \dots \right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon (\varepsilon - \mu)^m f'_F(\varepsilon) = -\int_{-\infty}^{\infty} d(\varepsilon - \mu) (\varepsilon - \mu)^m \frac{\beta e^{\beta(\varepsilon - \mu)}}{[e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1]^2} =$$

$$= -\tau^m \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^m e^x}{[e^x + 1]^2} \equiv -\tau^m I_m; \quad I_0 = -\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f'_F(\varepsilon) = 1; \quad I_2 = \frac{\pi^2}{3}$$

$I_m \neq 0$ רק
אם m זוגי !!

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f_F(\varepsilon) q(\varepsilon) = I_0 Q(\mu) + \frac{\tau^2}{2} I_2 Q''(\mu) + \frac{\tau^4}{24} I_4 Q^{(IV)}(\mu) + \dots$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon q(\varepsilon) + \frac{\pi^2 \tau^2}{6} q'(\mu) + \frac{\tau^4}{24} I_4 q'''(\mu) + \dots$$

חישוב ההפרש $\mu - \varepsilon_F$ כפונקציה של τ , $n \equiv N/V$

$$\langle N \rangle_F = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f_F(\varepsilon) D(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon D(\varepsilon) + \frac{\pi^2 \tau^2}{6} D'(\mu) + \dots = \int_{-\infty}^{\varepsilon_F} d\varepsilon D(\varepsilon)$$

$$-\frac{\pi^2 \tau^2}{6} D'(\mu) + \dots = \int_{\varepsilon_F}^{\mu} d\varepsilon D(\varepsilon) \approx (\mu - \varepsilon_F) D(\varepsilon_F)$$

$$\Rightarrow \mu - \varepsilon_F \approx -\frac{\pi^2 \tau^2}{6} \frac{D'(\varepsilon_F)}{D(\varepsilon_F)} = O\left(\frac{\tau^2}{\varepsilon_F}\right) \ll \tau \ll \varepsilon_F$$

חישוב האנרגיה U וקיבול החום C_V

$$\begin{aligned}\langle U \rangle_F &= \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \varepsilon D(\varepsilon) f_F(\varepsilon) \approx \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon \varepsilon D(\varepsilon) + \frac{\pi^2 \tau^2}{6} \frac{d[\mu D(\mu)]}{d\mu} \\ &\approx \int_{-\infty}^{\varepsilon_F} d\varepsilon \varepsilon D(\varepsilon) + (\mu - \varepsilon_F) [\varepsilon_F D(\varepsilon_F)] + \frac{\pi^2 \tau^2}{6} \frac{d[\varepsilon_F D(\varepsilon_F)]}{d\varepsilon_F} \\ &\approx U_0 - \frac{\pi^2 \tau^2}{6} \frac{D'(\varepsilon_F)}{D(\varepsilon_F)} \varepsilon_F D(\varepsilon_F) + \frac{\pi^2 \tau^2}{6} \frac{d[\varepsilon_F D(\varepsilon_F)]}{d\varepsilon_F} = U_0 + \frac{\pi^2 \tau^2}{6} D(\varepsilon_F)\end{aligned}$$

הערה: מאחר ש- $D(\varepsilon_F) \sim N/\varepsilon_F$, לכן תוספת האנרגיה פר חלקיק קטנה בהרבה מ- τ . מן התוספת אפשר לחשב את קיבול החום:

$$\frac{C_V}{k_B} = \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} \right)_{V,N} = \frac{\pi^2 \tau}{3} D(\varepsilon_F) \left[1 + O\left(\frac{\tau^2}{\varepsilon_F^2} \right) \right] \quad \left(\cong \frac{\pi^2}{2} N \frac{\tau}{\varepsilon_F} \right)$$

אבל, להוציא את התוצאה האחרונה שבסוגריים, זה נכון בכל מערכת של פרמיונים מנוונים עם צפיפות של מצבים

חד-חלקיקיים, שצריך לדעת אותה רק באנרגיה ε_F !!

סיכום השיעור הקודם והשלמות

- ראינו שימושים אחדים של צפיפות המצבים החד-חלקיקיים לחישוב של תכונות מאקרוסקופיות נפחיות של מערכת גדולה של חלקיקים זהים ללא אינטראקציות, פרמיונים או בוזונים.

- פיתחנו את שיטת Sommerfeld לחישוב גדלים של גז פרמיונים מנוון כאשר $\tau \ll \varepsilon_F$.

- חישבנו את $\mu(\tau, V, N)$ עבור גז פרמיונים מנוון כאשר $\tau \ll \varepsilon_F$.

- חישבנו את C_V עבור גז פרמיונים מנוון כאשר $\tau \ll \varepsilon_F$.

- את צפיפות המצבים ליחידת אנרגיה באנרגית פרמי של אלקטרוני ההולכה במתכת אפשר למדוד ע"י ביצוע מדידה של C_V בטמפרטורה נמוכה מספיק כך שקיבול החום הנובע מתנודות הסריג היוני ניתן להזנחה:

$$\frac{C_V}{k_B} = \frac{\pi^2 k_B T}{3} D(\varepsilon_F) + \frac{12\pi^4 N k_B}{5} \left(\frac{T}{\theta}\right)^3$$

- להלן נדון בשאלה מתי אפשר להזניח את האינטראקציות הקולומביות בין האלקטרונים שמהווים גז פרמיוני מנוון.

מתי אפשר להזניח את האינטראקציות בין האלקטרונים?

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$$

צריך להשוות אנרגיה קינטית ואנרגיה פוטנציאלית. האנרגיה הקינטית של אלקטרון אחד היא מסדר גודל של ε_F :

האנרגיה הפוטנציאלית של אלקטרון אחד כתוצאה מכוחות הדחייה של האלקטרונים השכנים היא מסדר גודל של: $e^2 n^{1/3}$ כאשר $v \equiv 1/n$ הוא הנפח שנתפס, בממוצע, ע"י חלקיק אחד.

לכן האנרגיה הקינטית גדולה מהאנרגיה הפוטנציאלית של האינטראקציות כאשר מתקיים ($a_0 \approx 0.5 \text{ \AA}$ הוא הרדיוס של Bohr):

$$\frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3} > e^2 n^{1/3} \Rightarrow v^{1/3} < \frac{a_0}{2} (3\pi^2)^{2/3} \cong 2.5 \text{ \AA}; \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$$

$$v^{1/3} < 2.5 \text{ \AA} \times \frac{m}{m_{\text{eff}}} \times \varepsilon_I$$

אבל צריך לקחת בחשבון גם את הקבוע הדיאלקטרי של הסריג היוני ε_I ואת המסה האפקטיבית m_{eff} של האלקטרון שנע בסריג הגבישי, ואז:

- **שימו לב:** ככל שעולה צפיפות האלקטרונים בגז פרמיוני מנוון, כן תהיה אנרגית האינטראקציות פחות חשובה לעומת האנרגיה הקינטית!!

- במתכות רגילות, הזנחת האינטראקציות היא קירוב ראשון סביר. אילו צפיפות האלקטרונים הייתה גבוהה יותר, הקירוב היה עוד יותר טוב.

- המצב בגז של אטומים נייטרליים הוא שונה. אז האנרגיה

הפוטנציאלית פר אטום היא כדלקמן $V(\mathbf{r})$ היא אנרגיה

פוטנציאלית קצרת טווח שמתארת את האינטראקציה בין שני

אטומים]:

$$2 \times \frac{U_p}{N} = \int d^3 r n(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \cong \langle n \rangle \int d^3 r V(\mathbf{r}) \propto n$$

- מסיבה זו, גז של אטומים נייטרליים, ככל שצפיפותו

נמוכה יותר, כן הוא מתאים יותר לתואר "גז אידיאלי". זה

נכון לגז אידיאלי קלאסי, וגם לגזים קוונטיים מנוונים משני

הסוגים.

מדוע אינטראקציות קולומביות מולידות אנרגיה פוטנציאלית טוטאלית שעולה יותר לאט, עם עליית הצפיפות, מאשר אינטראקציות קצרות טווח?

- אינטראקציות קצרות טווח מתרחשות בגז, (כלומר, כאשר המרחק הממוצע בין חלקיקים שכנים גדול בהרבה מטווח האינטראקציה) רק כאשר החלקיקים מתקרבים מאוד זה לזה, במקרה. זה קורה לחלקיק מסוים כלשהו בהסתברות שמתכונתית לצפיפות החלקיקים הממוצעת n .
- אינטראקציות קולומביות בין חלקיקים טעונים לא קשורים מתרחשות כל הזמן, אולם הן ממוסכות מעבר לשכנים הקרובים ביותר לחלקיק מסוים כלשהו, כאשר המערכת בכללותה איננה טעונה. לכן אפשר להעריך את תרומתן של האינטראקציות הללו, לאנרגיה הפוטנציאלית הממוצעת פר חלקיק, ע"י הביטוי הבא:

$$\frac{e^2}{r_{\text{nearest neighbor}}} \sim \frac{e^2}{V^{1/3}} \propto n^{1/3}$$

מדוע האנרגיה הפוטנציאלית E_{ee} של אינטראקציה בין האלקטרונים במתכת איננה יכולה להיות קטנה בהרבה מהאנרגיה הקינטית שלהם?

- מצב היסוד של האלקטרונים החופשיים במתכת מתקבל ע"י מינימיזציה של האנרגיה הטוטאלית:

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{ep} + E_{pp} + E_{ee}$$

- כל ארבע התרומות הן בעלות גודל דומה; רק E_{ep} היא שלילית.
- כדי שהאינטראקציות הקולומביות הדוחות בין אלקטרונים תהיינה הרבה פחות חשובות מהאנרגיה הקינטית, נחוץ כוח מושך אחר, חזק יותר מהכוח הקולומבי שנובע מ- E_{ep} , שיפעל נגד הלחץ של גז האלקטרונים שנובע מהאנרגיה הקינטית שלהם.

כוכב ננס לבן (white dwarf) בעל רדיוס R_D

ומסה M_D

- בליבה של כוכב כזה נמצא גז אלקטרוניים שהוא הכי קרוב לגז אידיאלי פרמיוני מנוון:

$$M_D \sim M_{\text{sun}}; \quad R_D \sim 0.01 \times R_{\text{sun}} \Rightarrow \rho_D \sim 10^6 \rho_{\text{sun}}$$

$$M_{\text{sun}} \cong 2.0 \times 10^{33} \text{ gr}; \quad R_{\text{sun}} \cong 7.0 \times 10^{10} \text{ cm} \Rightarrow \rho_{\text{sun}} \cong 0.8 \text{ gr/cm}^3$$

מסקנה: צפיפות האטומים בליבת השמש גדולה בערך פי 10 מצפיפות האטומים במתכת רגילה על פני כדור הארץ.

$$\Rightarrow n_D \sim 10^5 - 10^8 \times n_{\text{metal}}; \quad \varepsilon_{F,D} \sim 10^3 - 10^5 \times \varepsilon_{F,\text{metal}}$$

$$T_D \approx T_{\text{sun}} \approx 10^7 \text{ K}; \quad \varepsilon_{F,D} \sim 10^5 \text{ eV} = 0.1 \text{ MeV} \Rightarrow T_{F,D} \sim 10^9 \text{ K} \gg T_D$$

- לכן האלקטרוניים בליבה של כוכב ננס לבן הם גז פרמיוני מנוון, למרות הטמפרטורה הגבוהה!

- בשל הצפיפות הגבוהה, אנרגיית האינטראקציות הקולומביות ניתנת להזנחה!

- **אבל:** תיקונים רלטיביסטיים?

סיכום השיעור הקודם והשלמות

- בגז פרמיוני מנוון של חלקיקים זהים בעלי מטען חשמלי, כדי שאפשר להזניח את האינטראקציות נחוץ שצפיפות החלקיקים תהיה גבוהה ככל האפשר.

- במתכות רגילות, הזנחת האינטראקציות הללו עבור הגז של אלקטרוני ההולכה היא קירוב לא רע, אך יש תיקונים חשובים כתוצאה מהאינטראקציות.

- מדוע מופיע בבעיה זו הרדיוס של בוהר? כי, עד כדי גורם מספרי, זהו האורך היחידי שאפשר ליצור משלושת הפרמטרים הפיסיקליים שמאפיינים את הבעיה:

$$[\hbar] = \frac{m\ell^2}{t}; \quad [e^2] = \frac{m\ell^3}{t^2}; \quad [m] = m$$

$$\left(\frac{m\ell^2}{t}\right)^\alpha \left(\frac{m\ell^3}{t^2}\right)^\beta (m)^\gamma = \ell \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ell \propto \frac{\hbar^2}{me^2} \equiv a_0 \quad \text{זהו הרדיוס של בוהר}$$

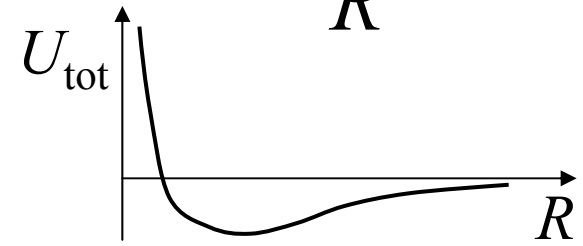
- בכוכב מסוג ננס לבן הזנחת האינטראקציות עבור האלקטרונים החפשיים שנמצאים בליבת הכוכב היא קירוב מצויין.

- נמשיך וננסה למצוא את הרדיוס של כוכב כזה במצב של שיווי משקל.

מצב שיווי משקל של כוכב ננס לבן

נחשב את האנרגיה הטוטאלית של הכוכב כסכום של האנרגיה הקינטית U_k של גז אלקטרונים אידיאלי מנוון והאנרגיה הפוטנציאלית הגרביטציונית U_p , ונחפש מינימום כפונקציה של רדיוס הכוכב R . תחילה נעשה חישוב לא רלטיביסטי:

$$U_k \sim N \varepsilon_F \propto N \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3} \propto \frac{M^{5/3}}{R^2}; \quad U_p \propto -\frac{M^2}{R}$$

$$U_{\text{tot}} = U_k + U_p \sim \frac{M^{5/3}}{R^2} - \frac{M^2}{R}$$


שאלה: מדוע איננו מחפשים מינימום של אנרגיית הלמהולץ או מכסימום של האנטרופיה?

$$0 = -\frac{dU_{\text{tot}}}{dR} \sim \frac{M^{5/3}}{R^3} - \frac{M^2}{R^2} \Rightarrow R|_{U_{\text{tot}}=\text{min}} \propto M^{-1/3}$$

שימו לב: ככל שמסת הכוכב גדלה, כן הרדיוס שלו קטן!!

חישוב האנרגיה הקינטית של גז פרמיוני מנוון בגבול

האולטרה-רלטיביסטי $\varepsilon_F \gg mc^2 \approx 0.5 \text{ MeV}$

$$N = 2 \cdot \int_{|\mathbf{k}| \leq k_F} d^3k \frac{V}{(2\pi)^3} = 2 \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \frac{4\pi}{3} k_F^3 \Rightarrow k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$$

• הערה: התוצאה עבור k_F תקפה עבור כל סוג של פרמיונים חופשיים בעלי ספין $1/2$ בשלושה ממדים, רלטיביסטיים או לא-רלטיביסטיים. היא תקפה אפילו עבור פרמיונים שנעים בפוטנציאל מחזורי!

• עבור אלקטרונים אולטרה-רלטיביסטיים, מקבלים:

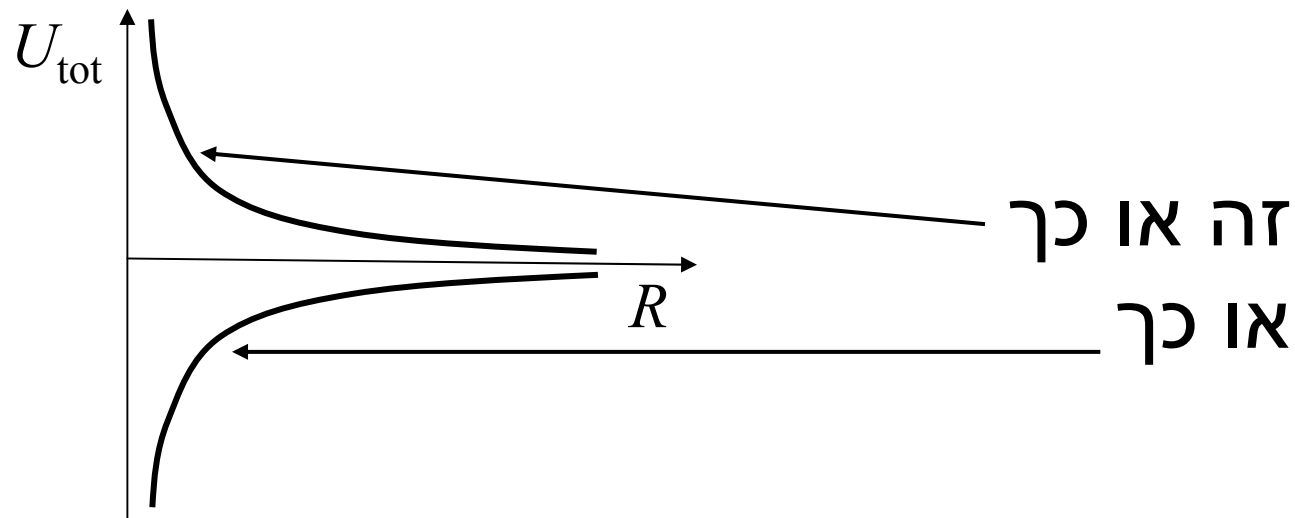
$$\varepsilon_F \cong p_F c = \hbar k_F c = \hbar c (3\pi^2 n)^{1/3} \propto n^{1/3}$$

$$\Rightarrow U_k \sim N \varepsilon_F \propto N^{4/3} V^{-1/3}$$

מצב שיווי משקל של כוכב ננס לבן: חישוב אולטרה-רלטיביסטי

$$U_k \sim N \varepsilon_F \propto N \left(\frac{N}{V} \right)^{1/3} \propto \frac{M^{4/3}}{R}; \quad U_{\text{tot}} \sim \frac{M^{4/3}}{R} - \frac{M^2}{R}$$

לזה אין מינימום כפונקציה של R !!



קריסה של הכוכב

- כאשר $M > M_{\text{Ch}} \approx 1.45 M_{\text{sun}}$, אזי הכוכב איננו יכול להגיע למצב שיווי משקל כננס לבן. במקום זה הוא מתכווץ באופן קטסטרופלי, כלומר שהוא קורס. כאשר מתרחש תהליך כזה אזי זוהי **סופרנובה**.
- תהליך הקריסה נעצר כאשר צפיפות החומר בליבת הכוכב מתקרבת לצפיפות של חומר בתוך גרעין של אטום. בסוף התהליך הזה נוצר **כוכב ניוטרונים** או **חור שחור**.

סיכום התכונות של גז פרמיוני מנוון

- כאשר $\tau < \varepsilon_F$ הגז מנוון.
- בשל ההקפאה הקוונטית של רוב המצבים החד-חלקיקיים, קיבול החום קטן מאוד; הפוטנציאל הכימי כמעט שאיננו זז מאנרגיית פרמי.
- רוב התכונות המאקרוסקופיות תלויות רק ב- $D(\varepsilon_F)$.
- שיטת Sommerfeld מאפשרת פיתוח סיסטמטי של גדלים מאקרוסקופיים בחזקות זוגיות של τ/ε_F .
- בגז פרמיוני מנוון של חלקיקים טעונים אפשר להזניח את האינטראקציות הקולומביות **רק אם הצפיפות מספיק גבוהה.**
- בליבה של כוכב מסוג ננס לבן מוצאים את הדוגמה הכי קרובה אל גז פרמיוני אידיאלי מנוון.