

סיכום השיעור הקודם והשלמות

- אנרגיית הלמהולץ (Helmholtz free energy):

$$F \equiv U - TS \equiv U - \tau\sigma$$

- תכונת המינימום של F ; ה"משתנים הטבעיים" של

$F_{\text{eq}}(\tau, V, N)$; הפונקציה $F_{\text{eq}}(\tau, V, N)$ מתקבלת

מהפונקציה $U_{\text{eq}}(\sigma, V, N)$ ע"י טרנספורמציה לג'נדר;

שתי הפונקציות הללו מכילות את **מלוא**

האינפורמציה על התכונות התרמודינמיות של

המערכת.

- אנטרופיה של עירבוב; אנטרופיה כמודד של אי-סדר.

$$F = U - \tau\sigma = U + \tau \left(\frac{\partial F}{\partial \tau} \right)_V = U - \beta \left(\frac{\partial F}{\partial \beta} \right)_V$$

הקשר בין

F ובין Z

$$\Rightarrow U = F + \beta \left(\frac{\partial F}{\partial \beta} \right)_V = \left(\frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta} \right)_V$$

$$U = - \left(\frac{\partial \log Z}{\partial \beta} \right)_V \Rightarrow \beta F = -\log Z + A(V)$$

$$\Rightarrow \frac{F}{\tau} \equiv \frac{U}{\tau} - \log g = -\log Z + A(V)$$

$$\tau \rightarrow 0: Z = \sum_s e^{-\beta \varepsilon_s} \rightarrow \sum_{s, \varepsilon_s=0} 1 = g_0; \quad \frac{U}{\tau} = \frac{1}{Z} \sum_s \beta \varepsilon_s e^{-\beta \varepsilon_s} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow F = -\tau \log Z = -k_B T \log Z$$

זהו הקשר בין מכניקה סטטיסטית ותרמודינמיקה!

גז אידיאלי קלאסי חד-אטומי

המצבים הקוונטיים של חלקיק אחד שנע בתוך חלל בצורת קובייה:

$$\psi(x, y, z) = A \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right); \quad \mathbf{n} \equiv (n_x, n_y, n_z) = 1, 2, 3, \dots; \quad \mathbf{p}_n = \hbar \mathbf{k}_n = \hbar \frac{\pi \mathbf{n}}{L}$$

$$0 \leq x, y, z \leq L$$

$$\varepsilon_n = \frac{\mathbf{p}_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2); \quad Z_1 = \sum_{n_x > 0} \sum_{n_y > 0} \sum_{n_z > 0} \exp[-\alpha^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)]; \quad \alpha^2 \equiv \beta \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$$

$$Z_1 = \left(\int_0^\infty dn e^{-\alpha^2 n^2} \right)^3 = \left(\frac{\pi^{1/2}}{2\alpha} \right)^3 = \frac{L^3}{(2\pi\hbar^2 / mk_B T)^{3/2}} = \frac{V}{\lambda_T^3} = V n_Q; \quad n_Q = \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \equiv \frac{1}{\lambda_T^3}$$

אורך גל תרמי: $\lambda_T(T)$; הצפיפות הקוונטית: $n_Q(T)$

$$\lambda_T = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right)^{1/2} \propto \frac{h}{p_T}; \quad \log Z_1 = -\frac{3}{2} \log \beta + [\text{אברים שאינם תלויים ב-}\beta]$$

$$\Rightarrow \langle U_1 \rangle = -\frac{d \log Z_1}{d\beta} = \frac{3}{2\beta} = \frac{3}{2} k_B T = \left\langle \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \right\rangle = \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right\rangle$$

$$p_T \equiv p_{RMS} \equiv \langle \mathbf{p}^2 \rangle^{1/2} = (3mk_B T)^{1/2}$$

סיכום השיעור הקודם

- הקשר בין Z ו- F .
- גז אידיאלי קלאסי – טיפול קוונטי.
- חלקיק בודד חופשי שנע בקופסה ונמצא במגע תרמי עם אמבט חום: המצבים הקוונטיים, הסכום על המצבים (=פונקצית החלוקה), האנרגיה הממוצעת, אורך גל תרמי, הצפיפות הקוונטית.
- מערכת של N חלקיקים כאלה: הבעייתיות של ספירת המצבים המיקרוסקופיים הרב-חלקיקיים.
- התיקון המקורב של גיבס (Josiah Willard Gibbs).

חישוב של Z_N בקירוב של גיבס

$$Z_N = \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} \exp[-\beta(\varepsilon_{s_1} + \varepsilon_{s_2} + \dots + \varepsilon_{s_N})] = (Z_1)^N \quad ??? \text{ NO !!!}$$

זהו התיקון המקורב

$$Z_N \approx \frac{1}{N!} (Z_1)^N \Rightarrow F(T, V, N) = -Nk_B T \log Z_1 + k_B T \log N! \quad \text{של גיבס:}$$

$$= -Nk_B T \log \left(\frac{V}{\lambda_T^3} \right) + k_B T [N \log N - N + O(\log N)] \approx Nk_B T \log \left(\frac{N/V}{n_Q(T)} \right) - Nk_B T$$

$$U = -N \frac{d \log Z_1}{d\beta} = N \langle U_1 \rangle = \frac{3}{2} Nk_B T; \quad C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V, N} = \frac{3}{2} Nk_B$$

$$dF = -SdT - PdV \Rightarrow P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = \frac{Nk_B T}{V} \equiv \frac{n_M RT}{V}$$

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = Nk_B \left[\log \left(\frac{n_Q(T)}{N/V} \right) + \frac{5}{2} \right] \quad \text{נוסחת Sackur-Tetrode}$$

• הביטויים עבור S, F תלויים ב- \hbar וגם ב- $N!$. לא כן הביטויים עבור P, C_V, U

• אלמלא הגורם $1/N!$, אנרגיית הלמהולץ F וגם האנטרופיה S היו יוצאות על-אקסטנסיביות!

מתי נכשל הקירוב של גיבס?

זה חייב להתקיים!

$$S \equiv k_B \log g = Nk_B \left[\log \left(\frac{n_Q(T)}{N/V} \right) + \frac{5}{2} \right] > 0$$

$$n_Q(T) = \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \equiv \frac{1}{\lambda_T^3}$$

$$\frac{N}{V} \gg n_Q(T) \Rightarrow S < 0 \quad !!!$$

אבל, כאשר צפיפות האטומים גבוהה מדי, אזי קיים:

$$\frac{N}{V} \ll n_Q(T)$$

בהמשך נראה כי הקירוב (של גיבס) הוא קירוב טוב כאשר מתקיים:

למרות החישוב הקוונטי, זהו **גז אידיאלי קלאסי**

חוק החלוקה השווה (equipartition law)

חישוב קלאסי של פונקציית החלוקה של חלקיק בודד בקופסה בעלת נפח V :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \int dV \int d^3 p \exp\left(-\beta \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right) = V \left[\int_{-\infty}^{\infty} dp \exp\left(-\beta \frac{p^2}{2m}\right) \right]^3 \\ &= V \left[\left(\frac{2m\pi}{\beta} \right)^{1/2} \right]^3 = V (2\pi m k_B T)^{3/2}; \quad n_Q(T) = \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \end{aligned}$$

תוצאה זו שונה מהתוצאה של החישוב הקוונטי בכך שחסר בה הגורם $1/h^3$. זה איננו מפריע לחישוב האנרגיה הממוצעת או הלחץ הממוצע של חלקיק בודד:

$$\langle U_1 \rangle = -\frac{d \log Z_1}{d\beta} = \frac{3}{2\beta} = \frac{3}{2} k_B T; \quad \langle P_1 \rangle = -\left(\frac{\partial F_1}{\partial V} \right)_\tau = \left(\frac{\partial \tau \log Z_1}{\partial V} \right)_\tau = \frac{\tau}{V}$$

- זה גם מוליך לתוצאה מאד כללית לגבי מערכות קלאסיות הנמצאות במגע תרמי עם אמבט חום: כל דרגת חופש ריבועית **בהמילטוניאן קלאסי** תורמת $k_B T/2$ לאנרגיה התרמית הממוצעת. לדוגמה:

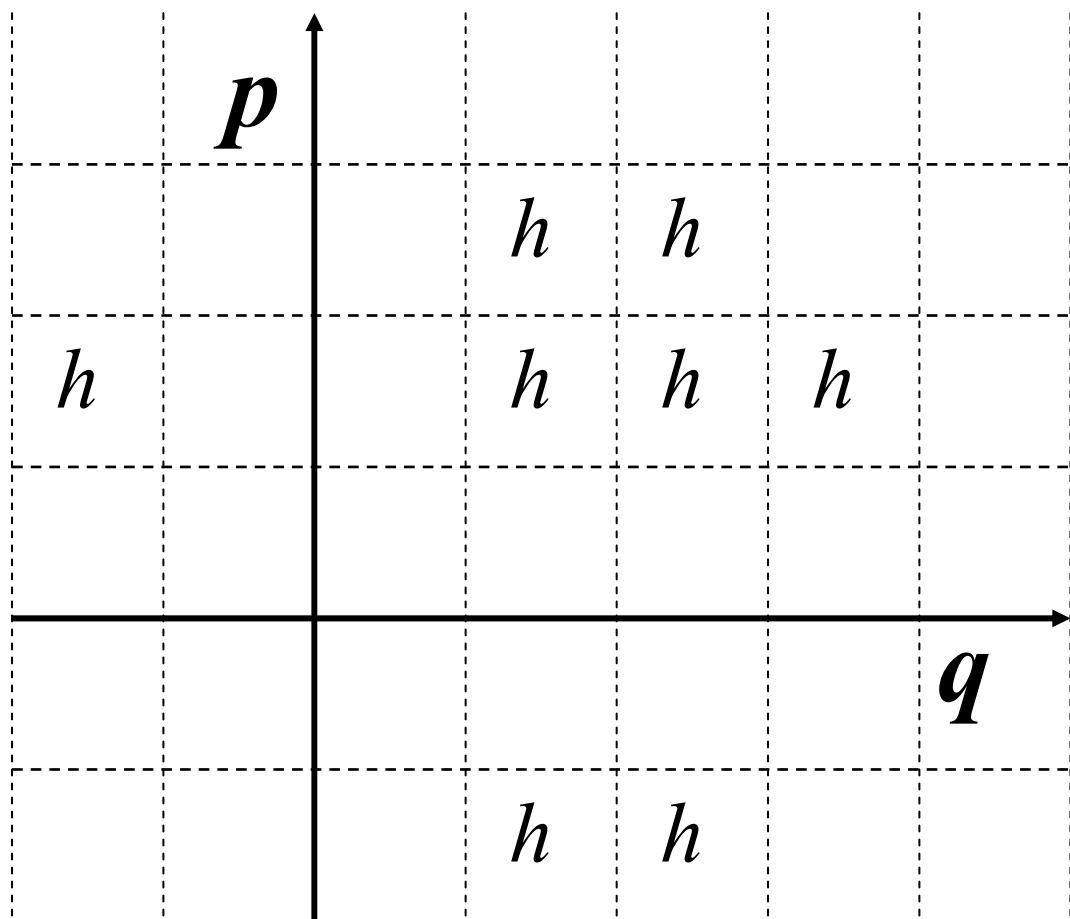
$$Z_x \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\beta A x^2} = \left(\frac{\pi}{\beta A} \right)^{1/2} \Rightarrow -\frac{d \log Z_x}{d\beta} = \frac{1}{2\beta} = \frac{\tau}{2}$$

- לכן, האנרגיה התרמית הממוצעת של אוסילטור הרמוני פשוט (חד-ממדי), שמאופיין ע"י ההמילטוניאן $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ היא: $k_B T$. זה מתאים למה שמצאנו, מקודם, עבור אוסילטור הרמוני בגבול הקלאסי.

- מוצק שיש בו N אטומים, אפשר לבטא את תנודותיו הקטנות כאוסף של $3N$ אוסילטורים הרמוניים. מכאן נובע

$$U = 3Nk_B T \Rightarrow C_V = 3Nk_B \quad \text{חוק } \text{Dulong-Petit}$$

הבנה "סמי-קלאסית" של הגורם $1/h^3$ שחסר בסיכום הקלאסי על מצבי המערכת



מרחב פזות
"סמי-קלאסי":

אינטגרל מהצורה:

$$\int \frac{d^3 r d^3 p}{h^3} \dots$$

ייתן את התוצאה
הקוונטית הנכונה!

המשך התוכנית

- ננצל את הטיפול הקוונטי המלא שראינו לאוסילטור הרמוני בכדי לדון בכמה בעיות פיסיקליות אמיתיות: קרינת גוף שחור; תנודות סריג של חומר מוצק.

קרינה תרמית; נוסחת Planck

כל אחד מאופני התנודה (גל עומד) של מהוד אלקטרומגנטי הוא אוסילטור הרמוני בעל איזו תדירות זוויתית ω_n . כאשר האוסילטור מעוקר לרמת אנרגיה $s\hbar\omega_n$, אז אנו אומרים כי יש בו s מנות (קוונטים quantum/quanta) של אנרגיה או s פוטונים בעלי אנרגיה $\hbar\omega_n$ כל אחד. נשתמש בתוצאה קודמת שמצאנו עבור אוסילטור אחד בכדי לחשב את האנרגיה הטוטאלית של כל אופני התנודה הנורמאליים:

$$U = \sum_n \langle \varepsilon_n \rangle = \sum_n \frac{\hbar\omega_n}{e^{\beta\hbar\omega_n} - 1}$$

להשלמת החישוב יש למצוא את אופני התנודה הנורמאליים. אנו נניח מהוד בצורת קוביה $L \times L \times L$ עם דפנות עשויות ממוליך חשמלי מושלם.

$$E_x = E_{0x} \sin(\omega t) \cos\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right)$$

$$E_y = E_{0y} \sin(\omega t) \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right)$$

$$E_z = E_{0z} \sin(\omega t) \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \cos\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right)$$

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) = 1, 2, 3 \dots; \quad 0 \leq x, y, z \leq L$$

$$0 = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = \left[-\frac{\pi^2}{L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \mathbf{E}$$

$$\Rightarrow \omega_{\mathbf{n}} = c |\mathbf{k}_{\mathbf{n}}| = c \frac{\pi}{L} |\mathbf{n}| = \frac{\pi c}{L} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2} \equiv \frac{\pi c}{L} n$$

סיכום השיעור הקודם והשלמות

- טיפול קוונטי בגז אידיאלי קלאסי.
- הקירוב של גיבס לתיקון הספירה המרובה של מצבים מיקרוסקופיים רב-חלקיקיים בגז אידיאלי של אטומים זהים. זהו קירוב טוב כל עוד קיים $V/N \ll \lambda_T^3 \leftarrow$ המרחק הממוצע בין חלקיקים סמוכים \ll אורך גל דה-ברולי.
- **המוטיבציה של גיבס הייתה אקסטנסיביות של F ושל S .**
- חישוב של F ושל S בגז אידיאלי של אטומים זהים. לשם כך נחוצה מכניקה קוונטית כי מופיע הקבוע של Planck.
- טיפול קלאסי בגז אידיאלי קלאסי.
- חוק החלוקה השווה (equipartition law) בפיסיקה סטטיסטית **בגבול הקלאסי.**
- תיקון סמי-קלאסי כדי לקבל פונקצית חלוקה נכונה למרות האינטגרציה על מרחב פאזות קלאסי: **כל מצב קוונטי תופס שטח h במישור הפאזות החד-ממדי (q,p) .**
- אנרגיה וקיבול חום של מוצק **בגבול הקלאסי**: חוק Dulong-Petit.
- "קרינה תרמית" או "קרינת גוף שחור": זו קרינה אלקטרומגנטית (א"מ) שנמצאת בשיווי משקל תרמי עם אמבט חום.
- חישוב אופני התנודה הנורמאליים של מהוד א"מ בצורת קובייה.

$$\omega_{\mathbf{n}} = c|\mathbf{k}_{\mathbf{n}}| = c \frac{\pi}{L} |\mathbf{n}| = \frac{\pi c}{L} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2} \equiv \frac{\pi c}{L} n$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \Rightarrow 0 = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} = E_{0x} n_x + E_{0y} n_y + E_{0z} n_z$$

מזה גם נובע הצורך בפונקציות \cos אחת ליד כל זוג של פונקציות \sin .

$$2 \sum_{n_x > 0} \sum_{n_y > 0} \sum_{n_z > 0} = \frac{2}{8} \sum_{\text{all } n_x} \sum_{\text{all } n_y} \sum_{\text{all } n_z} \rightarrow \frac{1}{4} \int d^3 n = \frac{1}{4} \int_0^\infty 4\pi n^2 dn$$

$$U = \pi \int_0^\infty dn n^2 \frac{\hbar \omega_n}{e^{\beta \hbar \omega_n} - 1} = \frac{\pi^2 \hbar c}{L} \int_0^\infty \frac{n^3 dn}{e^{\beta \hbar \pi c n / L} - 1} = \frac{\pi^2 \hbar c}{L} \left(\frac{L}{\beta \hbar \pi c} \right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \Rightarrow U = \frac{\pi^2 \tau^4 L^3}{15 \hbar^3 c^3}$$

שימו לב: כאן מדובר על "קווי רצף" של אופני תנודה נורמליים!

$$\frac{U}{V} = \frac{\pi^2}{15 \hbar^3 c^3} \tau^4$$

זהו חוק Stefan-Boltzmann:

מציאת ה"פונקציה הבסיסית"

האנטרופיה של קרינה תרמית:

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}\right)_V = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial U}\right)_V \left(\frac{\partial U}{\partial \tau}\right)_V = \frac{1}{\tau} \times \frac{4 \pi^2 V}{15 \hbar^3 c^3} \tau^3 = \frac{4 \pi^2 V}{15 \hbar^3 c^3} \tau^2$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{4 \pi^2 V}{45 \hbar^3 c^3} \tau^3 + A(V) \quad \frac{U}{V} = \frac{\pi^2}{15 \hbar^3 c^3} \tau^4$$

כאשר $\tau = 0$, אזי המהוד נמצא במצב היסוד שלו,
הלא הוא הוואקום, ואז $g = g_0 = 1 \Leftarrow \sigma = 0$. לכן:

$$A(V) = 0 \Rightarrow F(\tau, V) = U(\tau, V) - \tau \sigma(\tau, V) = -\frac{\tau^4 \pi^2 V}{45 \hbar^3 c^3}$$

סיכום השיעור הקודם והשלמות

- אופני תנודה נורמאליים של השדה האלקטרומגנטי במהוד + טיפול קוונטי בכל אופן תנודה או דרגת חופש \leftarrow אנרגיה טוטאלית $U(\tau, V)$ (חוק Stefan-Boltzmann).
- רמת העירור של אופן תנודה \leftarrow מספר הפוטונים באותו אופן תנודה.
- חישבנו את האנרגיה, האנטרופיה, ואנרגיית הלמהולץ של גז פוטונים כפונקציות של τ, V : מכל אלה, רק $F(\tau, V)$ היא פונקציה תרמודינמית בסיסית של המערכת.

ספקטרום הקרינה u_ω : חוק הקרינה של Planck

$$\frac{U}{V} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \equiv \int_0^\infty d\omega u_\omega \Rightarrow u_\omega = \frac{\hbar\omega^3 / \pi^2 c^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

נוסחת Rayleigh-Jeans

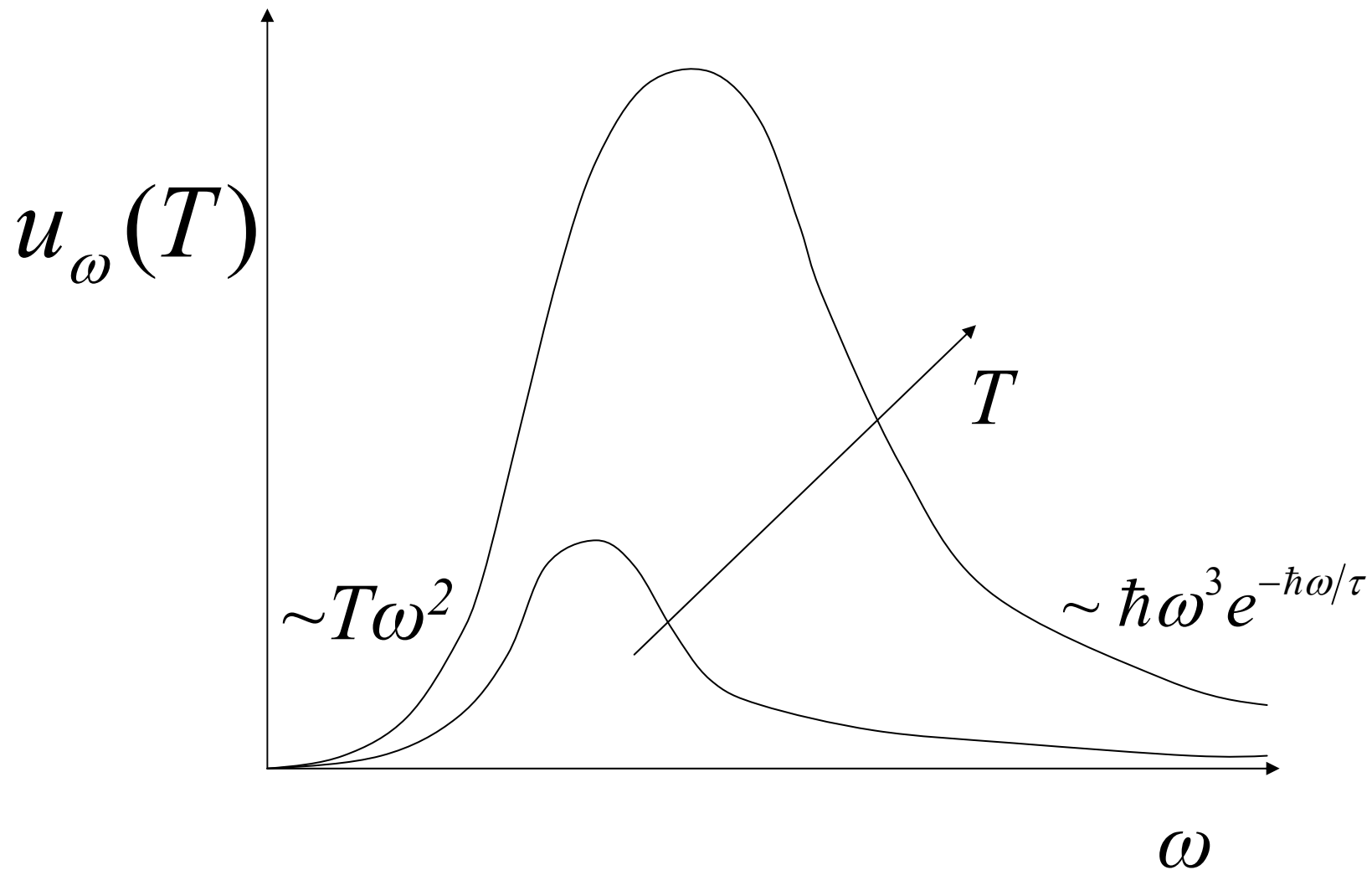
$$\hbar\omega \ll \tau \Rightarrow u_\omega = \frac{\hbar\omega^3 / \pi^2 c^3}{e^{\hbar\omega/\tau} - 1} \rightarrow \frac{\omega^2 \tau}{\pi^2 c^3} \quad \text{זה איננו תלוי ב-}\hbar$$

בגבול הקלאסי ($\hbar \rightarrow 0$) תוצאה זו מתקבלת לכל ω !

תורת הקוונטים התחילה כתוצאה מההכרה שתוצאה כזו לא תיתכן!

$$\hbar\omega \gg \tau \Rightarrow u_\omega \approx \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\hbar\omega/\tau}$$

u_ω ספקטרום הקרינה של Planck



חוק ויין

$$u_\omega = \frac{\hbar\omega^3 / \pi^2 c^3}{e^{\hbar\omega/\tau} - 1} = \frac{(\hbar\omega/\tau)^3}{e^{\hbar\omega/\tau} - 1} \frac{\tau^3}{\hbar^2 \pi^2 c^3} = \tau^3 f\left(\frac{\hbar\omega}{\tau}\right) \frac{1}{\hbar^2 \pi^2 c^3}; \quad f(x) \equiv \frac{x^3}{e^x - 1}$$

השיא של $f(x)$ מתקבל כאשר $x_{\max} \approx 2.82$, לכן $\omega_{\max} \sim \tau$.

פוטונים

- בהמשך הבינו, בעקבות איינשטיין, כי כאשר אופן תנודה של מהוד, בעל תדירות אפיינית ω , מעוקר לדרגת עירור s , אזי יש בו s פוטונים בעלי אנרגיה $\hbar\omega$ כל אחד.

סיכום השיעור הקודם והשלמות

- אופני תנודה נורמאליים של השדה האלקטרומגנטי במהוד + טיפול קוונטי בכל אופן תנודה או דרגת חופש \leftarrow אנרגיה טוטאלית $U(\tau, V)$ (חוק Stefan-Boltzmann).
- רמת העירור של אופן תנודה \leftarrow מספר הפוטונים באותו אופן תנודה.
- חישבנו את האנרגיה, האנטרופיה, ואנרגיית הלמהולץ של גז פוטונים כפונקציות של τ, V : מכל אלה, רק $F(\tau, V)$ היא פונקציה תרמודינמית בסיסית של המערכת.
- נוסחת Planck עבור ספקטרום הקרינה של גוף שחור.
- דעיכת הספקטרום כאשר $\hbar\omega \gg \tau$ היא תוצאה של הקפאה קוונטית של אותן דרגות החופש (אוסילטורים הרמוניים).
- **שאלה: מהו שטף הקרינה שיוצאת מחור קטן במהוד א"מ?**
- חוק Wien.
- התחלנו טיפול קוונטי בתנודות הקטנות של סריג אטומי מוצק.

קיבול החום של מוצקים; קירוב Debye

$$U = \sum_n \frac{\hbar\omega_n}{e^{\beta\hbar\omega_n} - 1}$$

אופני התנודה הנורמאליים, בתדירויות נמוכות, הם גלי קול (v מהירות הקול):

$$\omega_{\mathbf{n}} = \frac{\pi v |\mathbf{n}|}{L} \equiv \frac{\pi v n}{L}; \quad \mathbf{n} \equiv (n_x, n_y, n_z); \quad n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots$$

$$3N = \sum_{|\mathbf{n}|=0}^{|\mathbf{n}|_{\max}} 1 \rightarrow \frac{3}{8} \int_0^{n_{\max}} 4\pi n^2 dn = \frac{3}{8} \frac{4\pi}{3} n_{\max}^3$$

אבל, יש ערך מירבי n_{\max} של n !
יש 3 קיטובים שונים!

$$\Rightarrow n_{\max} = (6N / \pi)^{1/3}$$

$$U = \frac{3}{8} 4\pi \int_0^{n_{\max}} n^2 dn \frac{\pi \hbar v n / L}{e^{\beta \pi \hbar v n / L} - 1} = \frac{1}{\beta^4} \frac{3\pi}{2} \left(\frac{L}{\pi \hbar v} \right)^3 \int_0^{x_D} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

$$x_D \equiv \frac{\beta \pi \hbar v n_{\max}}{L} = \frac{\theta}{T} = \frac{\hbar \omega_{\max}}{\tau}; \quad \theta \equiv \frac{\hbar v}{k_B} \left(\frac{6\pi^2 N}{V} \right)^{1/3}; \quad \omega_{\max} = \frac{\pi v n_{\max}}{L}$$

θ נקראת **טמפרטורת Debye**. ברוב החומרים θ היא מסדר גודל של 100 K.

ω_{\max} היא "תדירות מירבית" של אופני התנודה הנורמאליים.

$$U = \sum_n \frac{\hbar\omega_n}{e^{\beta\hbar\omega_n} - 1} \rightarrow \frac{3}{8} 4\pi \int_0^{n_{\max}} n^2 dn \frac{\pi\hbar v n/L}{e^{\beta\pi\hbar v n/L} - 1} = \frac{1}{\beta^4} \frac{3\pi}{2} \left(\frac{L}{\pi\hbar v} \right)^3 \int_0^{x_D} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

$$x_D \equiv \frac{\beta\pi\hbar v n_{\max}}{L} = \frac{\theta}{T} = \frac{\hbar\omega_{\max}}{\tau}; \quad \theta \equiv \frac{\hbar v}{k_B} \left(\frac{6\pi^2 N}{V} \right)^{1/3}; \quad \omega_{\max} = \frac{\pi v n_{\max}}{L}$$

$$T \ll \theta \Rightarrow U(T) \cong \frac{3\pi^4 N k_B T^4}{5\theta^3} \propto T^4$$

$$\Rightarrow C_V \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,N} \cong \frac{12\pi^4 N k_B}{5} \left(\frac{T}{\theta} \right)^3$$

זהו חוק דביי
: T^3 (Debye)

$$T \gg \theta \Rightarrow \int_0^{x_D} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \approx \int_0^{x_D} x^2 dx = \frac{x_D^3}{3}$$

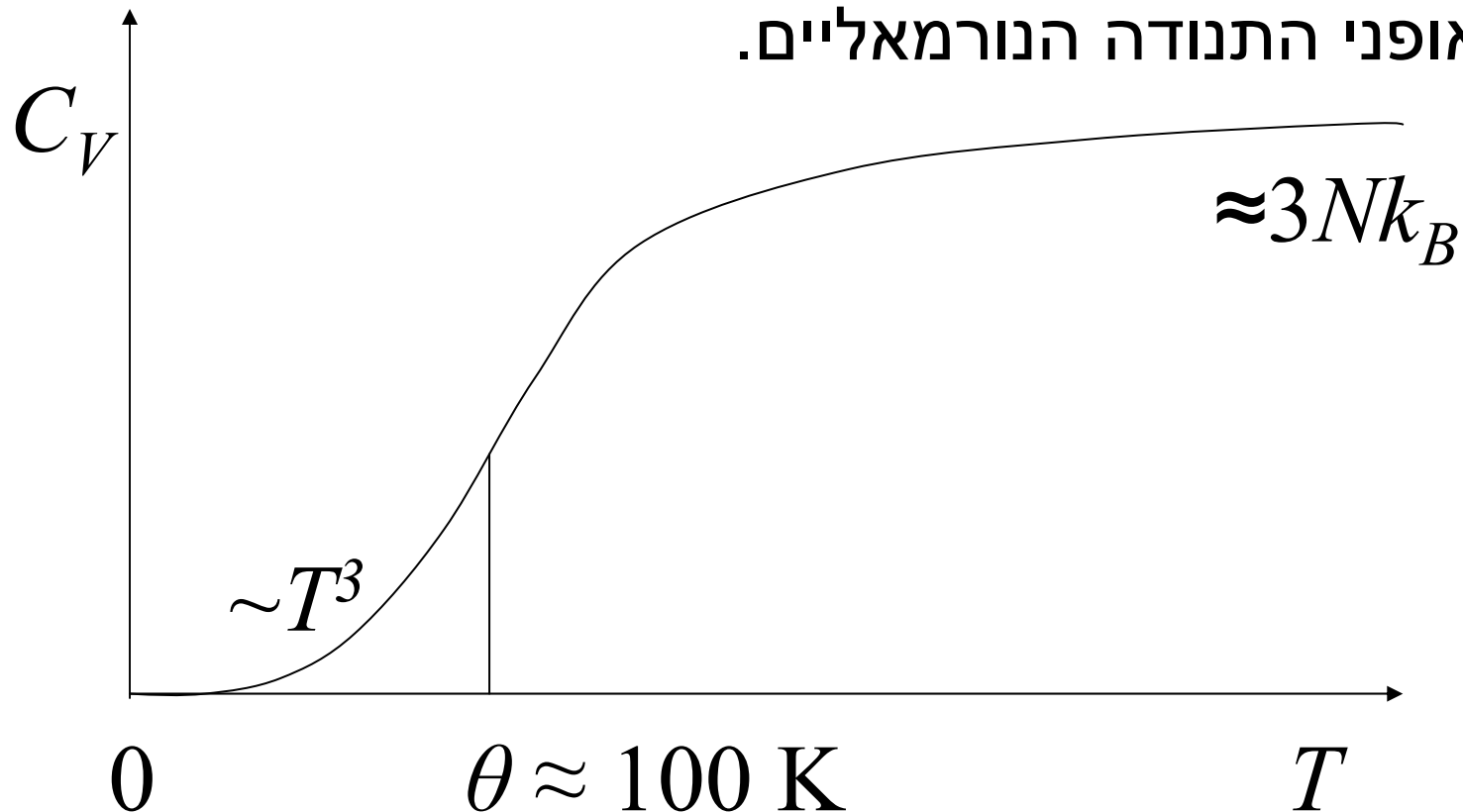
חוק דביי T^3 נובע מהקפאה
קוונטית של האוסילטורים
עם $\hbar\omega \gg \tau$

$$\Rightarrow U(T) \cong 3N\tau$$

זהו חוק Dulong-Petit

קיבול החום של מוצק בכל הטמפרטורות

- לאמיתו של דבר, יש מהירויות קול שונות v לקיטובים השונים!
- כמו כן, $v = v(\omega)$.
- לכן: קירוב דביי הוא קירוב טוב מאוד כאשר T רחוק מ- θ , אבל החישוב הנכון של θ נותן תוצאה קצת שונה.
- בתחום הביניים של T נחוץ לחשב במפורט את הספקטרום של אופני התנודה הנורמאליים.



פונונים

- כאשר אוסילטור הרמוני, שמתאר את אחד מאופני התנודה הנורמאליים של המוצק בעל תדירות אופיינית ω , מעוקר לדרגת עירור s , אנו אומרים כי יש במערכת s **פונונים** בעלי אנרגיה $\hbar\omega$ כל אחד.

לקחים מהטיפול בגז של פוטונים או פונונים

- במקום לחפש את המצב המיקרוסקופי של כל חלקיק (פוטון או פונון) באופן פרטני, מה שהיה מחייב לתייג את החלקיקים למרות היותם זהים, פשוט ספרנו כמה חלקיקים (זהים) היו בכל אחד מהמצבים החד-חלקיקיים.
- הבעיה אז היא כי מספר החלקיקים איננו נתון מראש ואף איננו קבוע.
- לכן, ננסה לוותר על מספר חלקיקים קבוע, גם כאשר מדובר בחלקיקים אשר אינם יכולים להיווצר או להיעלם כמו הפוטונים או הפונונים, כשם שויתרנו מקודם על אנרגיה טוטאלית קבועה.
- זה יאפשר לנו, בסופו של דבר, לתת טיפול קוונטי מלא למערכת של חלקיקים ללא אינטראקציות, דהיינו **גז אידיאלי**, ללא הגבלה על הצפיפות שלו!
- לצורך זה, צריך להגדיר "מגע דיפוזיוני" בין מערכות שונות, (שמאפשר מעבר חלקיקים אך איננו משנה את המצבים המיקרוסקופיים) וכן "אמבט חלקיקים".

סיכום השיעור הקודם והשלמות

- הספקטרום של Max Planck לקרינת גוף שחור.
- בגבול הקלאסי $\hbar\omega \ll \tau$ מתקיים חוק החלוקה השווה \leftarrow נוסחת Rayleigh-Jeans.
- בגבול הקוונטי $\hbar\omega \gg \tau$ מתקיימת הקפאה קוונטית של אותה דרגת חופש. זה מה שמונע את התבדרות הספקטרום כאשר $\omega \rightarrow \infty$.
- חוק Wien ושימושיו: מדידת טמפרטורה של כור היתוך.
- **מודל Debye**: אינטרפולציה בין חוק Dulong-Petit ובין הגבול $\tau \rightarrow 0$.
- קיבול החום של חומר מוצק בטמפרטורות נמוכות תלוי בתכונות החומר. כאשר $T \ll \theta$, התלות באה דרך θ , שתלוי בצפיפות האטומים ובמהירות הקול:

$$C_V \cong \frac{12\pi^4 Nk_B}{5} \left(\frac{T}{\theta}\right)^3; \quad \theta \equiv \frac{\hbar v}{k_B} \left(\frac{6\pi^2 N}{V}\right)^{1/3}$$

- פונונים באנלוגיה לפוטונים: קוונטים של עירור אופני התנודה הנורמאליים של תנודות האטומים במוצק.
- הטיפול הקוונטי המדויק ב"גז פוטונים" ו"גז פונונים" התאפשר משום שהמצב הרב-חלקיקי של כל אוסילטור הרמוני אופיין ע"י "גורם האיכלוס" s .