$E=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ $e_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $x+y=0$ $\lambda=-1$ устойчив

$e_2=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ $2x+y=0$ $\lambda=-2$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=E^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2x+y\\-x-y\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+2\xi\\ \dot{y}_1=-2y_1-\xi\end{cases}$$

$$\dot{x}_1=(2\dot{x}+\dot{y})=-(2x+y)+2\xi$$

$$\dot{y}_1=(-\dot{x}-\dot{y})=-2(-x-y)-\xi$$

$\begin{pmatrix}\text{устойчив}\\ -1,-2\ \text{устойчив}\end{pmatrix}$

$v=|x_1|^2+|y_1|^2=x_1^2+y_1^2$ — квадратичная функция

↑ Чтобы v была функцией Ляпунова

$$\dot{v}=2x_1\dot{x}_1+2y_1\dot{y}_1$$

$$=-2x_1^2-4y_1^2+\xi(4x_1-2y_1)\le$$

$$\le-2x_1^2-2y_1^2+\xi(4x_1-2y_1)=$$

$$=-2v+\xi(4x_1-2y_1)$$

$\dot{v}\le\text{const}<0 \Leftarrow v\ge v_0$, где $v_0>0$ — какое-то



$$|x_1| \le v^{\frac{1}{2}},\ |z_1| \le v^{\frac{1}{2}}$$

$$v = x_1^2 + z_1^2$$

$$|\xi(2x_1 - z_1)| \le 0.01(2|x_1| + |z_1|) \le 0.01 \cdot 3 v^{\frac{1}{2}}$$

$$\dot{v} \le -2v + 2 \cdot 0.03 v^{\frac{1}{2}} \le \text{const} < 0$$

$$v \ge v_0 > 0$$

$$-v^{\frac{1}{2}} + 0.03 \le -\gamma < 0$$

$$v \ge (0.03 + \gamma)^2 = 0.0009 + 2\gamma + O(\gamma^2)$$

$$v_0 = 0.001 > 0.0009$$

$$\dot{v} \le \text{const} < 0 \iff v \ge v_0$$

$$v = (2x + y)^2 + (x + y)^2 \le 0.001 = v_0$$

$\Delta x = x - x_0 \to$ נסמן

$$\dot{\Delta x} = A\Delta x + o(\Delta x)$$

$$v = \Delta x^t H \Delta x \quad , H^t = H \quad , \quad A^t H + HA = Q$$

מצאנו פונקציה

$$\dot{v} = (\Delta x)^t A^t + o(\|\Delta x\|)^t H \Delta x + (\Delta x)^t H (A\Delta x + o(\Delta x))$$

$$\dot{v} = (\Delta x)^t [A^t H + HA] \Delta x + o(\Delta x)^t H \Delta x + \Delta x^t H o(\Delta x)$$

$$= (\Delta x)^t Q \Delta x + o(\|\Delta x\|^2)$$

$$o(\Delta x) = \|\Delta x\| \cdot o(1) \quad o(1) \to 0$$

כפל בסקלר

$\Delta x \to 0$ כאשר $e = \frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}$, $\|e\| = 1$ נגדיר:

אז בסביבה $\Delta x \neq 0$ כאשר $\dot{v} < 0$ - v

$\Delta x = 0 \iff \dot{v} = 0$ כאשר

$$\dot{v} = \|\Delta x\|^2 \left(e^t Q e + o(1) \right) \qquad \Delta x \neq 0 \text{ כאשר}$$

$o(1)$ שואף לאפס כאשר

$\|e\| = 1$ אז $e = -1$ כך ש $e^t Q e \leq -\beta < 0$ קיים β כי $\|e\| = 1$

$\Rightarrow$ כאשר $\|\Delta x\|$ קטן מספיק $\dot{v} \leq 0$ מצאנו פונקציה

$\Rightarrow$ משפט לפונקציה $\Rightarrow$ יציבות אסימפטוטית מקומית (סיימנו)

יציבות מסדר ראשון בשיטת הפונקציה הראשונה

$$\dot{x} = f(x) + \xi(t,x)$$

נתון: $\dot{x} = f(x)$, $f(x_0) = 0$

x_0 - נקודה שיווי משקל, $v(x)$ - פונקציה מתאימה.

מצאנו פונקציה: $\dot{v} = v_x' \cdot f \leq w(x) \leq 0$

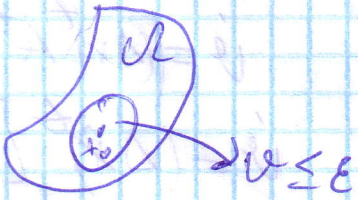
נשתמש ב-מסקנה: $\dot{v} = v_x'(f+\xi) \leq w(x) + \lambda_x' \xi$

$$\Omega = \{ x \mid \forall t, \ w(x) + \lambda_x' \xi \leq w_1(x) \leq 0 \}$$

מצאנו פונקציה.

$\varphi(t,x_0)=0\}$ ① יציבות במובן של ליפונוב

$\exists\varepsilon;\{|\varphi|\le\varepsilon\}\subseteq\mathcal{U}$ – סביבה כלשהי של הפתרון



לכל סביבה כלשהי של הפתרון $x=x_0$.

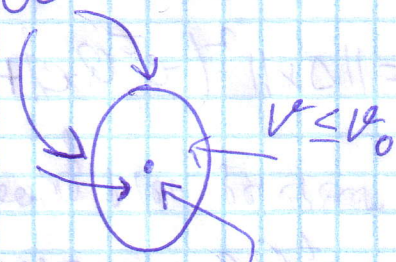
② $|\varphi|\le\delta$

$x=x_0$ כך שלכל $|\varphi|$ שמתחיל ב- $x=x_0$.

$|w(x)|<\varepsilon'_x$

וזה קורה עבור כמעט כל $x=x_0$.

$\exists\varepsilon;\{|\varphi|\le\varepsilon\}\subseteq\mathcal{U}$



כך שכמעט כל $\{|\varphi|\le\varepsilon_0\}$ כלול בפנים.

דוגמה: בחנו את היציבות (במובן ליפונוב) של הפתרון של המערכת

$$\begin{cases}\dot{x}=y+\xi\\ \dot{y}=-2x-3y\end{cases}\qquad \xi=0.01\sin(x^3+y^2+\text{זמן})$$

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\-2&-3\end{pmatrix},\quad p(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda&1\\-2&-3-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=\lambda^2+3\lambda+2$$

$$\lambda_{1,2}=-1,-2$$

$A^tH+HA=Q$; $Q^t=Q$

(משוואת ליאפונוב)

Q חיובית מוגדרת אם $y^tQy \le 0$ לכל y שונה מאפס.

משפט ליאפונוב: אם $\operatorname{Re}\operatorname{Spec}A \subseteq \mathbb{C}_-$ אז ההעתקה

$H \mapsto A^tH+HA$ היא איזומורפיזם.

(כלומר לכל Q קיים H יחיד).

אזי $V=y^tHy$ היא פונקציית לפיאפונוב שעבורה $\dot V$ היא שלילית מוגדרת.

(א) נניח שיש בסיס מנורמל שמורכב מוקטורים עצמיים של A, כלומר קיימים $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{C}$ ו $e_1,\dots,e_n \in \mathbb{C}^n$.

$E=(e_1 \dots e_n)$ כך ש $AE=E\Lambda$, $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$

Λ מטריצת A בבסיס $e_1,\dots,e_n$.

$z=Ey$

$\dot y=Ay \Rightarrow E\dot z=AEz=E\Lambda z$

$\Rightarrow \dot z=\Lambda z$

$\dot z_1=\lambda_1 z_1$

$\dot z_2=\lambda_2 z_2$

$\vdots$

$\dot z_n=\lambda_n z_n$

$V=|z_1|^2+\dots+|z_n|^2$

$V=\bar z^t z$ - פונקציית ליאפונוב.

$\|z\|^2=$

$\dot V=\dot{\bar z}^t z+\bar z^t\dot z=\bar z^t\bar\Lambda z+\bar z^t\Lambda z=$

$=\bar z^t(\bar\Lambda+\Lambda)z=$

$=\bar z^t(2\operatorname{Re}\Lambda)z=$

$=\sum 2\operatorname{Re}\lambda_i\,|z_i|^2 \le 0$

$\Lambda^t=\Lambda$ מתקיים Λ מטריצה אלכסונית.

$\operatorname{Re}\lambda_i<0$ אם $\forall 1\le i\le n$.

$y^t H y$, $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ → quadratic form

$$V = z^t z = y^t (E^{-1})^* E^{-1} y$$

$B^* = \bar{B}^t$:Hermitian

$H^* = H \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $H = (E^{-1})^* E^{-1}$:def

Hermitian matrix and form

$$V = (y_1 \dots y_n)\begin{pmatrix} h_{11} & \cdots \\ \vdots & \ddots \\ \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i,j} h_{ij} y_i y_j = \sum h_{ii} y_i^2 + \sum_{i<j} (h_{ij} + \bar{h}_{ij}) y_i y_j$$

$h_{ii} \in \mathbb{R}$, $h_{ii} = \bar{h}_{ii}$

~~$(H)_{ij} = \overline{(H)_{ji}}$:Hermitian~~

$$= y^t \tilde{H} y , \quad \tilde{h}_{ij} = \frac{h_{ij} + \bar{h}_{ij}}{2} \in \mathbb{R}$$

Hermitian ⑩ .

$h_{ii} = \bar{h}_{ii}$,$h_{ij} = \bar{h}_{ji}$:Hermitian

① - Sylvester's law of inertia;

$$V = \sum k_i |z_i|^2 , \quad z = E^{-1} y$$

E - identity matrix. (Arnold ,מתמטיקה קלאסית)

② $V = y^t H y$ quadratic form , $\dot{y} = Ay$,שדה וקטורי

$V = (x - x_0)^t H (x - x_0)$,נקודת שיווי משקל ,x_0

$$\dot{x} = A(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$J_F = \frac{\partial f(x,y)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \nabla \dot{x} \\ \nabla \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x-2y-1) & -2\cos(x-2y-1) \\ 3+y & -5+x \end{pmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial(x,y)}\right|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = \begin{pmatrix} \cos(0) & -2\cos(0) \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+4)+6 = \lambda^2+3\lambda+2$$

$$\lambda = -1, -2$$

לפי משפט הרוטציה של הנקודה

<u>הערה:</u>

$$\begin{cases} \dot{x} = -4y - x^3 \\ \dot{y} = 3x - y^3 \end{cases}$$

(נקודת שיווי משקל $x=0, y=0$)

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -4 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12$$

$$\lambda = \pm 2\sqrt{3}\,i$$

נבנה פונקציה קלה שמקיימת תנאים של פונקציית לפונוב:

$$v(x,y) = 3x^2 + 4y^2$$

$$\dot{v} = 6x\dot{x} + 8y\dot{y} = 6x(-4y - x^3) + 8y(3x - y^3)$$

$$= -6x^4 - 8y^4 \leq 0$$

מזה נובע שלפי משפט לפונוב הנקודה שווי משקל.

דוגמה:

$$\begin{cases} \dot{x} = -4y + x^3 \\ \dot{y} = 3x + y^3 \end{cases}$$

$$v = 3x^2 + 4y^2$$

$$\dot{v} = 6x^4 + 8y^4 \geq 0$$

מקסימום מקומי.

$\Leftarrow$ זה לא נותן (לפי משפט 1; משפט הקו המרכזי)

$x(t) = x_0 \Leftarrow \operatorname{Re} \operatorname{spec} A \subseteq \mathbb{C}_-$ (chetaev).

$$\dot{x} = A(x - x_0) + \underbrace{\theta(x - x_0)}_{R(t,x)}$$

משפט הקו המרכזי: (1) נתון כי כל הערכים עצמיים של $\dot{y} = Ay$ (חלקיהם ממשיים) שליליים.

(2) קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $\|R(t,x)\| \leq \varepsilon \|x\|$ (מספיק קטן).

אזי x_0 נקודת שיווי משקל יציבה אסימפטוטית.

משפט של Arnold

④ $\dot{y} = Ay$ נתון מערכת משוואות ראשון: $V = y^t H y$

$H = H^t$ מטריצה סימטרית ($H \in \mathbb{R}^n$).

$$\dot{V} = \dot{y}^t H y + y^t H \dot{y} = y^t A^t H y + y^t H A y$$

$$\dot{y}^t = y^t A^t = \quad = y^t (A^t H + H A) y$$

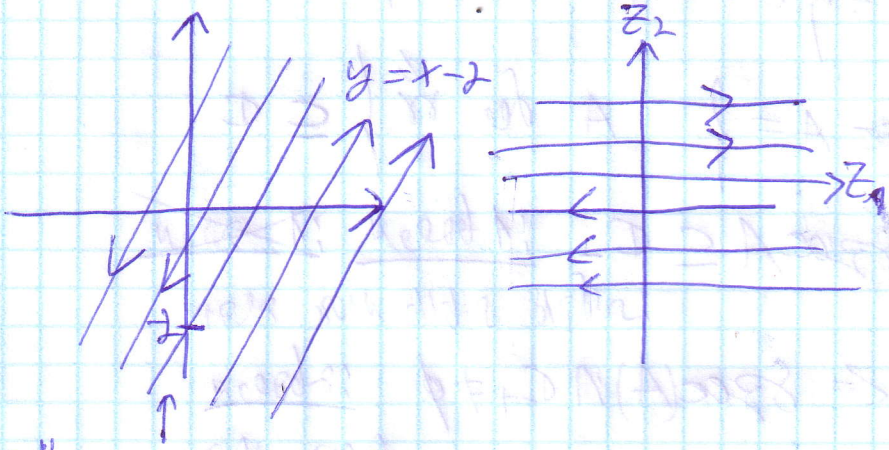
(6)

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - 2 \\ \dot{y} = x - y - 2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$$

$\lambda = 0$ $\quad x - y = 0$ $\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda = 0$

שדה $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$ $\quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \text{ישר} \\ y = 0 \end{pmatrix}$



$$\dot{z}_1 = z_2$$
$$\dot{z}_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ישר $y = x - 2$

15/07/08

11 שבוע – 2 שיעור

משפט קיום ויחידות פתרונות

$$\dot{x} = f(t,x) = A(x - x_0) + R(t,x)$$

$$R(t,x) = o(\|x - x_0\|), \quad f \in C$$

משפט קיום ויחידות מקומי:

$$\dot{x} = f(x), \quad f(x_0) = 0$$

x_0 – נקודת שיווי משקל

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$\mathbb{C}_- = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z < 0 \}$$

$$\mathbb{C}_+ = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 0 \}$$

$$\mathrm{spec}\, A = \{ \text{ערכים עצמיים של } A \} \subseteq \mathbb{C}$$

~~משפט:~~ אם $\mathrm{spec}\, A \subseteq \mathbb{C}_-$ אז הפתרון $x(t) \equiv x_0$ הוא יציב אסימפטוטית.

משפט: $x(t) \equiv x_0$ לא יציב $\Leftarrow \mathrm{spec}(A) \cap \mathbb{C}_+ \neq \emptyset$.

(לא נראה).

דוגמה:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y + x^2 + y^2 \sin(t) \\ \dot{y} = x + y - y^2 \end{cases}$$

נקודת שיווי משקל $(0,0)$.

האם ניתן לחזות?

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

$$\lambda = 1 \pm i$$

$\Leftarrow$ יציב אסימפטוטית.

$\mathrm{Re}\,\lambda > 0$

דוגמה:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin(x - 2y - 1) = f(x,y) \\ \dot{y} = 3x - 5y - 3 + xy \end{cases}$$

נקודת שיווי משקל: $x = 1, \ y = 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}$$

③

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$\lambda_{1,2} = -1$$

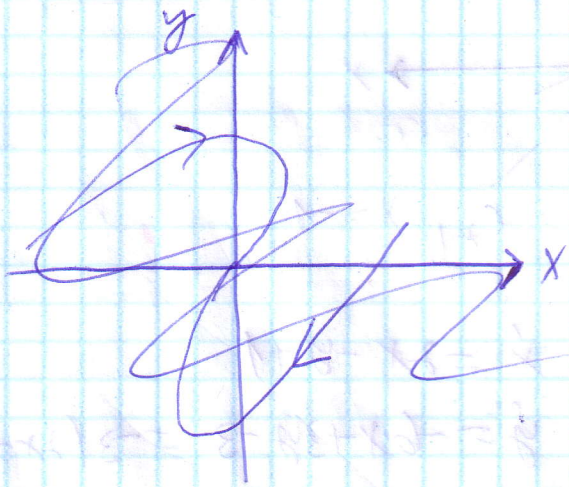
$\lambda = -1$

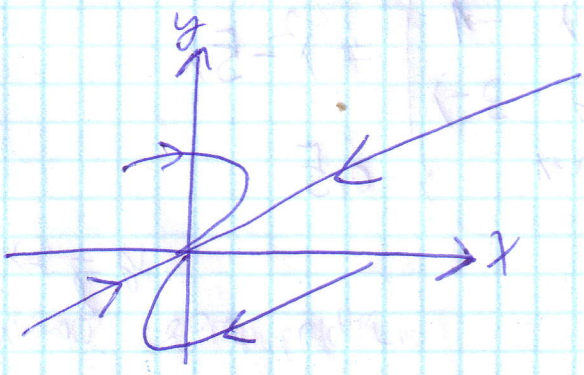
$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \quad x = y \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

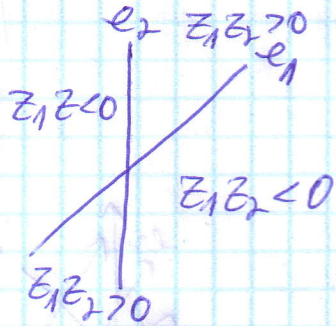
Ранг δ_1 ||

$$\begin{cases} -2x + 2y = 1 \\ -2x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I) e_2 = e_1$$







$\dot{x} = 3x + 4y - 2$

$\dot{y} = 2x + y + 2$

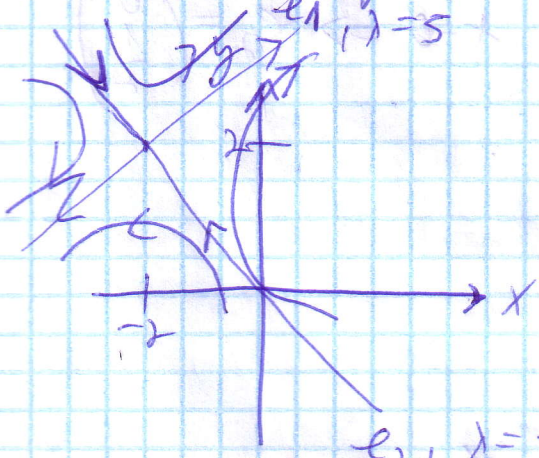
$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (4)

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1)$$

$\lambda = 5$; $-2x + 4y = 0$ $x = 2y$: 2 и k

$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

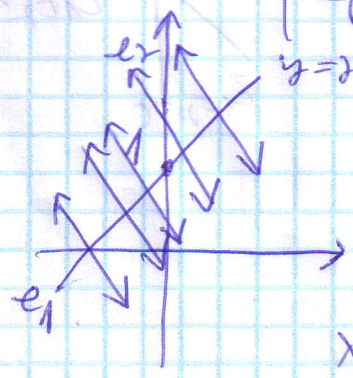
$\lambda = -1$; $4x + 4y = 0$ $x = -y$ $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



(5)

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 1 \\ \dot{y} = -6x + 3y - 3 = -3(2x - y + 1) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda$$



$\lambda = 0,5$

$y = 2x + 1$

$\lambda = 0 \Rightarrow 2x - y = 0$ $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda = 5 \Rightarrow 3x + y = 0$ $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

② א/ שקיבלנו קבועה ⇐ שב א/.

דוגמה: ① פתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2 \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

שקיבלנו קבועה:

$x_0 = 1$

$y_0 = -1$

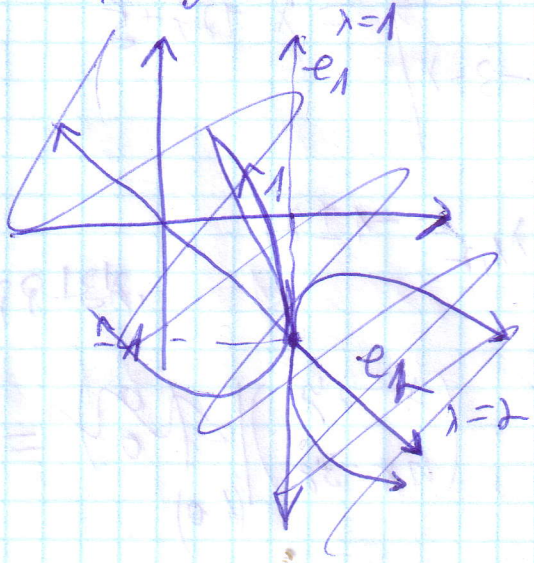
$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

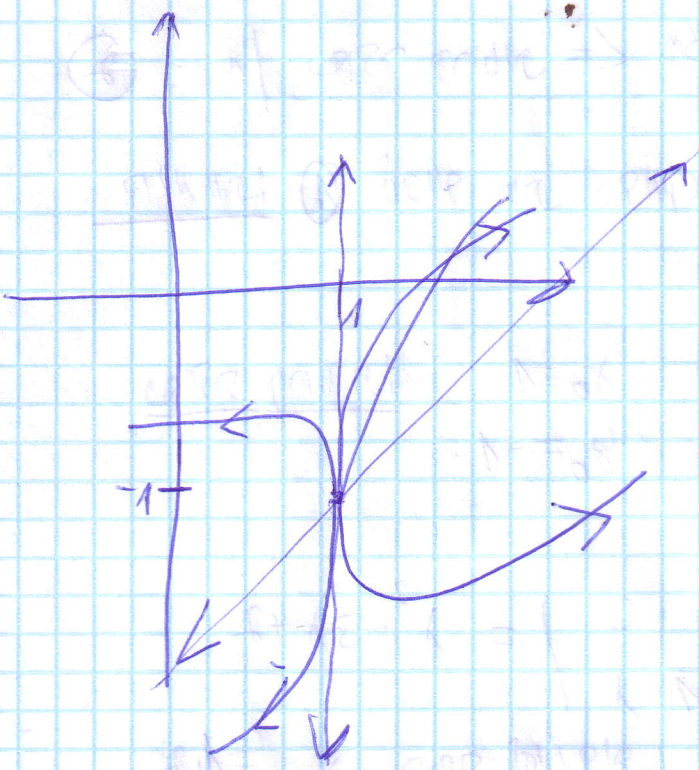
ערכים עצמיים: $\lambda_{1,2} = 1, 2$

$\underline{\lambda = 1}$: $(2-1)x = 0$ $\quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda = 2}$: $(2-2)x = 0$ $\quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x + y - y = 0 \Rightarrow x = -y$





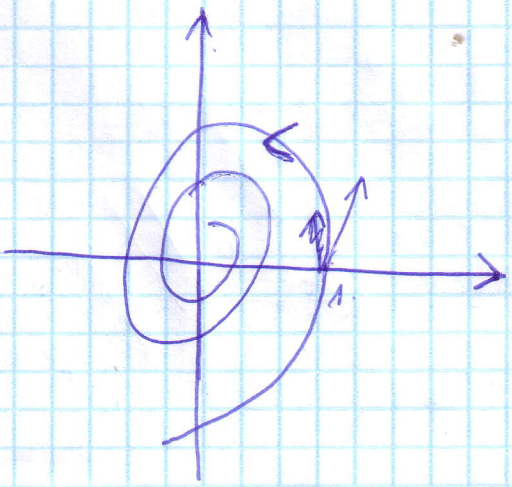
(2)

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 4x - 3y \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

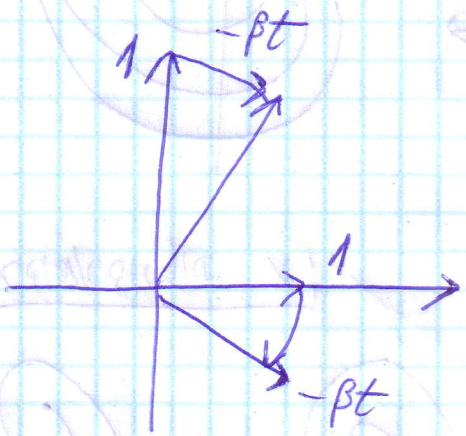
$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$$

$$\begin{pmatrix} x - 2y \\ 4x - 3y \end{pmatrix}\Big|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$



סיבוב נגד כיוון השעון $-\beta t$ →

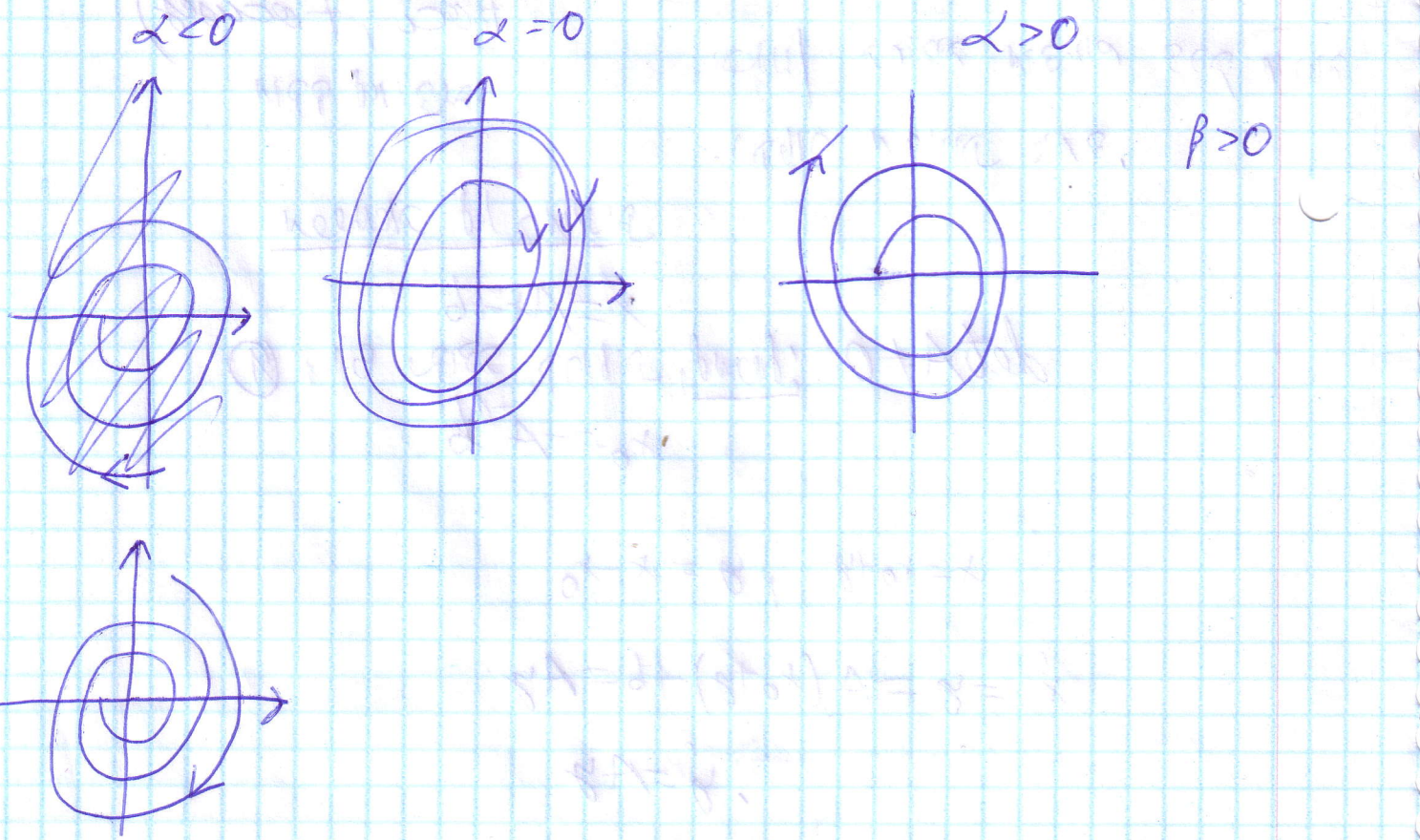
$$\begin{pmatrix} \cos(-\beta t) & \cos(\frac{\pi}{2}-\beta t) \\ \sin(-\beta t) & \sin(\frac{\pi}{2}-\beta t) \end{pmatrix} =$$

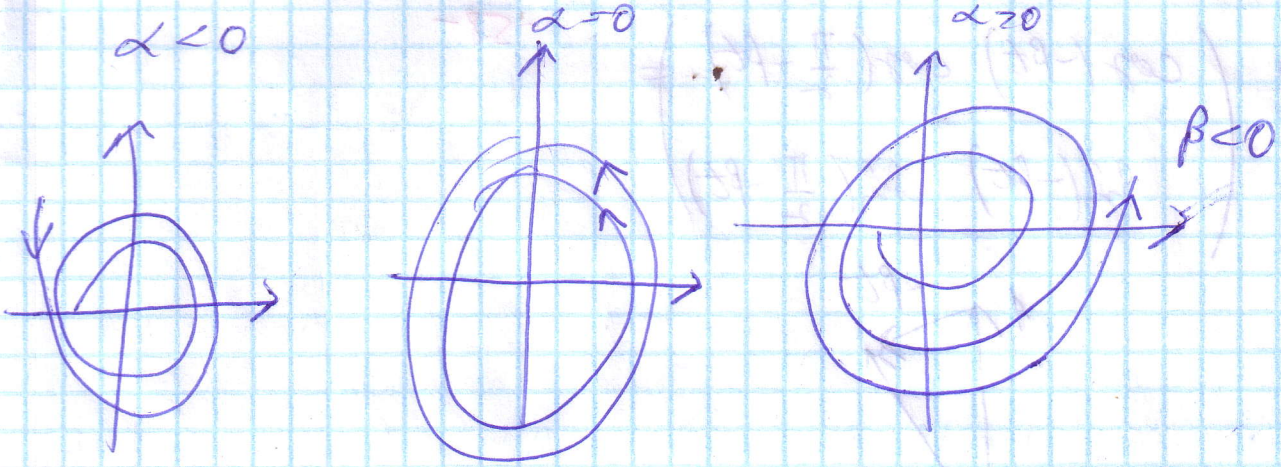


$$z = \rho \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad , \quad z(t) = z(0) = \rho(0) \begin{pmatrix} \cos(\varphi(0)) \\ \sin(\varphi(0)) \end{pmatrix}$$

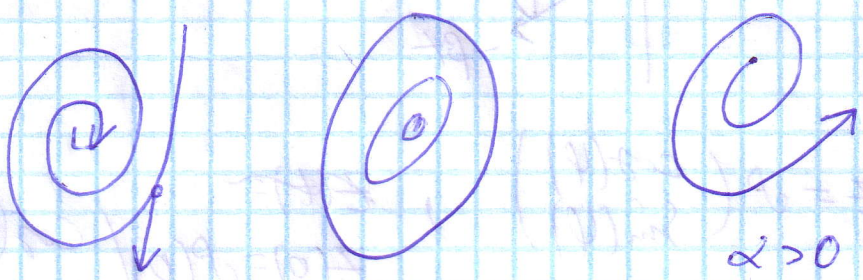
קואורדינטות קוטביות:

$$\rho(t) = e^{\alpha t}\rho(0) \quad , \quad \varphi(t) = \varphi(0) - \beta t$$





דוגמאות:



α<0
stable
שדה יציב.

α=0
center
מרכז.

α>0
Spiral point
(unstable)
Focus
(Foci, Focuses)
שדה לא יציב.

כלומר: רוצה שהפתרון יהיה קרוב
לנקודה שווי משקל אחת.

משפט על הטיפוס

$\dot{x} = Ax + b$

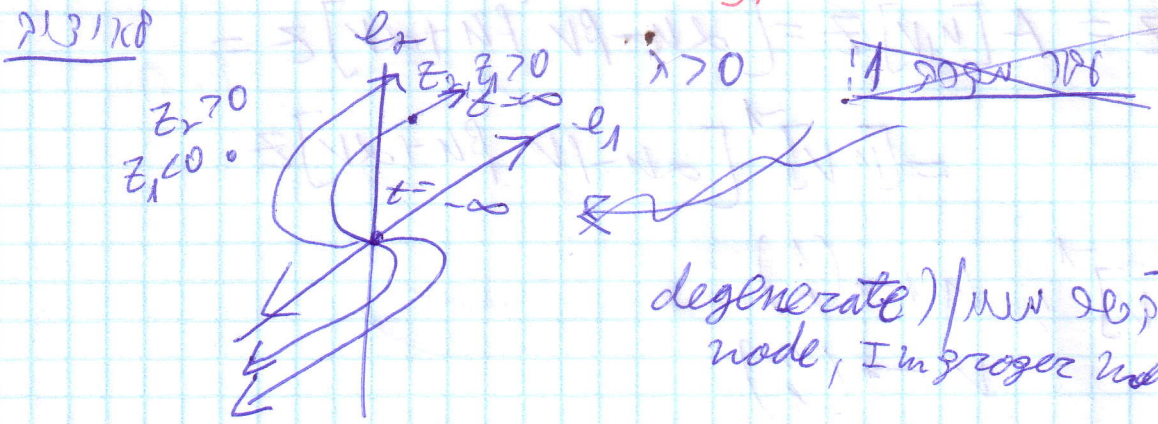
(1) אם שדה קווים, $\det A \neq 0$ נמצא:

$x_0 = -A^{-1}b$

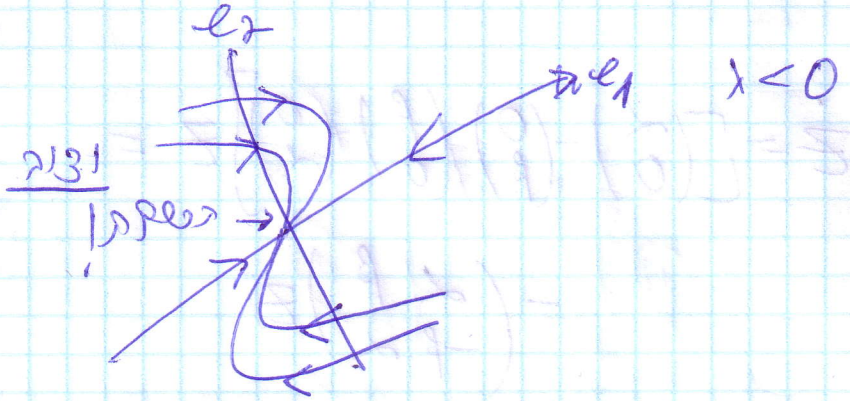
$x = x_0 + y \quad , \quad y = x - x_0$

$\dot{x} = \dot{y} = A(x_0 + y) + b = Ay$

$\dot{y} = Ay$.



degenerate) / מקרה מנוון
node, Improper node



. $\lambda, z_1, z_2 > 0$ כאשר $t \to -\infty$ כל הפתרונות שואפים ל-0

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \alpha + \beta i \quad (3)$$

$$(A - \lambda_1 I) e_1 = 0 \,, \quad (A - \bar{\lambda}_1 I) e_2 = 0$$

$$e_1 = u + vi \qquad e_2 = \bar{e}_1 = u - iv$$

. $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$u = \frac{e_1 + e_2}{2}$$

$$v = \frac{e_1 - e_2}{2}$$

. u, v בסיס $\Leftarrow$

$$A(u + vi) = (\alpha + \beta i)(u + vi) \,; \; u, v \text{ בסיס}$$

$$= (\alpha u - \beta v) + (\beta u + \alpha v) i$$

$$Au + (Av) i$$

$$\left.\begin{aligned} Au &= \alpha u - \beta v \\ Av &= \beta u + \alpha v \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = [u, v]_Z$$

$$[u\,v]\dot{z} = A[u,v]z = [\alpha u - \beta v \;\; \beta u + \alpha v]z =$$

$$= [u\,v]^{-1}[\alpha u - \beta v \;\; \beta u + \alpha v]z$$

$$[u\,v]^{-1}: \; u \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad v \mapsto \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\dot{z} = \left[\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\alpha\end{pmatrix}\right]z =$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}z$$

$$\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix} = \alpha I + \beta J$$

$$I = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

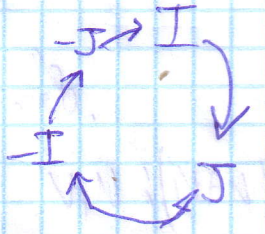
$$IJ = JI \Rightarrow e^{(\alpha I+\beta J)t} = e^{\alpha I t}\, e^{\beta J t}$$

$$z(t) = e^{(\alpha I+\beta J)t} z(0) = e^{\alpha t}\cdot e^{\beta J t} z(0)$$

$$e^{\beta J t} = I + \frac{\beta J t}{1!} + \frac{\beta^2 J^2 t^2}{2!} + \dots = I\left(1 - \frac{\beta^2 t^2}{2!} + \frac{\beta^4 t^4}{4!} - \dots\right)$$

$$+ J\left(\frac{\beta t}{1!} - \frac{\beta^3 t^3}{3!} + \dots\right)$$

$$J^0 = I$$
$$J^1 = J$$
$$J^2 = -I$$
$$J^3 = -J$$
$$J^4 = I$$



$$= \begin{pmatrix}\cos(\beta t) & \sin(\beta t)\\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t)\end{pmatrix}$$

$$= \cos(\beta t) I + \sin(\beta t) J$$

$$z(t) = e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\cos(\beta t) & \sin(\beta t)\\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t)\end{pmatrix} z(0)$$

$\lambda_1=\lambda_2$,$A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$,1' שאלה

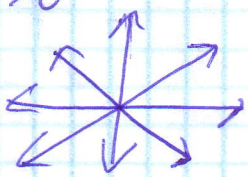
e_1, e_2

$\Leftarrow$ כל וקטור הוא וקטור עצמי.

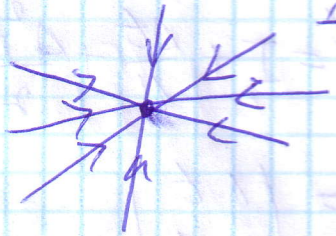
$$Ax=A(x_1e_1+x_2e_2)=$$

$$=x_1\lambda e_1+x_2\lambda_2 e_2=\lambda x$$

$\lambda>0$,שאלה



$\lambda<0$,שאלה



231

(2) $\lambda_1=\lambda_2$,שאלה מהו וקטור עצמי? $Ae_1=\lambda e_1$,שאלה מהו וקטור עצמי?

$$\Updownarrow$$

$$(A-\lambda I)e_1=0$$

$Ae_2=\lambda e_2+e_1$,שאלה מהו וקטור עצמי?

$(A-\lambda I)e_2=e_1$.שאלה מהו e_2 ,(e_1 -ל בסיס)

$\underline{\forall\alpha\in\mathbb{R}:\ e_2'=e_2+\alpha e_1}$ e_2 שאלה מהו

?שאלה מהו וקטור עצמי

$x=[e_1e_2]z$;e_1, e_2 שאלה מהו בסיס

$$\|$$

$$z_1e_1+z_2e_2$$

$$[e_1e_2]\dot{z}=Ax=A(z_1e_1+z_2e_2)=$$

$$=[\lambda e_1\ \lambda e_2+e_1]z$$

$[e_1e_2]^{-1}$; $e_1\mapsto\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$e_2\mapsto\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$\dot{z}=[e_1e_2]^{-1}[\lambda e_1\ \lambda e_2+e_1]z=$$

$$=\underbrace{\left[\lambda\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ \lambda\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]}_{A}z=\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}z$$

$$z(t) = e^{\Lambda t} z(0)$$

נוסחה!

$$\Lambda = \lambda I + \Delta \quad , \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{\lambda I t} = e^{\lambda t} I$$

$$z(t) = e^{\lambda I t + \Delta t} z(0) = e^{\lambda t} \cdot e^{\Delta t} \cdot z(0)$$

$$e^{\Delta t} = I + \frac{\Delta t}{1!} + \frac{\Delta^2 t^2}{2!} + \dots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$z(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z(0) \quad \Leftarrow$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} z(0)$$

$$z(t) = z_1(0) e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_2(0) e^{\lambda t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = [e_1 \, e_2] z = e^{\lambda t} \left[z_1(0) e_1 + z_2(0)(t e_1 + e_2) \right]$$

נסדר אגפים:

$$x = e^{\lambda t} \left[(t z_2(0) + z_1(0)) e_1 + z_2(0) e_2 \right]$$

① z_2 קובע את גודל הרעש

② $t \to \infty$ ההשפעה של x הוא $t z_2(0) e_1$ – הכי גדול (ההשפעה הכי גדולה).

$t \to -\infty$ (הכי קטן הכי גדול).

$$x = [e_1\ e_2]\, z =$$

$$= z_1(0) e^{\lambda_1 t} e_1 + z_2(0) e^{\lambda_2 t} e_2$$

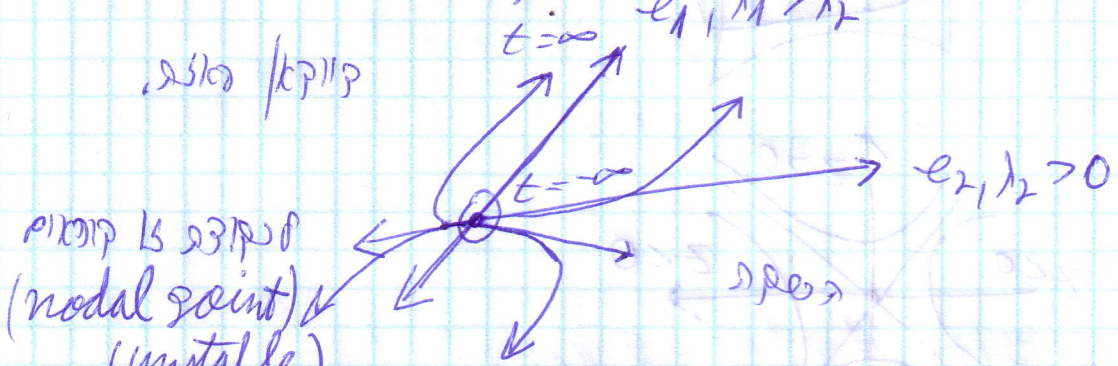
א: $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2(0)}{z_1(0)} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \to 0 \quad t \to \infty$$

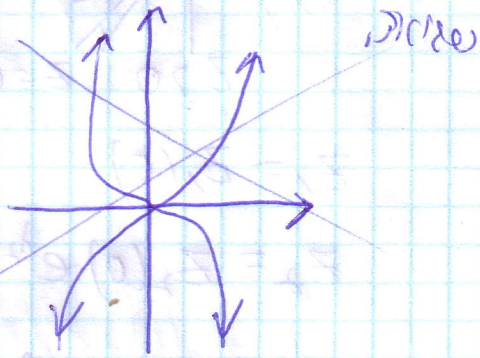
$$\frac{z_1}{z_2} \to \pm\infty \quad t \to \infty$$

$$t \to -\infty$$

$$\frac{z_2}{z_1} \to \pm\infty \ ,\ \frac{z_1}{z_2} \to 0$$



(nodal point)
(unstable)



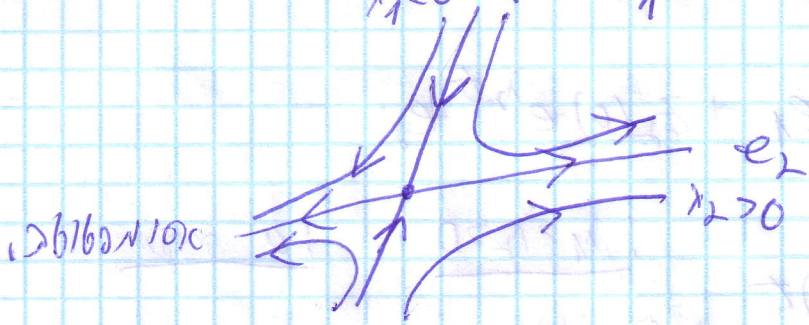
ב: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$



$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

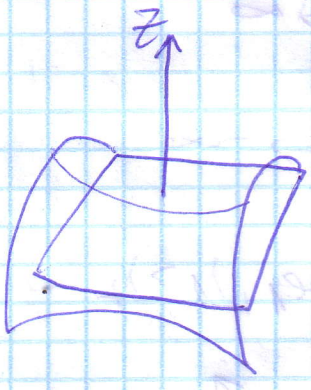
(stable node)

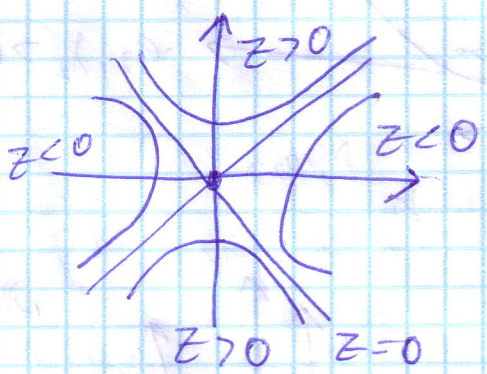
c. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



saddle point

$z = x^2 - y^2$

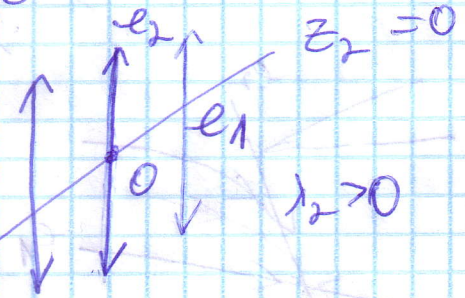


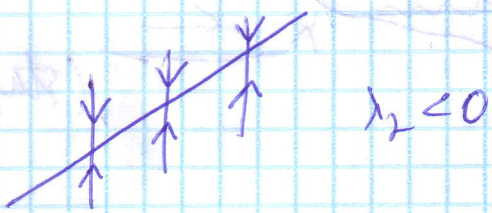


d. $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 = 0$

$z_1 = z_1(0)$

$z_2 = z_2(0) e^{\lambda_2 t}$





$$c_k = \frac{1}{\pi}\left\{\begin{array}{ll} \frac{2}{k}, & k=2s+1 \\ 0, & k=2s \end{array}\right. - \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{k+2} & k=2s+1 \\ 0 & k=2s \end{array}\right. -$$

$$- \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{k-2} & k=2s+1 \\ 0 & k=2s \end{array}\right.$$

$k=1 \Rightarrow c_1 = \frac{8}{3\pi}$

$$\begin{cases} k=1 & -(1^2-1)\gamma_1 = \frac{3}{8\pi} + \alpha = 0 \\ k>1 & (k^2-1)\gamma_k = \frac{1}{\pi}\left\{\begin{array}{ll} \frac{2}{k} - \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k-2} & \text{זוגי } k \\ 0 & \text{אי זוגי } k \end{array}\right. \end{cases}$$

$k = 2n+1$

$$u = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n-1} - \frac{2}{2n+1}\right)\cdot\frac{1}{4n^2+4n}\sin((2n+1)x)$$

$$+ \gamma_1 \sin(x)$$

$\gamma_1 \in \mathbb{R}$

Линейные системы дифференциальных уравнений

$\dot{x} = Ax + b$, $x \in \mathbb{R}^2$

$b \equiv 0$ — однородная; $b \neq 0$ — неоднородная

x_0 — положение равновесия, если $f(x_0) = 0$

$\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$

Случай $n = 2$, линейная однородная система

$\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^2$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Характеристический многочлен:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2$$

где λ_1, λ_2 — корни.

(1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^2 \to$ новый базис). Пусть e_1, e_2 — собственные векторы, e_1, e_2 образуют базис

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = Ez$$

$$[e_1\ e_2]\dot{z} = A[e_1\ e_2]z = [Ae_1\ Ae_2]z =$$

$$= [\lambda_1 e_1\ \lambda_2 e_2]z$$

$$\dot{z} = [e_1\ e_2]^{-1}[\lambda_1 e_1\ \lambda_2 e_2]z$$

E^{-1}: $e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ — координаты e_1 в базисе e_1, e_2

$e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ — координаты e_2 в базисе e_1, e_2

$$\dot{z} = \left[\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] z = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} z$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1, & z_1 = e^{\lambda_1 t} z_1(0) \\ \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2, & z_2 = e^{\lambda_2 t} z_2(0) \end{cases}$$

$$z = z_1(0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + z_2(0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

$$\begin{cases} u'' + u + \lambda u = u'' + (\lambda+1)u = 0 \\ u(0) = 0,\ u(\pi) = 0 \end{cases}$$

$\lambda + 1 > 0$ ①

$$u = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x)$$

$$(\lambda+1) = k^2,\ k \in \mathbb{N} \qquad \mu = \sqrt{\lambda+1}$$

$$u_k = \sin(kx),\ \lambda_k = k^2 - 1$$

$$\lambda_1 = 0,\ u_1 = \sin(x)$$

$u = 0 \iff u = c_1 x + c_2$ $\qquad \lambda + 1 = 0$ ②

לא עונה לתנאי

$\mu > 0,\ \lambda + 1 = -\mu^2$ $\qquad \lambda + 1 < 0$ ③

$$u = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\mu\pi} + c_2 e^{-\mu\pi} = 0 \end{cases}$$

לא.

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\mu\pi} & e^{-\mu\pi} \end{vmatrix} = e^{-\mu\pi} - e^{\mu\pi} \neq 0$$

לא עונה $\iff$

יהיה פתרון טריוויאלי אם ורק אם λ שורש משוואה אופיינית

שורש משוואה $\lambda - 0 = \lambda$ משוואה אופיינית:

$$\langle \sin^2(x) + \alpha \sin(x),\ \sin(x) \rangle = 0$$

$$\langle \sin(x), \sin(x) \rangle = \int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$$

(אפשר לחשב בקלות ע"י $l = \pi$, l - אורך המחצית).

$$\langle \sin^2(x), \sin(x) \rangle = \int_0^{\pi} \sin^3(x)\,dx =$$

$$= -\int_0^{\pi} (1-\cos^2(x))\,d\cos(x) =$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$\alpha = -\frac{8}{3\pi}$$ המספר שנחפש

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \sin(kx)$$ נחפש פתרון מהצורה

$$u'' + u = -\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \gamma_k \sin(kx) - \sum_{k=1}^{\infty} (k^2-1)\gamma_k \sin(kx)$$

$$\sin^2(x) - \frac{8}{3\pi}\sin(x)$$

$$\sin^2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx)$$ נחפש

$$c_k = \frac{\langle \sin^2(x), \sin(kx) \rangle}{\langle \sin(x), \sin(x) \rangle} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2(x)\sin(kx)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2}\cdot \sin(kx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(kx)\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left[\sin((k+2)x) + \sin((k-2)x)\right]dx =$$

$$=$$

$Lu = f$ ... ...

$$-W \sum \alpha_i \lambda_i u_i = W \sum c_i u_i$$

$$\boxed{-\alpha_i \lambda_i = c_i}$$

$$\alpha_i = -\frac{c_i}{\lambda_i} \iff (i \neq k \text{ ...})$$
$$(\lambda_k = 0)$$

$$-\alpha_k \cdot 0 = c_k \iff (i = k \text{ ...})$$

... $c_k \neq 0$ ... $\iff$

... $\alpha_k \in R$, ... $c_k = 0$ ...

24/06/08

משפט 2 – הכללה 6

הכללה עבור אופרטורים

הכללה עבור אופרטורים

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ Bu = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Lu = f \\ Bu = 0 \end{cases}$$

פתרון u_n, ו־λ_n עצמיים,

$\lambda_n \neq 0$ עצמי ו־$u_n \neq 0$

דוגמה 1 –

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(0) = 0 \\ u(\pi) = 0 \end{cases}$$

m עצמים לינארית בלתי תלויים $\lambda = m^2$.

דוגמה מרכזית: $u_n = u_0 e^{\lambda_n t}$

$$\begin{cases} Lu_n = 0 \\ Bu_n = 0 \end{cases}$$

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i u_i$$

$$Lu_i = -\lambda_i m u_i$$

$$\frac{f}{w} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i$$

על משפט:

משפט האפיון:

$$u_i \gamma_i \lambda_i = -\alpha_i u_i m \sum \leftarrow \sum m u_i \alpha_i = u_i \gamma_i$$

משפט פורייה עבור $\alpha_i = -\gamma_i \lambda_i$, $i = 1, \dots, \infty$ על משפטי עצמים

$\lambda_n = 0 \Rightarrow \alpha_n = 0 = \gamma_n$, $n = i$

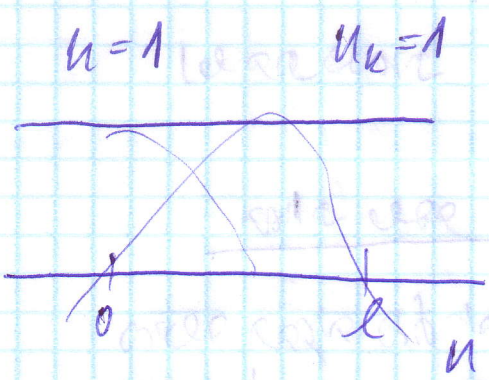
הוכחה: $\alpha_n \neq 0 \Rightarrow$ לא עצמי.

$\alpha_n = 0 \Rightarrow$ מספר כפולות $\gamma_n \in \mathbb{R}$ עצמי.

דוגמה:

$$\begin{cases} u'' + u = 2\sin^2(x) + u \\ u(\pi) = 0, \ u(0) = 0 \end{cases}$$

פתרון של משוואת Fourier בעזרת משפט 2 עבור בעיות (בעיות גבול) עם תנאי שפה



. $\lambda_k > 0$, $\lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{\ell^2}$, אם $\lambda \le 0$ אין פתרון
$k = 1, 2, \ldots$

$$u_k = \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right)$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right)$$

$$c_k = \frac{\int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right) dx}{\int_0^{\ell} \sin^2\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right) dx} = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right) dx$$

$$\int_0^{\ell} \sin^2\left(\frac{\pi k x}{\ell}\right) dx = \int_0^{\ell} \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{\ell} x\right)\right) dx =$$

$$= \frac{\ell}{2} - \int_0^{\ell} \cos\left(\frac{2\pi k}{\ell} x\right) dx = \frac{\ell}{2}$$

$$c_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right) dx$$

$$= -\frac{2}{\ell} \frac{\ell}{\pi k} x \cos\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right)\Big|_0^{\ell} + \frac{2}{\pi k} \int_0^{\ell} \cos\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right) dx$$

$$= (-1)^{k+1} \cdot \frac{2\ell}{\pi k} + \frac{2}{2\pi k} \cdot \frac{\ell}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right)\Big|_0^{\ell}$$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{2\ell}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right) \qquad x \neq \ell \text{ אם}$$

$$\text{אחרת } = 0 \quad ; x = \ell \text{ אם}$$

לפי משפט $f(x)=x-2$ כאשר $[0,2]$.

בעיות שטורם ליוביל מסדר שני

$$\begin{cases} Lu=f \\ Bu=0 \end{cases}$$

בעיה הומוגנית / לא הומוגנית

בעיה עצמית (Bayce, Birkhoff)

$$\begin{cases} Lu+\lambda wu=0 \\ Bu=0 \end{cases}$$

בעיה עצמית ל"ש:

M הומוגנית

$M=1$ כפפה

$\lambda=0$ אז קיים y שפתרון

$y_1, y_2, \dots, y_n$ בלתי תלויים

$y_1, y_2, \dots, y_n$ בסיס:

$y_1, y_2, \dots, y_n$ פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית.

$$y=\sum_{i=1}^{n} c_i y_i$$ פתרון כללי של

$$Ly=\sum_{i=1}^{n} c_i Ly_i = y \lambda w$$

$$f=w\frac{f}{w}$$

$$\frac{f}{w}=\sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i \quad , \quad c_i=\frac{\langle w\frac{f}{w}, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle}=$$

$$=\frac{\langle f, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle}$$

$$f=w\sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i$$

תרגיל 8 (מועד ב' תשע"ח)

נתונה מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x^3 \\ \dot{y} = -2x - 3y + x^3 \end{cases}$$

א. מצאו את כל הנקודות הקריטיות של המערכת.

ב. הוכיחו שהנקודה הקריטית $(0,0)$ היא יציבה אסימפטוטית.

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

$$\lambda_{1,2} = -1, -2$$

$$\lambda = -1 \quad , \quad \lambda = -2 \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad E^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ -x_1 - 2y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = E^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ -x - y \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 3x^3$$

$$\dot{y}_1 = -2y_1 - 2x^3$$

$$\dot{x}_1 = (2x + y)\dot{} = 2\dot{x} + \dot{y} = \ldots + (2+1)x^3$$

$$\dot{y}_1 = (-x - y)\dot{} = -\dot{x} - \dot{y} = \ldots + (-1-1)x^3$$

$$\frac{1}{2}\dot{v} = x_1(-x_1 + 3x^3) + y_1(-2y_1 - 2x^3) =$$

$$= -x_1^2 - 2y_1^2 + x^3(3x_1 - 2y_1) \leq$$

$$\leq -x_1^2 - y_1^2 + (x_1 + y_1)^3(3x_1 - 2y_1)$$

$$|x_1| \leq v^{\frac{1}{2}} \quad , \quad |y_1| \leq v^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq -v + (|x_1| + |y_1|)^3(3|x_1| + 2|y_1|)$$

$$\leq -v + 2^3 v^{\frac{3}{2}} \cdot 5v^{\frac{1}{2}} = -v + 40v^2$$

$\Leftarrow \vartheta \le \vartheta_0$ עבור $\vartheta_0 > 0$ כלשהו

כך ש $\dot{\vartheta} < 0$ עבור $\vartheta \neq 0$ (כלומר $\dot{\vartheta}$ שלילית)

אזי הכדור $\{\vartheta \le \vartheta_0\}$ משיק לראשית

$(x,y) = (0,0)$ בנקודה יחידה

$\dot{\vartheta} \le 0 \Leftarrow \vartheta \neq 0$ עבור

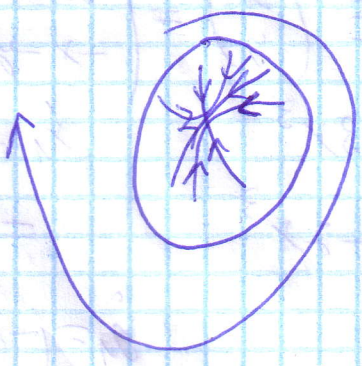
$-\vartheta + h\vartheta^2 \le 0$

$\vartheta \le \vartheta_0 < \frac{1}{40}$

(עבור $\vartheta_0 = \frac{1}{40}$ יש נקודה שבה $\dot{\vartheta} = 0$ ~~עבור~~ $\vartheta = 0$ היחידה שבה $\dot{\vartheta} = 0$)

דוגמה: $\vartheta \le \frac{1}{50}$,

כלומר: $(2x+y)^2 + (x+y)^2 \le 0.02$.



משפט היציבות (משפט לייפונוב)

~~Para~~ $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n$

$a_i \in \mathbb{R}$,

הוכחה: ~~נסמן~~ נסמן את שורשי P ב $\mathbb{C}_-$.

משפט: $P(\lambda)$ יציב $\Leftrightarrow a_1, a_2, \dots, a_n > 0$.

הוכחה: $P(\lambda) = \prod_j (\lambda + \gamma_j) \cdot \prod_k (\lambda + \alpha_k + i\beta_k)(\lambda + \alpha_k - i\beta_k)$

$\beta_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_k > 0$, $\lambda = -\gamma_j < 0$ אזי

$$= \prod_j (\lambda+\gamma_j) \prod (\lambda^2+2\alpha_k\lambda+\alpha_k^2+\beta_k^2)$$

ס"ה הפתרון הכללי.

משל! $\lambda^2+b\lambda+c$ יהיו שורשי $b>0, c>0 \iff$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2-4c}}{2} \qquad b^2-4c>0$$

$$\lambda_{1,2} = \left(\frac{-b}{2}\right) + \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2} i \qquad b^2-4c \le 0$$

α

דוגמה: מצא את כל הפתרונות של המשוואה

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + \cos(x-1) = 0$$

$$\dot{x} = x = 0 \iff \text{נקודת שיווי משקל}$$

$$\cos(-1) = 0 \iff$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

נקודות שיווי משקל:

$$y_1 = x$$
$$y_2 = \dot{x}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -2y_2 + \cos(y_2 - y_1) = 0 \end{cases}$$

$$y_0 = \begin{cases} y_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

לינאריזציה:

$$\dot{z} = A(y_0) z, \quad A(y_0) = \frac{\partial(\dot{y}_1, \dot{y}_2)}{\partial(y_1, y_2)}\Big|_{y_0} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin(y_2 - y_1) & -2 - \sin(y_2 - y_1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 + 2z_2 - \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \pi n\right)(z_2 - z_1) = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{z}_1 + 2\dot{z}_1 + (-1)^n \cdot (z_2 - z_1) = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + (2 + (-1)^n)\lambda - (-1)^n$$

$n = 2k$, $P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 1$ → יציבות אסימפטוטית

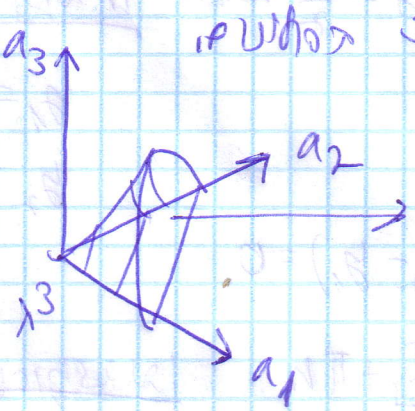
$n = 2k+1$, $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$ → יציבות אסימפטוטית

$n=3$:

Routh-Hurwitz :

$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ $n=3$ עבור :

$a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0$ $\quad - \quad$ $a_3 < a_1 a_2$



יציבות אסימפטוטית $\Leftrightarrow$

דוגמה: מצאו את ערכי הפרמטר α עבורם המערכת יציבה אסימפטוטית.

$$\dot{x}_1 = x_3$$
$$\dot{x}_2 = -3x_1$$
$$\dot{x}_3 = -2x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -3 & -\lambda & 0 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 6)$$

$\gamma > 0, \alpha > 0, \delta > 0$

$\alpha\gamma > \delta$

$\alpha > \delta$;ро

Рауц-Гурвиц критерий

$a_0 > 0$ $\quad P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$

$T_0 = a_0, \; T_1 = a_1, \; T_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},$

$T_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},$

$T_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix},$

$T_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 \\ a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 \end{vmatrix}$

def
$a_k = 0 \quad k > n$

$T_0 > 0, T_1 > 0, \dots, T_n > 0 \iff$ אחרי [illegible]

$T_0 > 0, T_2 > 0, \dots, \neg T_2\left[\frac{n}{2}\right] > 0$

$\iff$ [illegible]

$T_1 > 0, T_3 > 0, \dots, \neg T_2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1 > 0$

07/08/09

שאלה מבחן - 2 שאלות

$y(0)=-1$, $y'\cos(x)+y\sin(x)+\sin(|y|^{\frac{1}{2}})\sin(x)$ (1) $-2\sin(x)=0$

$0<x<\frac{\pi}{2}$ $\quad 1-2\cos(x)<y<3-4\cos(x)$ - e נוסף

$\frac{-\pi}{2}<x<0$ באופן דומה $\quad y(0)=-1$

נתון $\Leftarrow \cos(x)>0 \quad |x|<\frac{\pi}{2}$ באופן

$$y'=tg(x)\left(-y+2-\sin(|y|^{\frac{1}{2}})\right)$$

$$0<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \quad tg(x)>0$$

$$tg(x)(1-y)\le y'\le tg(x)(3-y)$$

$y'=tg(x)(1-y)$ $\qquad y'=tg(x)(3-y)$

$\frac{y'}{1-y}=tg(x)$, $y(0)=-1$ $\qquad \frac{y'}{3-y}=tg(x)$, $y(0)=-1$

$y=1-2\cos(x)$ $\left(\begin{matrix} y\neq 1 \text{ ולכן} \\ \text{נתון באופן} \end{matrix}\right)$ $\qquad y=3-4\cos(x)$

$\ln|y-1|=\ln|\cos(x)|$

$1-2\cos(x)\le y\le 3-4\cos(x)$ - e נתון כך

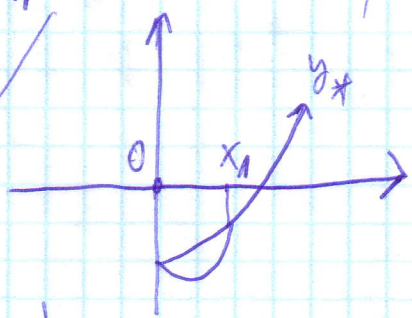
נתון שהפתרון יחיד.

$3-4\cos(x)|_{x=0}=-1$ באופן הפתרון היחיד

$y(x_1)=y_*(x_1)$, $y(0)=y_*(0)$

$\forall x\in[0,x_1]$ $\Leftarrow$

$y(x)=y_*(x)$ נתון כך



$y'_{**}=tg(x)(3-y_*)=tg(x)(3-y)=y'$ $\Leftarrow$ $y'=y'_*$ כך שגם

$y' = tg(x)\left(2 - \sin|y|^{\frac{1}{2}} - y\right)$

$\Rightarrow \sin|y|^{\frac{1}{2}} = -1$

$(x=0)\ \sin(|-1|^{\frac{1}{2}}) \neq -1$ לכן אין

$y < 3 - 4\cos(x)$ נתון כאשר

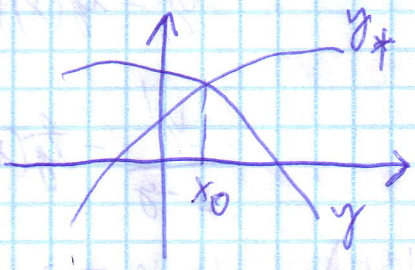
$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $y > 1 - 2\cos(x)$ כאשר

$tg(x) < 0$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ כאשר

$tg(x)(3-y) \leq y' \leq tg(x)(1-y)$

x כאשר נתון כאשר

$1 - 2\cos(x) \leq y \leq 3 - 4\cos(x)$ כאשר

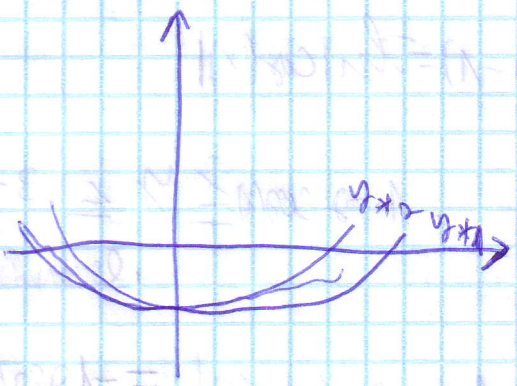


$y_{*_1} = 1 - 2\cos(x)$

$y_{*_2} = 3 - 4\cos(x)$

$y' \leq y'_*$

$1 - 2\cos(x) < y < 3 - 4\cos(x)$ כאשר



$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x, \ x \in \mathbb{R}^n \\ \dot{w} = Tr(A(t))w \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} x & x_1(t) \\ y & y_1(t) \end{vmatrix}$$

$$W(t) = W(0)\, e^{\int_0^t Tr(A(t))dt}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(t^2-1)\ddot{x} + 4t\dot{x} + 2x = 6t \qquad (4)$$

$$x_1 = t, \quad x_2 = \frac{t^2+1}{t+1} \qquad x = \underbrace{x_h}_{c_1x_1 + c_2x_2} + x_p \sim \text{particular}$$

$$y = x_2 - x_1 = \frac{1}{1+t}$$

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n x \overset{\text{homog}}{=} 0 \qquad (t^2-1)\ddot{y} + 4t\dot{y} + 2y = 0$$

$$\dot{w} = -a_1(t)w$$

$$\dot{w} = -\frac{4t}{t^2-1}w \ ; \ y = \varphi(t)$$

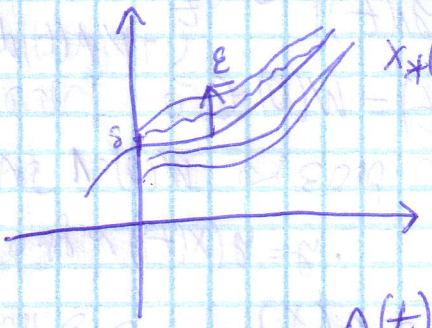
$$\Rightarrow w(t)$$

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi & y \\ \dot{\varphi} & \dot{y} \end{vmatrix} = \varphi\dot{y} - \dot{\varphi}y$$

$$\frac{y}{\varphi} = \int \frac{1}{\varphi^2} w\, dt \quad \Leftarrow \quad \left(\frac{y}{\varphi}\right)' \varphi^2$$

$$\dddot{x} - 2\ddot{x} + 3\dot{x}\sin(t) - x\cos(5t) = 0$$

$$x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = -1,\ \ddot{x}(0) = 0.$$



$$\Delta(t) = x - x_*$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \|\vec{\Delta}(0)\| < \delta \Rightarrow \forall t > 0,\ \|\Delta(t)\| < \varepsilon$$

$$\|\Delta(t)\| \le |\Delta(0)| + |\dot{\Delta}(0)| + |\ddot{\Delta}(0)|$$

$$\dddot{\Delta} - 2\ddot{\Delta} + 3\dot{\Delta}\sin(t) - \Delta\cos(5t) = 0$$

$$\dot{W} = 2W$$

$$W = W(0)e^{2t} \to \pm\infty$$

$$W = \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \\ \dot{\Delta}_1 & \dot{\Delta}_2 & \dot{\Delta}_3 \\ \ddot{\Delta}_1 & \ddot{\Delta}_2 & \ddot{\Delta}_3 \end{vmatrix} \qquad W(t) \to \infty$$

$\forall \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ בת"ל

$$x''' - (t^2+1)^{-1}x'' + \dot{x} + tx = e^t \qquad (7)(5)$$

$$x(0)=0,\ \dot{x}(0)=1,\ \ddot{x}(0)=0$$

הומוגנית

$$\dot{w} = \frac{1}{t^2+1}w$$

$$w \neq 0 \qquad \frac{\dot{w}}{w} = \frac{1}{t^2+1}$$

$$\ln(w) = \operatorname{arctg}(t) + c$$

$$w = e^{\operatorname{arctg}(t)} \cdot e^c$$

$$w(0) \xrightarrow[t\to\infty]{} w(0)\cdot e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\pm e^c = w(0)$$

def. !

$$\text{פתרון הומוגנית} + \text{פתרון פרטי} = \text{פתרון הומוגנית}$$

פתרון $x_*(t)$ עם x_* כך שמתקיים $x_*(0)=0$.

פתרון מתקבל מכך שמתחילים x_* כך שמתקיים $x_*(0)=0$.

על מנת לקבל פתרון הומוגנית (כלומר פתרון שמתחיל ב-0 ומתקיים $x_*(0)=0$).

פתרון הומוגנית).

$u'' - u = 1$

$u(0) = 0,\ u'(1) = 0$

$$\begin{cases} u'' - u = 0 \\ u(0) = 0,\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

$u'' = u$

$u = Ae^x + Be^{-x}$

$u(0) = A + B = 0$

$0 = u'(1) = Ae + Be^{-1}$

$= Ae^2 + B$

$A(e^2 - 1) = 0$

$\neq 0$

$\Rightarrow A = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow u = 0$

$u(0) = 0 = A + B \Rightarrow \varphi_1(x) = \mathrm{sh}(x)$

$u'(1) = 0 = Ae^2 + B \Rightarrow \varphi_2(x) = e^x + e^{2-x}$

$$g(x,s) = \begin{cases} c_1(s)\,\mathrm{sh}(x) & 0 \le x \le s \\ (e^x + e^{2-x})\,c_2(s) & s \le x \le 1 \end{cases}$$

$c_1(s)\,\mathrm{sh}(s) = c_2(s)(e^s + e^{2-s})$

$c_1(s)\,\mathrm{ch}(s) - (e^s + e^{2-s})c_2(s) = 1$

$c_1(s)\,\mathrm{ch}(s) - \dfrac{e^s - e^{2-s}}{e^s + e^{2-s}}\,c_1(s)\,\mathrm{sh}(s) = 1$

$e^s + e^{2-s} = c_1(s)\left[\dfrac{e^s + e^{-s}}{2}(e^s + e^{2-s}) - (e^s - e^{2-s})\left(\dfrac{e^s + e^{-s}}{2}\right)\right]$

$= c_1(s)\left[e^{2s} + e^2 + 1 + e^{2-2s} - e^{2s} + 1\right.$

④ $\begin{cases} u''+u = |\cos(\lambda x)| \\ u(0)=0,\ u(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$

$\begin{cases} u''-u=A \\ u(0)=0,\ u'(\lambda)=0 \end{cases}$

$u''-u=0$; שורשי אופייני ± 1

$u(x) = A\cosh(x) + B\sinh(x)$

$u(0) = 0 = A$

$u(\frac{\pi}{2}) = 0 = B$ $\Rightarrow u \equiv 0$

$u(0) = 0 \Rightarrow \psi_1 = \sinh(x)$

$u(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow \psi_2 = \cosh(x)$

$c_1(s)\sinh(s) = c_2(s)\cosh(s)$

$g(x,s) = \begin{cases} c_1(s)\cosh(x) & s<x<\frac{\pi}{2} \\ c_2(s)\sinh(x) & 0<x<s \end{cases}$

$g(x,s) = \begin{cases} -\cosh(s)\sinh(x) & x \le s \\ -\sinh(s)\cosh(x) & s \le x \end{cases}$

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

$0 \le \lambda x \le \pi$

$u(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x,s)|\cos(\lambda s)|\,ds =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} -\cosh(s)\sinh(x)|\cos(\lambda x)|\,ds - \int_{\frac{\pi}{2\lambda}}^{x} \sinh(s)\cosh(x)|\cos(\lambda x)|\,ds$

$= -\sinh(x)|\cos(\lambda x)| \cdot \frac{1}{\lambda}\cosh(\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{\lambda}\cosh(x)|\cos(\lambda x)| =$

$= -|\cos(\lambda x)|$

$$xy'' + y' - y = 0$$

$$x^2y'' + xy' - xy = 0$$

$\frac{1}{x} \cdot x^2 = x$ singular

$x = 0 \rightarrow$

$\lambda^2 - (1-1)\lambda - 0 = 0$

$\lambda^2 = 0$

singular $\frac{1}{x} \cdot x = 1$

$x = 0 \rightarrow$

$y_1 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$

$y_2 = \ln(x)(y_1) + (d_1 x + d_2 x^2 + \dots)$

$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + \dots$

$y' = c_1 + 2c_2 x$

$0 = (2c_2 x + 6c_3 x^2 + \dots) + (c_1 + 2c_2 x + \dots) - c_0 - c_1 x - c_2 x^2$

$c_1 - c_0 = 0$

$$\sqrt{w(x)}\,u(x) = \int_0^\ell \frac{f(s)}{\sqrt{w(s)}} \sqrt{w(x)}\, g(x,s)\sqrt{w(s)}\, ds$$

$$K(x,s)$$

$$\sqrt{w}\,u = A\frac{f}{\sqrt{w}}$$

$$v \mapsto u \mapsto f \mapsto v$$

$$\frac{1}{\sqrt{w}} \quad \ell \quad A$$

$$\text{Image}(A) = \quad \text{מהו?}$$

$$= M\sqrt{w}$$

$$\sqrt{w}u_k \in L^2 \Rightarrow \text{מה ניתן לומר על } M\sqrt{w} \in L^2 \Rightarrow \text{מה ניתן לומר על } M$$

$$\sqrt{w}u_k \text{ מהי התמונה של } L^2 \text{ תחת הפעולה } \sqrt{w}u_k \quad (\text{מהי}) \quad \Leftarrow N$$

$$L^2[0,\ell] \text{ (כל הפונקציות)}$$

(אם אפשר לייצג כל פונקציה ב-L^2 כצירוף לינארי של u_k אז)

$$\Leftarrow \text{ כן אומר שזה}$$

$$\forall g \in L^2 \;;\; \exists \{c_k\} \;,\; g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k$$

$$g = \sqrt{w}\,f \qquad \text{נוכיח:} \quad \text{אם } f \in L^2_{[0,\ell]} \text{ אז}$$

$$g = \sqrt{w}\,f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sqrt{w}\,u_k$$

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k \qquad \Leftarrow$$

$$i \neq j \Leftrightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0$$

$$g = \sum c_k v_k v_j \;\to\; \text{מכפיל פנימי}$$

$$\langle g, v_j \rangle = c_j \langle v_j, v_j \rangle$$

(הוכח) $c_k = \frac{\langle g, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} = \frac{\langle \sqrt{w} f, \sqrt{w} u_{\lambda_k} \rangle}{\langle \sqrt{w} u_{\lambda_k}, \sqrt{w} u_{\lambda_k} \rangle} = \frac{\langle w f, u_{\lambda_k} \rangle}{\langle w u_{\lambda_k}, u_{\lambda_k} \rangle}$

Fourier טור של טור של

$f \in M \ (\Leftarrow f \in C^2, \Delta f = 0)$ (Steklov) :משפט

אם יש מכפלה פנימית שעבורה f הוא

(כפל)

:משפט תנאי דיריכלה עבור f, f' הם

. $(0,l)$ -> ונגזרתה חסומה למקוטעין $[0,l]$ ->

$\forall x \in (0,l)$, $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} c_k u_{\lambda_k} = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

:משפט $f, f' \in C$

. $[0,l]$-> ונגזרתה חסומה למקוטעין f', $f \in C$ ①

:ותנאי השפה הם ②

$u(l)=0$ וגם $u(0)=0$

. $f(l)=0$ וגם $f(0)=0$ אם מתקיים

. $f(x)$-ש $[0,l]$-> יש פיתוח מקומי בטור פורייה

$\sum'(0)=0 \Leftarrow \forall k, u_k'(0)=0 \Leftarrow$ הם הפתרונות $u(0)=0$:כאשר

:דוגמה: פיתוח של Fourier עבור $f(x)=x$ הוא פיתוח

$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 & p=1, q=0 \text{ ; S.L. בעיית} \\ u(0)=0, u(l)=0 & \lambda=1 \end{cases}$

$u''=0$ הפתרון הכללי הוא $\lambda \leq 0$ עבור

λ הוא ערך עצמי $\Leftarrow \lambda=1$;ומכאן, כפל

. $[0,l]$-> שהוא גזיר למקוטעין

משפט: יהי $K \in \mathbb{R}$ קבוע. אז כל הפתרונות של המשוואה $\Delta u + Ku = 0$ על Ω חסום הם $u \equiv 0$.

הוכחה: נראה שהבעיה העצמית $-\Delta u = \lambda u$ עם תנאי דיריכלה, כלומר $u|_{\partial\Omega} = 0$, מקיימת את תנאי הלמה.

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\sqrt{w}\, u_\lambda$ נסמן

$$\langle w u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2} \rangle = \langle \sqrt{w}\, u_{\lambda_1}, \sqrt{w}\, u_{\lambda_2} \rangle = 0$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\quad V_{\lambda_1} \quad V_{\lambda_2}$

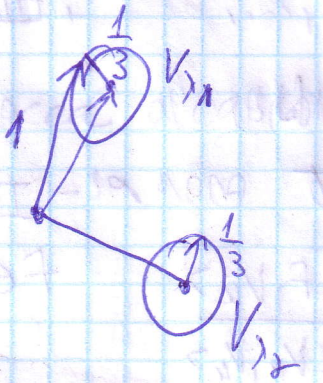
V_λ הוא מרחב העצמי של λ ומכיוון שהוא מרחב נורמי סופי-ממד הוא continuum. נסמן $\mathcal{L}^2[0,\ell]$ את מרחב הפונקציות הרציפות (ואף גזירות אינסוף פעמים).

continuum $\Leftarrow$ נתון כי $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} < \sqrt{2}$ $\begin{cases} \|V_{\lambda_1}\| = 1 \\ \|V_{\lambda_2}\| = 1 \end{cases}$

מרחבים מנורמה שווה.

$\Leftarrow$ יש מרחב שבו יש יותר מנורמה שווה $\Leftarrow$ הכדור

שווה!



משפט הפתרון היחיד: $\lambda = \tilde{\lambda} + k$

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda w u = 0 \\ \Delta u = 0 \end{cases} \qquad \tilde{\lambda} = \lambda - k$$

הוכחה ל-T.S.:

$$\begin{cases} \Delta u + k w u + \tilde{\lambda} w u = 0 \\ \Delta u = 0 \end{cases}$$

$\tilde{\lambda}$ $\Leftarrow$ $\begin{cases} \Delta u + k w u = 0 \\ \Delta u = 0 \end{cases}$

כנדרש $\Leftarrow$ $u \equiv 0$.

$\tilde{\lambda}_1 < \tilde{\lambda}_2 < \dots < \tilde{\lambda}_n < \dots$ — לפי סדר גודל

$\lambda_1 - k < \dots < \lambda_n - k < \dots$

$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$

. מתכנסת כאשר $\lambda_n \to \infty$

, II טענה

$\forall f \in L^2, \exists \{c_k\}$: (III)

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u_{\lambda_k} \qquad c_k = \frac{\langle wf, u_{\lambda_k} \rangle}{\langle w u_{\lambda_k}, u_{\lambda_k} \rangle}$$

$$\int_0^\ell \left| f - \sum_{k=1}^{n} c_k u_{\lambda_k} \right|^2 dx \xrightarrow{L^2 \text{ כאשר מתכנסת}} 0$$

$v_k = \sqrt{w} u_{\lambda_k}$ מערכת אורתונורמלית $v_1, v_2, \dots$; Hilbert

. A מתמטיקה מאפשרת מרחב מתאים כך ש

$\{v_k\}$ בסיס $\Leftarrow$ Hilbert מרחב של Image (A)

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v_k, \; c_k = \frac{\langle f, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} \qquad f \in \text{Image}(A)$$

$$A; C[0,\ell] \xrightarrow{f} \text{Im}\sqrt{w} \subseteq V \quad \text{; ראינו}$$

$$A^{-1} = L^{-1}\frac{1}{\sqrt{w}}$$

. ראינו שמתקיים $\forall f \in C$ טענה

$$u = \int_0^\ell f(s)\, g(x,s)\, ds$$

$$\begin{cases} Lu = f \\ Bu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u \in M \;, \; u \in C^2$$

אלגוריתם שמצא פתרונות לבעיות דומות ואפילו
שונות לחלוטין.

(*) טענה כללית:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{V}{\sqrt{W}} \overset{\text{def}}{\in} M \\ \in \frac{V}{\sqrt{W}} = -\lambda W \frac{V}{\sqrt{W}} \\ Q\frac{V}{\sqrt{W}} = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{\lambda} \in \operatorname{spec} A \text{ :מתקיים} \\ \lambda - \text{ו.ע. מתאים} \end{array}\right.$$

(1) "$\subseteq$": ברור מהגדרה.

(2) "$\supseteq$": $\lambda \neq 0$ כי A הפיכה $\Rightarrow -\frac{1}{\lambda} V = AV \Rightarrow V$ ו.ע. $\Rightarrow \frac{V}{\sqrt{W}}$ מתאים.

$\Rightarrow$ מספיק להוכיח את הטענה הזו עם המשקל הנתון
ונקבל את הטענה [M.S.P]

<u>משפט (תרגיל)</u>: A- אלגוריתם חיובי מעל מרחב.

$$A; L^2_{[a,b]} \xrightarrow{\text{כך}} L^2[a,b]$$

$\Rightarrow$ כל ע"ע של A הם חיוביים, שונים זה מזה וסופיים.
מקיים תנאים שפתרון המשוואה עליהם מתאפס
ומתקיים $\text{Image}(A)$.

כמובן שכל מספר חיובי הוא ע"ע של A כך ש-$\frac{1}{\lambda}$ ע"ע של A

$$\cdots > \lambda_1 > \lambda_0 > \lambda_{-1} > \cdots$$

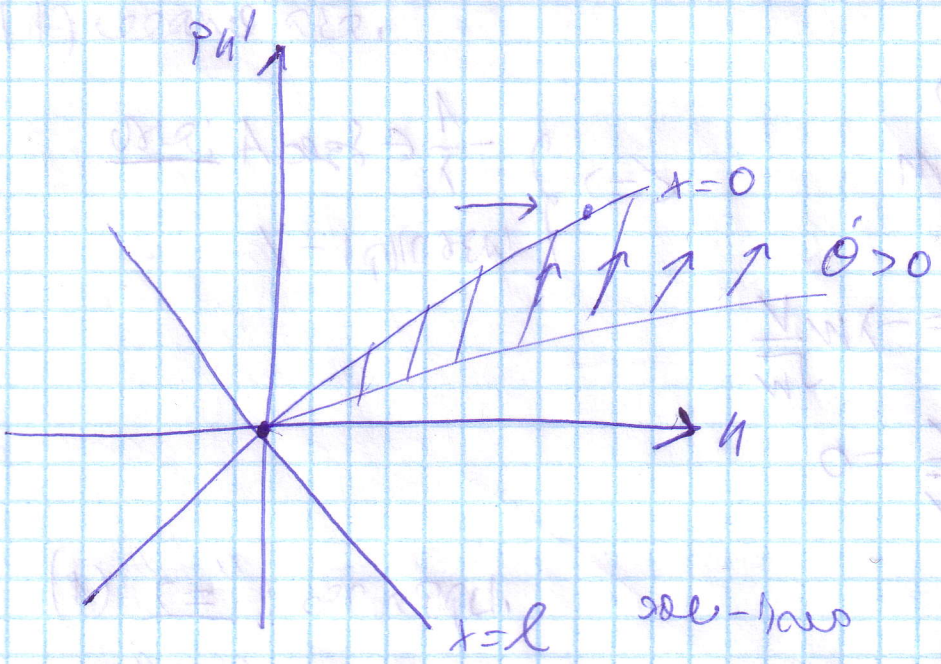
<u>הערה</u>: כל מספר חיובי על פונקציה עצמית ל.S.
יש סדרה של $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ וכל λ_n מתאים למספר סופי של
פתרונות: $\theta \cos\beta = \eta$

<u>משפט סטורם-ליוביל הומוגני</u>

$$\begin{cases} (pu')' + (q+\lambda w)u = 0 \\ \frac{\alpha_1}{p(0)} p(0)u'(0) + \beta_1 u(0) = 0 \\ \text{כאשר: } \beta\cos\beta = -\eta\sin\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha_2}{p(\ell)} p(\ell) u'(\ell) + \beta_2 u(\ell) = 0 \end{cases}$$

: Pfaff ... מטריצה



... -ו ...

$u'(0) > 0$ - ... ...

... $\dot{\theta} = -\frac{1}{\rho} \sin^2(\theta) - q_1 \cos^2(\theta)$

... $\dot{\theta} < 0 \iff q_1 < 0 \iff |x| >> 1$, $x < 0$ ...

... ...

x-... ... ... $\iff x$

... ...

II ...

... III

... $\theta = 0 \iff$ ... ...

x ...

II. משפטי השוואה של ערכים עצמיים

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$$

$\lambda_n \to \infty$ / $n \to \infty$, שקולים בקירוב טוב עבור $x = \infty$.

$$\begin{cases} Lu + \lambda w u = 0 \\ Bu = 0 \end{cases}$$

משוואה ①

$0 \notin Spec(L)$ אם

0 אינו ערך עצמי.

"Spec = spectrum"

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ Bu = 0 \end{cases} \quad u = 0 \iff x \neq 0$$

משפט אלטרנטיבה

נתבונן בבעיה הלינארית

$$\begin{cases} Lu = -\lambda w u \\ u \in M \end{cases}$$

$\iff$ אם ורק אם

$$M = \{u \in C^2[0,1] \mid Bu = 0\}$$

פתרון רשמי:

$$u = \int_0^l -\lambda w(s) u(s) g(x,s)\, ds$$; משפט גרין

$$\sqrt{w(x)}\, u(x) = -\lambda \int_0^l \sqrt{w(s)} u(s) \sqrt{w(x)}\, g(x,s) \sqrt{w(s)}\, ds$$; נכפול ב-$\sqrt{w(x)}$

$$V(x) = -\lambda \int_0^l V(s) K(x,s)\, ds \quad ; \quad K(x,s) \quad V(x) = \sqrt{w(x)}\, u(x)$$

שים לב: $K(x,s) = K(s,x)$; כי $g(x,s) = g(s,x)$ (משוואה מוכרת).

K - סימטרי.

$$V = -\lambda A V \quad , \quad AV(x) = \int_0^l V(s) K(x,s)\, ds$$

אלגברה לינארית.

$$A : L^2[0,l] \to C[0,l]$$

שים:

אבל מעתה נעבוד אלגברה לינארית

$$|AV(x_1) - AV(x_2)|^2 =$$

$$= \left| \int_0^\ell V(s)\left(K(x_1,s) - K(x_2,s)\right) ds \right|^2 \leq$$

$$\leq \left| \int_0^\ell |V(s)| \, |K(x_1,s) - K(x_2,s)| \, ds \right|^2$$

$$\leq \int_0^\ell |V(s)|^2 ds \cdot \int_0^\ell |K(x_1,s) - K(x_2,s)|^2 ds$$

$$\langle a,b\rangle^2 \leq \langle a,a\rangle \cdot \langle b,b\rangle$$

$K(x,s)$ – רציפה במלבן $[0,\ell]\times[0,\ell]$ (קומפקטי).

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : \|(x_1,s_1)-(x_2,s_2)\| < \delta \Rightarrow |K(x_1,s_1) - K(x_2,s)| < \varepsilon$$

$AV(x_1) \to AV(x_2)$ כאשר $x_1 \to x_2$ $\Leftarrow$ (מ"ש)

V שייכת לכדור היחידה בL_2 כי

$$\text{const} \geq \|V\|^2 = \int |V|^2 dx$$

$\Leftarrow$ הקבוצה AV שייכת לקבוצה קומפקטית יחסית;

(equicontinuous)

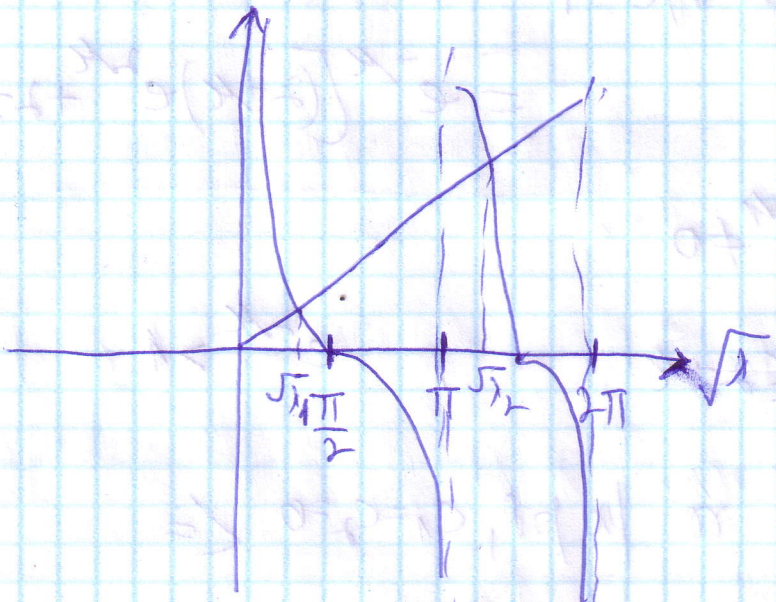
משפט Arzela: קבוצה C שאינה קומפקטית יחסית,

$u'(0)=0 \Rightarrow c_2=0$, $u = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x)$

$u'(1)+2u(1)=0$

$-c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}) + 2c_1\cos(\sqrt{\lambda}) = 0$

$\sqrt{\lambda} = 2\dfrac{\cos(\sqrt{\lambda})}{\sin(\sqrt{\lambda})} = 2\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda})$



$u_k(x) = \cos(\sqrt{\lambda_k}x)$. ზზ ზიაისx

② $\lambda=0 \Rightarrow u''=0$, $u=c_1x+c_2$

$u'(0)=0 \Rightarrow c_1=0$

$u'(1)+2u(1)=0 \Rightarrow 2c_2=0 \Rightarrow c_2=0$

. ზზ ისl 0

$\mu=\sqrt{|\lambda|}$;ιωιο $u = c_1e^{-\sqrt{|\lambda|}x} + c_2e^{\sqrt{|\lambda|}x}$;ι λ<0 ③

$u_m = c_1e^{-\mu x} + c_2e^{\mu x}$

$u' = -c_1\mu e^{-\mu x} + c_2\mu e^{\mu x}$

;ιαεο-ιιιιι

$\begin{cases} \mu(c_1-c_2)=0 \\ c_1(2-\mu)e^{-\mu} + c_2(\mu+2)e^{\mu}=0 \end{cases}$

$C_1 = C_2$

$C_1, C_2 - ?$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ (-\mu+2)e^{-\mu} & (\mu+2)e^{\mu} \end{vmatrix} = (\mu+2)e^{\mu} - (2-\mu)e^{-\mu}$$

$$= e^{-\mu}\left[(2+\mu)e^{2\mu} + 2 - \mu\right] > 0$$

$e^{-\mu} \neq 0$

$|2-\mu| \leq 2+\mu \quad \cdot \quad e^{2\mu} > 1$

[illegible] $C_1 = C_2 = 0 \Leftarrow$

[illegible] $\lambda_\mu > 0$ [illegible] $u = \cos(\sqrt{\lambda_\mu} x)$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u'(0) = 0,\ u'(1) + 2u(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'' + \lambda_3 u + \lambda u = 0 \\ \dots \end{cases}$$

[illegible] $\lambda = \lambda_3 \Leftrightarrow \lambda = 0$

[illegible] $\lambda_2 = \lambda - \delta$ [illegible] $\lambda = \lambda_2 - \lambda_3$

17/06/08

משפט 2 - הרצאה 8

בעיות שטורם-ליוביל

$$\begin{cases} Lu + \lambda w u = 0 \\ \Theta u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p^{(1)}(x)u')' + q^{(0)}(x)u + \lambda w(x)u(x) = 0 \\ \alpha_1 u'(0) + \beta_1 u(0) = 0 \\ \alpha_2 u'(l) + \beta_2 u(l) = 0 \\ (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \neq (0,0) \end{cases}$$

I; **משפט** - תכונות. (תכונות שונות נובעות אחת מהשנייה)

w משקל M;

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \langle w u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2} \rangle = \int_0^l w u_{\lambda_1} \bar{u}_{\lambda_2} dx = 0$$

(כאשר α_i, β_i ממשיים).

הגדרה: נאמר שלבעיה יש תכונה 1. $\{$ מתקיים.

הגדרה: נאמר שלבעיה יש תכונה 2. $\{$ מתקיים.

הגדרה: α_i, β_i ממשיים כך שלפחות אחד מהם שונה מאפס ($\alpha_i \neq 0$ או $\beta_i \neq 0$).

הגדרה: u, v - פתרונות שונים מאפס של λ.

משפט: אם λ הוא ע"ע, אז u, v - פתרונות שונים מאפס של λ.

$$\begin{cases} Lu + \lambda w u = 0 \\ \Theta u = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Lv + \lambda w v = 0 \\ \Theta v = 0 \end{cases}$$

$x = 0$: נסתכל בנקודה אחת, נניח שם:

$$\begin{cases} \alpha_1 u'(0) + \beta_1 u(0) = 0 \\ \alpha_1 v'(0) + \beta_1 v(0) = 0 \end{cases} \quad (\alpha_1, \beta_1) \neq (0,0)$$

$\Leftarrow$ $\det = 0$

$$\begin{vmatrix} u'(0) & u(0) \\ v'(0) & v(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u(0) & v(0) \\ u'(0) & v'(0) \end{vmatrix} = W = 0$$

$$\int_0^{\varepsilon} a(x)v^2(x)\,dx = a(x_0)+o(1) \Rightarrow a(x_0)=0$$

□ הוכח

דוגמה: מצא את הפונקציות העצמיות של הבעיות:

① $\sin(x)u''+\cos(x)u'+u=e^x$
$u'(0)-u(0)=0$
$u'(\pi)=0$

② $u''+\cos(x)u'+u=1$
$u'(0)+u(0)=0$
$u(\pi)=0$

③ $(e^x u')'+\arctg(x)u=\ln(1+x)$
$u(0),u'(1)=0$

הפונקציות העצמיות של הבעיה

$p(x)=\sin(x)$

$(pu')'=\sin(x)u''+\cos(x)u'$

דוגמה 1: מצא את הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם-ליוביל מסדר 2

$$\begin{cases} Lu+\lambda wu=0 \iff Lu=-\lambda wu \\ \theta u=0 \end{cases}$$

$$\langle Lu,u\rangle = \langle -\lambda wu,u\rangle = -\lambda\langle wu,u\rangle$$
$$\langle u,Lu\rangle = \langle u,-\lambda wu\rangle = -\bar{\lambda}\langle wu,u\rangle$$

$\langle wu,u\rangle \neq 0$

□ הוכח $\lambda=\bar{\lambda}$

Пусть $u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — собств.

$$\langle Wu_{\lambda_1}, u_{\lambda_2} \rangle = 0 \quad \Leftarrow$$

— собств.

$$-\lambda_1 \langle Wu_{\lambda_1}, u_{\lambda_2} \rangle = \langle Lu_{\lambda_1}, u_{\lambda_2} \rangle = \langle u_{\lambda_1}, Lu_{\lambda_2} \rangle =$$

$$= -\lambda_2 \langle Wu_{\lambda_1}, u_{\lambda_2} \rangle$$

— собств. $\neq 0$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle Wu_{\lambda_1}, u_{\lambda_2} \rangle = 0$$

$\neq 0$

$$\boxed{\text{Что и}} \quad \langle Wu_{\lambda_1}, u_{\lambda_2} \rangle = 0 \quad \Leftarrow$$

הגדרה: יהיו שני פתרונות שונים מאפס.

$$Lu = (p(x)u')' + q(x)u \qquad p \in C^1,\ q \in C$$

$$\begin{cases} Lu = f \\ Du = 0 \end{cases}$$

הגדרה: פתרון יחיד אם $\forall x;\ p > 0$

(סלייד 3)

$\forall u, v \in H$ **הוכחה:**

$$\langle Lu, v \rangle - \langle u, Lv \rangle =$$

$$= \int_0^\ell \left[\left(\frac{d}{dx}(pu') + qu \right) \bar{v} - u \left(\frac{d}{dx}(p\bar{v}') + q\bar{v} \right) \right] dx$$

$$= \int_0^\ell \left[\frac{d}{dx}(pu')\bar{v} - u \frac{d}{dx}(p\bar{v}') \right] dx$$

$$= \left[pu'\bar{v} - up\bar{v}' \right]_0^\ell - \int_0^\ell \left((pu')\bar{v}' - u'p\bar{v}' \right) dx$$

(שני הפתרונות)

$$\langle Lu, v \rangle - \langle u, Lv \rangle = p(\ell)\left[u'\bar{v} - \bar{v}u \right]_{x=\ell} - p(0)\left[u'\bar{v} - \bar{v}u \right]_{x=0}$$

$$-\left[u'\bar{v} - \bar{v}u \right]_{x=\ell} = \begin{vmatrix} u & \bar{v} \\ u' & \bar{v}' \end{vmatrix}_{x=\ell} = W$$

$$\alpha_2 u'(\ell) + \beta_2 u(\ell) = 0$$

$$\alpha_2 \bar{v}'(\ell) + \beta_2 \bar{v}(\ell) = 0$$

משהו שקר: $(\alpha_2, \beta_2) \neq 0$

$$\Leftarrow W(\ell) = 0$$

מכיוון שאנו יודעים, שהוא קיים כי $x = 0 \Leftarrow W(0) = 0$

הגדרה: u, v תלויים לינארית אם אחד הפתרונות הוא מכפלה של השני בקבוע.

משפט: $0 = W$ אם"ם הפתרונות תלויים לינארית.

$$L_1 u = (p(x)u')' + q(x)u + a(x)u'$$

где $p \in C^1$, $q, a \in C$

$a(x) \equiv 0 \Leftrightarrow$ задача $\begin{cases} L_1 u = 0 \\ \partial u = 0 \end{cases}$ самосопряжена

$\langle L_1 u, v \rangle = \langle u, L_1 v \rangle$

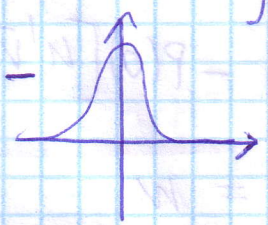
$L_1 u = Lu + au$

$\forall u, v \in M$

$$\langle L_1 u, v \rangle - \langle u, L_1 v \rangle = \int_0^l \left[a(x)u'\bar{v} - a(x)u\bar{v}' \right] dx$$

$$\forall u, v \in M \Rightarrow \int a(x)\left[u'\bar{v} - u\bar{v}'\right] dx = 0$$

v –

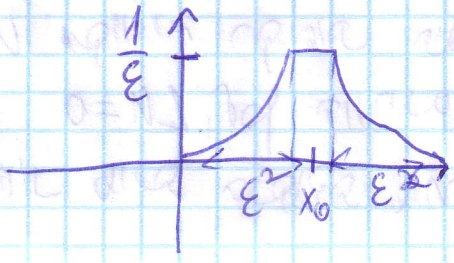


где u, v – любые

$$u'v - uv' = \begin{cases} 0 & v(x) = 0 \\ \left(\frac{u}{v}\right)' v^2 v \neq 0 \end{cases}$$

$\frac{u}{v} = x + l \Rightarrow \left(\frac{u}{v}\right) = 1$

v^2 –



בעיית שטורם ליוביל

$$\begin{cases} (p(x)u')' + q(x)u + \lambda w(x)u = 0 \\ \alpha_1 u'(0) + \beta_1 u(0) = 0 \\ \alpha_2 u'(l) + \beta_2 u(l) = 0 \end{cases}$$

$p > 0$, $p \in C^1$, $q, w \in C$, $w > 0$

$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \neq (0,0)$

$$\begin{cases} \mathcal{L}u + \lambda w u = 0 \\ \mathcal{D}u = 0 \end{cases}$$

הגדרה: ① λ נקרא ע"ע אם קיים $u \neq 0$ כך ש- u פתרון לבעיה.
u נקרא פ"ע השייכת ל- λ.

$u : [0,l] \to \mathbb{C}$ פונקציה רציפה ו- $\lambda \in \mathbb{C}$ נקראים ע"ע ופ"ע של הבעיה.
$u \in C^2$.

② נגדיר $\mathcal{L} : M \to C[0,l]$, $M = \{ u \in C^2[0,l] \mid \mathcal{D}u = 0 \}$

$C[0,l]$ — פונקציות רציפות.

נגדיר מכפלה פנימית: $\langle f, g \rangle = \int_0^l f(x)\overline{g}(x)dx$

טענה: (I) כל ע"ע שמתאים לו רק פ"ע אחת (עד כדי קבוע).
כל הע"ע של בעיה זו הם ממשיים.
כל הפ"ע השייכות לע"ע שונים הן אורתוגונליות זו לזו ביחס למשקל w:

$$0 = \langle u_1, u_2 \rangle = \int_0^l w(x) u_1(x) \overline{u_2}(x) dx$$

(II) קיים אינסוף ע"ע. אפשר לסדרם:
$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ וכל ע"ע חוזר על עצמו מספר סופי של פעמים.
$\{u_n\}$ — סדרת הפ"ע (סדרה אורתוגונלית).

$\forall h \in M: \forall i \ \langle h, u_{\lambda_i} \rangle = 0 \quad$ III

$\Rightarrow h = 0$

$L_2[0,l]$ הוא מרחב שבו $\{l_2\}$ מקיים את התנאי:

$$f \in L^2 \iff \int_0^l |f|^2 dx < \infty$$

(כאשר האינטגרל הוא במובן לבג)

מרחב הילברט L_2 הוא מרחב שבו כל סדרת קושי מתכנסת לl_2 כלשהו.

$\{u_i\}$ – מערכת שלמה ב-$L_2[0,l]$ שבה כל איבר ב-L_2 ניתן לפיתוח:

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_{\lambda_i}, \quad \alpha_i = \langle w u_{\lambda_i}, u_{\lambda_i} \rangle$$

ב-L_2 מתקיים שוויון פרסבל (Fourier אלג)

$$\int \left| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \right|^2 dx \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

דוגמה: $\hat{L}u = a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u$

$a, b, c \in C$

$$\begin{cases} \hat{L}u = f \\ \theta u = 0 \end{cases}$$

תנאי שפה:

$\forall u, v \in M \quad \left(\iff \theta u = \theta v = 0 \right)$

$u, v \in C^2$

$\langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle$

$$L|_{x=x_0} u = \frac{d}{dx}\Big|_{x=x_0} \left(p(x)\frac{d}{dx}\left[\int_{x_0-\varepsilon}^{x} f(s)\,g_+(x,s)\,ds + \int_{x}^{x_0+\varepsilon} f(s)\,g_-(x,s)\,ds\right]\right)$$

$$+O(\varepsilon)$$

נגזרת של אינטגרל:

$$L|_{x=x_0} u = \frac{d}{dx}\Big|_{x=x_0} \left(p(x)\left[\int_{x_0-\varepsilon}^{x} f(s)g_+'(x,s)\,ds + \int_{x}^{x_0+\varepsilon} f(s)g_-'(x,s)\,ds\right]\right) +$$

$$+p(x)\left[f(x)g_+(x,x) - f(x)g_-(x,x)\right]$$

הפונקציות g רציפות ושוות,

$$L|_{x=x_0} u = \left[p'(x_0)\cdot \underbrace{O(\varepsilon)}_{\text{שואף לאפס כאשר } \varepsilon \to 0}\Big|_{x=x_0}\right] + p(x)\left[f(x)g_+'(x,x) - f(x)g_-'(x,x)\right]\Big|_{x=x_0}$$

כי הפונקציות רציפות וחלקות
(ניתן להוכיח זאת עם ε).

$$+p(x)\left[\int_{x_0-\varepsilon}^{x} f(s)\,g_+''(x,s)\,ds - \int_{x}^{x_0+\varepsilon} f(s)\,g_-''(x,s)\,ds\right] + O(\varepsilon)$$

$$O(\varepsilon)$$

מקפיצה ברציפות:

$$p(x)\left[g_+'(x,x) - g_-'(x,x)\right] = 1$$

$$\Rightarrow \quad L|_{x=x_0} u = f(x_0) + O(\varepsilon)$$

$Lu = f$ כאשר $\varepsilon \to 0$ כאשר $\varepsilon > 0$ קיים ~~פתרון~~

② תנאי שפה הומוגניים:

$$\alpha_1 u'(0) + \beta_1 u(0) =$$

$$= \alpha_1 \frac{d}{dx}\Big|_{x=0} \int_0^{\ell} f(s)\,g(x,s)\,ds + \beta_1 \int_0^{\ell} f(s)\,g(0,s)\,ds$$

$g_-(0,s)$

שאר תנאי $1 > \varepsilon \geq x \geq 0$

$$= \alpha_1 \frac{d}{dx}\Big|_{x=0} \int_0^{\varepsilon} f(s)\, g(x,s)\, ds + \alpha_1 \frac{d}{dx}\Big|_{x=0} \int_{\varepsilon}^{\ell} f(s)\, g_-(x,s)\, ds$$

$$+ \beta_1 \int_0^{\varepsilon} f(s)\, g_-(0,s)\, ds + \beta_1 \int_{\varepsilon}^{\ell} f(s)\, g_-(0,s)\, ds =$$

$\int_0^{\varepsilon} f(s)\, g_-(0,s)\, ds = O(\varepsilon)$

g רציפה.

$$0 = \alpha_1 \frac{d}{dx}\Big|_{x=0} \int_{\varepsilon}^{\ell} f(s)\, g_-(x,s)\, ds + \beta_1 \int_{\varepsilon}^{\ell} f(s)\, g_-(0,s)\, ds$$

$$= \alpha_1 \frac{d}{dx}\Big|_{x=0} \left[\int_0^{x} f(s)\, g_+(x,s)\, ds + \int_x^{\varepsilon} f(s)\, g_-(x,s)\, ds \right] + O(\varepsilon)$$

$$= \alpha_1 \left[f(0)\, g_+(0,0) - f(0)\, g_-(0,0) \right] +$$

f רציפה

$$+ \alpha_1 \left[\int_0^{0} f(s)\, g_+'(0,s)\, ds + \int_0^{\varepsilon} f(s)\, g_-'(0,s)\, ds \right]$$

$g_+'(0,s)$ רציפה, $\int_0^{0} = 0$; $\int_0^{\varepsilon} = O(\varepsilon)$

$$+ O(\varepsilon)$$

$\varepsilon \to 0$ $\quad \alpha_1 u'(0) + \beta_1 u(0) = O(\varepsilon)$ נשאיר את ε

$\alpha_1 u'(0) + \beta_1 u(0) = 0 \iff$ נשאיר את ε שואף ל-0 בצד שמאל

u פתרון של בעיית שטורם-ליוביל הומוגנית

$$\Delta g(x_0,s) = \Delta g(x_0,s_0) + o(1)$$

$|s-s_0| \le \frac{\varepsilon}{2}$ ...

$\varepsilon \to 0$ ...

(...)

$$I_\varepsilon(x_0) = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\varepsilon\,\Delta g(x_0,s_0) + \frac{1}{\varepsilon}\cdot\varepsilon\cdot o(1) + O(\varepsilon) =$$

$$= \Delta g(x_0,s_0) + o(1)$$

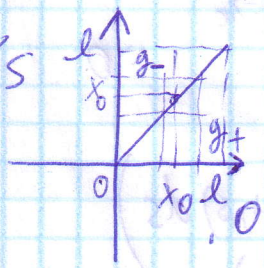
... $I_\varepsilon(x_0)=0 \Rightarrow \Delta g(x_0,s_0)=0$, $\varepsilon\to 0$ **...**

... (...) **...**

$$g(x,s) = \begin{cases} g_+(x,s), & x \ge s \\ g_-(x,s), & x \le s \end{cases} \qquad g_+, g_- \in C^{\frac{2}{1}}([0,\ell]\times[0,\ell])$$

... $g_+(s,s) = g_-(s,s)$

$\forall s$



$$g'_+(s,s) - g'_-(s,s) = \frac{1}{p(s)}$$ ... x ...

$$0 = \alpha_1 g'_-(0,s) + \beta_1 g_-(0,s) = \alpha_2 g'_+(\ell,s) + \beta_2 g_+(\ell,s)$$

$$\begin{cases} Lu = f \\ Bu = 0 \end{cases}$$ **...** $u = \int_0^\ell f(s)\,g(x,s)\,ds$ **...** δ_3

...

$$\frac{d}{dx}\int_a^b F(x,y)\,dy = \int_a^b F'_x(x,y)\,dy$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x F(y)\,dy = F(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{x}^{b} F(y)\,dy = -F(x)$$

Leibniz integral rule

$$\frac{d}{dx}\int_{A(x)}^{B(x)} F(x,y)\,dy = F(x,B(x))B'(x) - F(x,A(x))A'(x) + \int_{A(x)}^{B(x)} F'_x(x,y)\,dy$$

Let $Lu = f$ be given ①

$0 < \varepsilon << 1$, x_0 fixed

$$(Lu)(x_0) = L|_{x=x_0} \int_0^{\ell} f(s)g(x,s)\,ds =$$

$$= L_{x=x_0}\left(\int_{|x_0-s|\le\varepsilon} + \int_{|x_0-s|\ge\varepsilon} \right)$$

$$= L_{x=x_0} \int_{|x_0-s|\le\varepsilon} + \int_{|x_0-s|\ge\varepsilon} f(s)\, L|_{x=x_0} g(x,s)\,ds$$

$= 0$

$$= \frac{d}{dx}\Big|_{x=x_0}\left(P(x)\frac{d}{dx}\int_{|x_0-s|\le\varepsilon} f(s)g(x,s)\,ds \right)$$

$\to 0$ as $\varepsilon \to 0$

$$+ g(x_0)\int_{|x_0-s|\le\varepsilon} f(s)g(x,s)\,ds = O(\varepsilon)$$

$= O(\varepsilon)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin s & -\cos s \\ \cos s & -\sin s \end{vmatrix} = 1$$

לפי כלל קרמר:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\cos s \\ -1 & \sin s \end{vmatrix}}{\Delta} = -\cos(s)$$

$$C_2 = -\sin(s)$$

$$g(x,s) = \begin{cases} -\cos(s)\sin(x) & x \le s \\ -\sin(s)\cos(x) & s \le x \end{cases}$$

נפתור את המשוואה האינטגרלית (*):
נמצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $f(x)=1$

$$u'' + u = 1 \quad \Rightarrow \quad u = 1 + C_1\cos(x) + C_2\sin(x)$$

$$u(0),\ u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow u = 1 - \cos(x) - \sin(x)$$

ונציב באינטגרל:

$$u(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(s)\,g(x,s)\,ds =$$

$$= \int_0^x f(s)\cdot(-\sin(s)\cos(x)\,ds - \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(s)\cos(s)\sin(x)\,ds$$

$$= \dots$$

↑

אלמן כפתר את שקדם.

$\forall f \in C,\ u(x) = \int_0^l f(s) g(x,s)\,ds$ — מה ניתן להגיד?

מסקנה חשובה:

g_1, g_2 — אם שתי גרעינים מקיימים זהות:

אזי הגרעינים שווים כמעט בכל מקום.

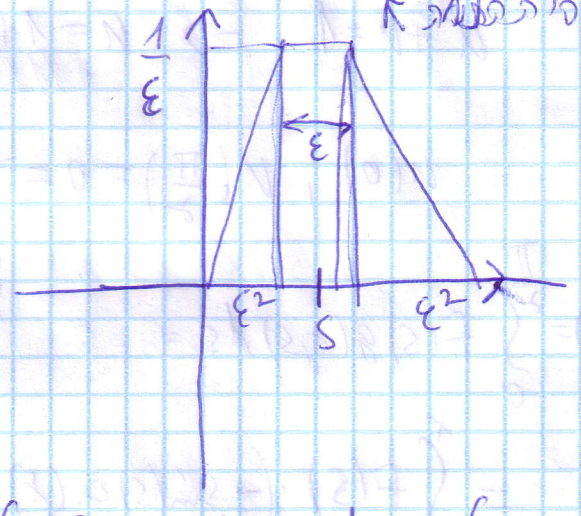
הוכחה: נניח בשלילה שקיים $f \in C$ כך ש: $\int_0^l f(s) g_1(x,s)\,ds = u(x) = \int_0^l f(s) g_2(x,s)\,ds$

$\Delta g = g_1 - g_2$ $\quad \int_0^l f(s) \Delta g(x,s)\,ds = 0 \quad \forall x \in [0,l]$

נסיר את ה-0 ונקבל $\Delta g(x,s) \equiv 0$.

x_0, s_0 נקודות שבהן $\Delta g(x_0,s) \neq 0$

$$I_\varepsilon(x_0) = \int_0^l f_\varepsilon(s) \Delta g(x_0,s)\,ds$$



$f(s)$

$$= \int_{|s-s_0| \le \frac{\varepsilon}{2}} f_\varepsilon \Delta g(x_0,s)\,ds + \int_{|s-s_0| \ge \frac{\varepsilon}{2}} (\quad)\,ds \le$$

$\max \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon^2 \cdot 2$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \int_{|s-s_0| \le \frac{\varepsilon}{2}} \Delta g\,ds + O(\varepsilon)$$

10/06/08

תרגיל - משפט הקיום והיחידות

בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$(p(x)u')' + q(x)u = f(x)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 u'(0) + \beta_1 u(0) = 0 \\ \alpha_2 u'(\ell) + \beta_2 u(\ell) = 0 \end{cases}$$

$p > 0,\ p \in C^1,\ q, f \in C$

$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \neq (0,0)$

$$\begin{cases} Lu = f \\ Du = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ Du = 0 \end{cases} \iff u \equiv 0$$

הוכחה רגולרית:

קל מדי!

בעיית גרין: על מנת לפתור את המשוואה הנתונה

$f \in C^1$ עבור $u(x) = \int_0^\ell f(s) g(x,s)\, ds$ (*) נבנה

מדוע?

הגדרה: ① $g \in C^2$ פרט ל $x \neq s$ (עבור כל x, s)

$Lg(x,s) = 0$

$g \in C([0,\ell] \times [0,\ell])$.

② $g'_x(s+0, s) - g'_x(s-0, s) = \frac{1}{p(s)}$,

③ $Dg = 0 \iff s \neq 0, \ell$.

משפט: בעיה רגולרית $\iff$ קיימת פונקציה יחידה את המקיימת את התכונות. (**הוכחה:**)

$$g(x,s) = \begin{cases} g_+(x,s) & x \geq s \\ g_-(x,s) & x \leq s \end{cases}$$

$g_+, g_- \in C^2$ כך ש $[0,\ell] \times [0,\ell]$, $g(x,s) = g(s,x)$.

משפט 2: אז יש פונקציה יחידה שמקיימת את הטענה

האינטגרלית (*) (בעיה רגולרית) $\iff$ האינטגרלית.

(*) נוסחת גרין עבור בעיית שטורם ליוביל מסדר 2:

(עבור $f \in C$ כלשהי) פתרון יחיד $u(x)$.

דוגמה: פתרון המשוואה הבאה:

$$\begin{cases} u'' + u = f(x) \\ u(0) = 0;\ u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

נפתור משוואה הומוגנית:

$$u'' + u = 0$$

$$\Rightarrow u = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

נבדוק מתי $D u = 0 \Rightarrow u'' = 0$. $u \equiv 0$.

$$u(0) = 0 = c_1$$
$$u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = c_2 \Rightarrow u \equiv 0$$

כלומר אין פתרון הומוגני.

$$u = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \sin(x)$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \varphi_2 = \cos(x)$$

$$g(x,s) = \begin{cases} c_1(s)\sin(x) & 0 \le x \le s \\ c_2(s)\cos(x) & \frac{\pi}{2} \ge x \ge s \end{cases}$$

נבדוק תנאי גרין:

$$c_1(s)\sin(s) = c_2(s)\cos(s)$$

$p(x) \equiv 1$ תנאי נוסף: $\frac{1}{1} = 1$

$$c_2(s)\cos'(s) - c_2(s)\sin'(s) = 1$$

$$-c_2(s)\sin(s) - c_1(s)\cos(s) = 1$$

נפתור:

$$\begin{cases} c_1 \sin s - c_2 \cos(s) = 0 \\ c_1 \cos s + c_2 \sin(s) = -1 \end{cases}$$

$\varphi_2 = \kappa\varphi_1 \Leftarrow W \equiv 0 \Leftarrow W = 0$ в точке

$\varphi_1 = \kappa\varphi_2$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\varphi_1 = 0 \\ \beta\varphi_1 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha\varphi_2 = 0 \\ \beta\varphi_2 = 0 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ φ_1 и φ_2 – решения (ненулевые) одного уравнения

$$Lu = 0 \Leftrightarrow u'' + \frac{p'}{p}u' + \frac{q}{p}u = 0$$

Метод Лиувилля-Остроградского:

$$W' = -\frac{p'(x)}{p(x)}W, \quad \frac{W'}{W} = -\frac{p'}{p}$$

$$\ln|W| = \ln\left(\frac{1}{p}\right) + A$$

$$W = \pm\frac{1}{p}e^A, \quad B = \pm e^A$$

$$pW = B = \text{const}$$

Для наших целей:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\varphi_2(s) \\ \frac{1}{p(s)} & \varphi_2'(s) \end{vmatrix}}{W(s)}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & 0 \\ -\varphi_1'(s) & \frac{1}{p(s)} \end{vmatrix}}{W(s)}$$

$$c_1 = \frac{+\varphi_2(s)}{p(s)W(s)}, \quad c_2 = \frac{\varphi_1(s)}{p(s)W(s)}$$

$$c_1 = \frac{\varphi_2(s)}{B}, \quad c_2 = \frac{\varphi_1(s)}{B}$$

$$g(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{B}\varphi_2(s)\varphi_1(x) & x \le s \\ \frac{1}{B}\varphi_1(s)\varphi_2(x) & x > s \end{cases}$$

Доказано

Видно g, $g(x,s) = g(s,x)$

פונקציית גרין (Green)

① $g(x,s) \in C[[0,\ell]\times[0,\ell]]$ רציפה, $x \neq s$ לכל.

$\mathcal{L}g(x,s)=0$ מתקיים לכל x שונה מ-s.

② קפיצה בנגזרת:
$$g'(s+0,s)-g'(s-0,s)=\frac{1}{p(s)}$$

③ תנאי שפה:



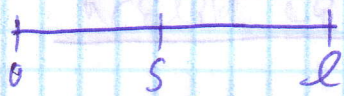
$g=0$ כאשר $x=s$.

משפט 1: אם קיימת פונקציית גרין יחידה.

משפט 2: אם קיימת פונקציית גרין $g(x,s)$ אזי הפתרון של המשוואה $\mathcal{L}u=f$ עם תנאי שפה $u=0$ ניתן ע"י:
$$u(x)=\int_0^\ell f(s)g(x,s)ds \quad (*)$$

משפט 3: פונקציית גרין יחידה אם קיים פתרון יחיד למשוואה $\mathcal{L}u=f$ עם תנאי שפה $u=0$.

הוכחת משפט 1:



$x\in[0,s)$, $x\in(s,\ell]$. $\mathcal{L}g=0$

רעיון ההוכחה: נמצא $\psi_1(x)$ כך ש-$\mathcal{L}u=0$ ומקיים את תנאי השפה ψ_1 כך ש-$\psi_1(0)=\alpha_1, \psi_1'(0)=-\beta_1$ כאשר $\alpha_1\psi_1'(0)+\beta_1\psi_1(0)=0$ ונניח בשלילה שקיים $\tilde{\psi}_1$ שגם מקיים את תנאי השפה:

$$\begin{cases}\alpha_1\psi_1'(0)+\beta_1\psi_1(0)=0 \\ \alpha_1\tilde{\psi}_1'(0)+\beta_1\tilde{\psi}_1(0)=0\end{cases}$$

(כך ש-$\mathcal{L}u=0$)

$\lambda = 0$ не собственное значение $\Leftrightarrow (\alpha_1, \beta_1) \neq (0,0)$ по опр.

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(0) & \tilde{\varphi}_1(0) \\ \varphi_1'(0) & \tilde{\varphi}_1'(0) \end{vmatrix} = 0$$

$$\| \\ W(\varphi_1, \tilde{\varphi}_1)$$

Функция $g(x,s)$ для построения $\varphi_1, \tilde{\varphi}_1 \Leftrightarrow$

$g(x,s) = c_1 \varphi_1(x)$ при $x \leq s$ — линейно по x

$g(x,s) = c_2 \varphi_2(x)$ при $s \leq x \leq \ell$ — тоже линейно по x

$\varphi_2(\ell) = \alpha_2$, $\varphi_2'(\ell) = -\beta_2$, $\Leftrightarrow \varphi_2 = 0$ решение

$c_1, c_2 \to$ найти

$$g(x,s) = \begin{cases} c_1(s)\varphi_1(x) & x \leq s \\ c_2(s)\varphi_2(x) & x > s \end{cases} \to \text{линейно по } x$$

$c_1(s)\varphi_1(s) - c_2(s)\varphi_2(s) = 0$ — непрерывность

$c_2(s)\varphi_2'(s+0) - c_1(s)\varphi_1'(s-0) = -\frac{1}{p(s)}$ — скачок производной

$$\begin{cases} c_1(s)\varphi_1(s) - c_2(s)\varphi_2(s) = 0 \\ -c_1(s)\varphi_1'(s) + c_2(s)\varphi_2'(s) = \frac{1}{p(s)} \end{cases}$$

Определитель по Крамеру, c_1, c_2 мы уже нашли

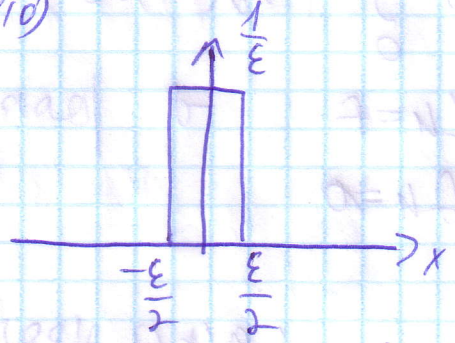
$$\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & -\varphi_2(s) \\ -\varphi_1'(s) & \varphi_2'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) \\ \varphi_1'(s) & \varphi_2'(s) \end{vmatrix} = W(\varphi_1, \varphi_2)$$

$$\begin{cases} Lu = f \\ Qu = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (pu')' + qu = f \\ \alpha_1 u'(0) + \beta_1 u(0) = 0 \\ \alpha_2 u'(\ell) + \beta_2 u(\ell) = 0 \end{cases}$$

כדאי לזכור!!

$(\alpha_1, \beta_1) \neq (0,0) \neq (\alpha_2, \beta_2)$, $f, q \in C$, $p > 0$, $p \in C^1$

$\delta_\varepsilon(x) =$

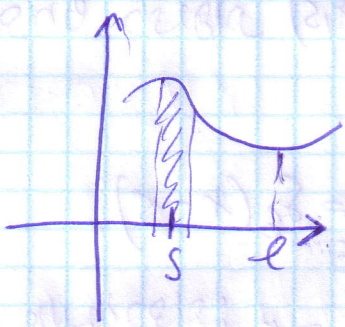


תזכורת:

δ – פונקציה

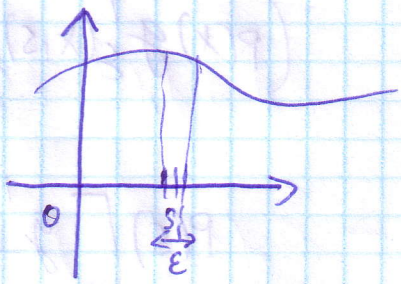
$$\bar{F}_\varepsilon(x) = \int_0^\ell F(s)\,\delta_\varepsilon(x-s)\,ds$$

$\bar{F}_\varepsilon(x) \to F(x)$ כאשר $\varepsilon \to 0$



$$\bar{F}_\varepsilon \approx \sum \bar{F}(s_i)\,\delta_\varepsilon(x-s_i)\,\varepsilon$$

$$\delta_\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \varepsilon = \Delta s_i \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$



$$\begin{cases} Lg_\varepsilon(x,s) = \delta_\varepsilon(x-s) \\ Qg_\varepsilon(x,s) = 0 \end{cases}$$

$$\sum_i \bar{F}(s_i)\,\delta_\varepsilon(x-s_i)\,\underbrace{\Delta s_i}_{\varepsilon} \to \bar{F}_\varepsilon(x) \to f$$

$g_\varepsilon \to g$ כאשר $\varepsilon \to 0$

$$\sum \overline{F(\xi_i)}\,\delta_\varepsilon(x-\xi_i)\,\Delta s_i \qquad \overset{F}{\downarrow}$$

$$\sum F(\xi_i)\,g_\varepsilon(x,\xi_i)\,\Delta s_i \to g(x,s) \quad \text{לכן}$$

$$u(x)=\int_0^\ell f(t)\,g(x,s)\,ds \quad \text{פתרון הבעיה!}$$

$$\begin{cases} Lu=f \\ Bu=0 \end{cases} \quad \text{-ו הבעיה המקורית}$$

$g(x,s)$ פונקציית גרין של הבעיה:

$$g(x,s)\in C^2 \quad , \quad Lg(x,s)=0 \quad (1)$$

$x\neq s$ בכל $x\neq s$ בכל

$g(x,s)$ רציפה בכל x,s ;$x\in$

$x\in[0,\ell]\wedge s\in[0,\ell]$.

$$(P(x)g_\varepsilon')'+q(x)g_\varepsilon=\delta_\varepsilon(x-s)$$

בסביבת הסינגולריות: $s-\frac{\varepsilon}{2}$ ל- $s+\frac{\varepsilon}{2}$ -ו

$$\left(P(x)g_\varepsilon'(x,s)\right)\Big|_{x=s-\frac{\varepsilon}{2}}^{x=s+\frac{\varepsilon}{2}}+O(\varepsilon)=1 \qquad \varepsilon\to 0$$

$$P(s)\left[g'(s+0,s)-g'(s-0,s)\right]=1$$

$$g'(s+0,s)-g'(s-0,s)=\frac{1}{P(s)} \quad (2) \to \text{תנאי קפיצה}$$

$$Lg_\varepsilon(x,s)=0 \quad (3) \quad \text{בכל } x\neq s$$

(g פתרון הבעיה בכל $x=s$).

$\varphi\Pi_1 \neq \Pi_2$. ראינו בשיעור הקודם

$\varphi\Pi_1 = \Pi_2$. אם ורק אם $\Leftrightarrow$

משפט: יהיו ψ_1, ψ_2 - פתרונות הבעיה ההומוגנית של $\mathcal{L}u = 0$.

$(\psi_1(x), \psi_2(x) \in \mathbb{R}$). אזי

$$\det G_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1\psi_1'(0) + \beta_1\psi_1(0) & \alpha_1\psi_2'(0) + \beta_1\psi_2(0) \\ \alpha_2\psi_1'(\ell) + \beta_2\psi_1(\ell) & \alpha_2\psi_2'(\ell) + \beta_2\psi_2(\ell) \end{vmatrix} \neq 0$$

אם ורק אם $\Leftrightarrow$

הוכחה: $\mathcal{L}u = 0 \Leftrightarrow u = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$

נציב בתנאי השפה: $D(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = 0$

$$(D\psi_1, D\psi_2)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

G_2 — מטריצת גרם

$u = 0 \Leftrightarrow (c_1, c_2) = (0,0)$

משפט: $\det G_2 \neq 0 \Leftrightarrow$ לבעיה $u = 0$ יש פתרון יחיד.

דוגמה: נמצא את פתרון הבעיה

$$\begin{cases} u'' = -e^t \\ u'(0) - u(0) = 0 \\ u'(1) + 2u(1) = 0 \end{cases}$$

$u'' = 0 \Rightarrow u = c_1 x + c_2$

$u'(0) = c_1, \; u(0) = c_2$

$u'(1) = c_1, \; u(1) = c_1 + c_2$

מערכת שקול:

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 + 2(c_1 + c_2) = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ / הפתרון הוא 0, $\Leftrightarrow$ אם ורק אם

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1+2\alpha & \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha + 1 + 2\alpha = 2\alpha + 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha \neq -\frac{1}{2}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

$\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$u'' = e^x \Rightarrow u = e^x + C_1 x + C_2$$

$$\lambda^2 = 0$$

$$e^0 - e^0 + C_1 - C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2$$

$$e - \frac{1}{2}e + C_1 - \frac{1}{2}(C_1 + C_2) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}e = 0$$

$$\begin{cases} u'' + 4u = \sin(x) \\ u'(0) + u(0) = 0 \\ u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$u'' + 4u = 0$$

$$\Rightarrow u = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad u = C_2 \sin(2x)$$

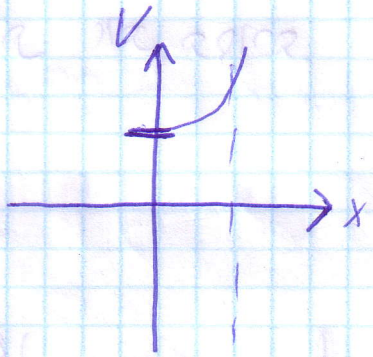
$$0 = u'(0) + u(0) = C_2 \cdot 2\cos(0) + C_2 \sin(0) = 2C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = 0$$

$\beta_1 \neq 0,\ \beta_2 = 0$ ①

$v'(l) = \frac{\gamma_2}{\alpha_2}$ — знак

$\begin{cases} v(0) = \frac{\gamma_1}{\beta_1} \\ v'(0) = 0 \end{cases}$ — скорость



$v = \frac{\gamma_1}{\beta_1} + \int_0^x \frac{\gamma_2}{\alpha_2} \frac{x}{l}\, dx$

Аналогично, $\beta_1 = 0,\ \beta_2 \neq 0$

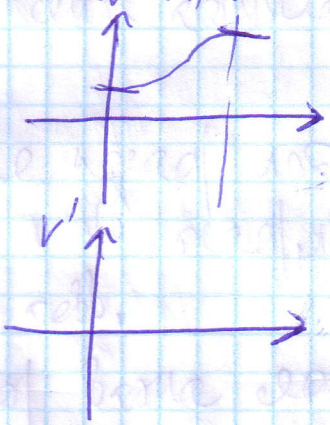
$v'(0) = v'(l) = 0$ — общее v $\beta_1, \beta_2 \neq 0$ ②

$v(0) = \frac{\gamma_1}{\beta_1}; \ v(l) = \frac{\gamma_2}{\beta_2}$

$v' = \mu(lx - x^2)$ и v от x

$v = \mu\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + v$

$v = v(0) = \frac{\gamma_1}{\beta_1}$



$v(l) = \frac{\gamma_2}{\beta_2} \Rightarrow \mu = \frac{6}{l^3}\left(\frac{\gamma_2}{\beta_2} - \frac{\gamma_1}{\beta_1}\right)$

Доказано

Теорема. Пусть $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи

$$Lu = (pu')' + qu$$

$$Du = \begin{pmatrix} \alpha_1 u'(0) + \beta_1 u(0) \\ \alpha_2 u'(l) + \beta_2 u(l) \end{pmatrix}$$

Тогда для любой правой части задача

$$\begin{cases} Lu = f \\ Du = 0 \end{cases}$$

$$L: C^2[0,l] \to C[0,l]$$

$$D: C^1[0,l] \to \mathbb{R}^2$$

имеет единственное решение u.

Доказательство: Рассмотрим задачу (*)

$$\begin{cases} Lu = F \\ Du = 0 \end{cases}$$

Достаточно доказать, что $u \equiv 0$ — единственное решение задачи

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ Du = 0 \end{cases}$$

Замечание: $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $Ax = f$ — система из $\mathbb{R}^n$ уравнений

Известно, что если однородная система $Ax = 0$ имеет только нулевое решение $x = 0$, то неоднородная система $Ax = f$ имеет единственное решение при любой правой части.

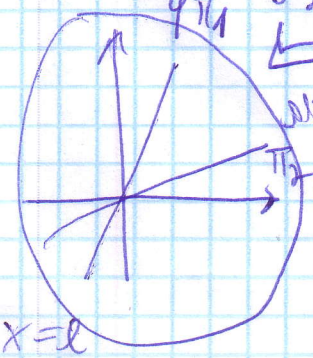
Итак, нам нужно доказать, что

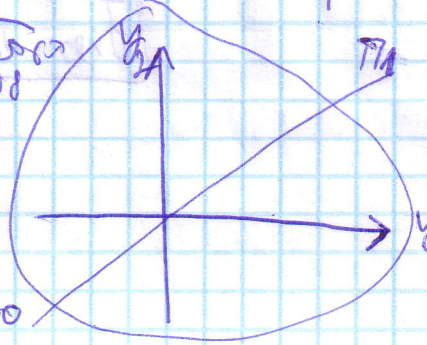
$$\begin{cases} Lu = 0 \\ Du = 0 \end{cases}$$

имеет только нулевое решение.

Метод доказательства: Метод модельной задачи 2:

$$\begin{cases} y_1 = u, \\ y_2 = u', \end{cases} \quad \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\frac{1}{p}(qy_1 + p'y_2) \end{cases}$$





π_1: $\alpha_1 y_2 + \beta_1 y_1 = 0$

π_2: $\alpha_2 y_2 + \beta_2 y_1 = 0$

נמשיך עם בעיה כללית יותר:

<u>בעיה:</u> $u(x,t)=\sum_n a_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) e^{-\alpha^2\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t}$

<u>מסקנה:</u> $f(x)=\sum_n a_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$

אם $f(x)$ פונקציה:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

$$\left(a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)f(x)\,dx\right)$$

<u>בעיה:</u> מצא $u(x,t)$ שפותרת.

<u>בעיה של שני תנאים</u>

$$(*)\begin{cases} u''+a(x)u'+b(x)u=f(x) \\ \alpha_1 u'(0)+\beta_1 u(0)=\gamma_1 \\ \alpha_2 u'(\ell)+\beta_2 u(\ell)=\gamma_2 \end{cases}$$

$a,b,f\in C$, $(\alpha_1,\beta_1)\neq(0,0)$

$(\alpha_2,\beta_2)\neq(0,0)$

<u>הערה:</u> $\gamma_1=\gamma_2=0 \Rightarrow$ נעבור לבעיה הומוגנית.

$f(x)=0=\gamma_2=\gamma_1 \Rightarrow$ הפתרון הטריוויאלי.

<u>נעבור לבעיה מהצורה</u> הבאה $0<x<\ell$ עבור פונקציות

מספיק חלקות בקטע.

<u>דוגמה:</u> $u(\ell)=u(0)$ הפתרון הטריוויאלי הוא גם פתרון.

$u'(\ell)=u'(0)$ (פתרון שבקטע זה מתאפס ב ℓ ו 0

גם מקיים תנאי השפה הומוגנית).

<u>(*) בעיה של צורה עצמית:</u>

$$\begin{cases} \left(p(x)u'\right)'+q(x)u=f(x) & p\in C^1 \\ \alpha_1 u'(0)+\beta_1 u(0)=0 & q,f\in C \\ \alpha_2 u'(\ell)+\beta_2 u(\ell)=0 & (\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2)\neq(0,0) \end{cases}$$

$(pu')' = pu'' + p'u'$

$p(x) > 0$ — можно поделить обе

$$p(x)u'' + pau' + pbu = pf = \tilde{f}$$

q

$(pa)' = p(x)$ — не об

$pa = p'(x)$ $\quad \frac{p'}{p} = a(x)$

$$\ln p = \int_0^x a(s)\,ds + C$$

C — любое число, $p > 0$

$$p = e^{\int_0^x a(s)\,ds} > 0$$

$p \in C^1$ — по усл.

γ_2, γ_1 — по усл. ②

$$\alpha_1 u'(0) + \beta_1 u(0) = \gamma_1 \qquad (pu')' + qu = f$$

$$\alpha_2 u'(\ell) + \beta_2 u(\ell) = \gamma_2$$

$v(x)$ — любая

$$\begin{cases} \alpha_1 v'(0) + \beta_1 v(0) = \gamma_1 \\ \alpha_2 v'(\ell) + \beta_2 v(\ell) = \gamma_2 \end{cases}$$

Решение: $\tilde{u} = u - v(x)$

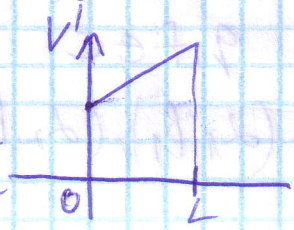
$$(p\tilde{u}')' + q\tilde{u} = f(x) - (pv')' - qv = \tilde{f}$$

$$\alpha_1 \tilde{u}'(0) + \beta_1 \tilde{u}(0) = 0$$

$$\alpha_2 \tilde{u}'(\ell) + \beta_2 \tilde{u}(\ell) = 0$$

$v'(0) = \frac{\gamma_1}{\alpha_1}$

$v'(\ell) = \frac{\gamma_2}{\alpha_2}$



$\beta_1 = \beta_2 = 0$ ②'

$$v' = \frac{\gamma_1}{\alpha_1} + \left(\frac{\gamma_2}{\alpha_2} - \frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right)\frac{x}{\ell} \qquad v = \int_0^x v'(x)\,dx$$

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(t)T'(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$$

↑ ↓ $\lambda = const \in \mathbb{R}$

משוואה שפיצית משוואה (!) משוואה רגילה

$x \to$ שפיצית. $t \to$ רגילה.

$$0 = u(0,t) = X(0)T(t)$$

$X(0) = 0$ אז $T(t) \neq 0$ אז $u \neq 0$ כי

$X(\ell) = 0 \iff 0 = u(\ell,t)$ -ו

$X'' + \lambda X = 0$ $\quad T' = -\lambda\alpha^2 T$

$\forall a \neq 0$ נ, $T(0) = 1$ נניח

$$\left.\begin{matrix} X(0) = 0 \\ X(\ell) = 0 \end{matrix}\right\}$$ שפיצית. יש

$$u = aX\frac{1}{a}T = XT$$

T נפתר אותה משוואה רגילה ליניארית.

$$\boxed{T(t) = e^{-\alpha^2\lambda T}}$$

$$\left.\begin{matrix} \gamma_1 X'(0) + \delta_1 X(0) = 0 \\ \gamma_2 X'(\ell) + \delta_2 X(0) = 0 \end{matrix}\right\}$$ יש פתרון ! X יחיד

$t = 0 \Rightarrow u = X(x)\cdot 1 \Rightarrow X(x) = f(x)$

$X = c_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$! $\lambda > 0$ (1)

$X(0) = 0 = c_1$

$X(\ell) = 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\ell = \pi\cdot k$ $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ n ∈ ℕ

$\sqrt{\lambda} \neq 0$

$$\lambda = \frac{\pi^2 n^2}{\ell^2}$$

собственные β-: $X = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$.

$\lambda = 0$ ②

$$X'' = 0$$

$$X = C_1 x + C_2$$

$$X(0) = X(l) = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0$$

$n = 0$ – также собственное β-, $C_1 = C_2$

$\lambda < 0$ ③

$$X = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$$

$$\mu = \sqrt{|\lambda|}$$

$$x = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$$

$$x = l \Rightarrow C_1 e^{\mu l} + C_2 e^{-\mu l} = 0$$

$n = 0$ также собственное β-, $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \neq 0$

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\mu l} & e^{-\mu l} \end{vmatrix} = e^{-\mu l} - e^{\mu l}$$

$e^{2\mu l} = 1$

n также собственное β-.

$$X = a \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$u = a \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-\alpha^2 \frac{n^2\pi^2}{l^2} t}$$

$u(x,0) = X(x) = f(x)$ – $f(x)$ можно

$$\cdot\ \pi \le d \le \dot{\pi}\left(1 - \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{x_6^2}\right)^{-\frac{1}{2}} v^2 > \frac{1}{4}$$

03/06/08

משוואת החום

שיטת הפרדת המשתנים (שיטת פורייה)

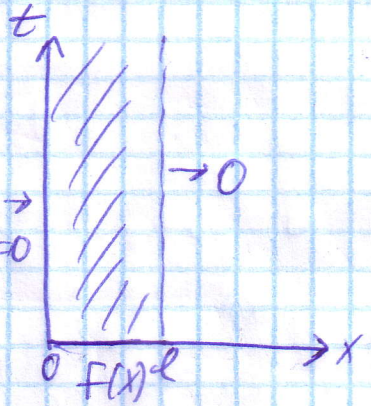
משוואת החום:

משוואת החום ממימד אחד:

משוואת החום ממימד אחד בשיטת Fourier



$0 \le x \le l \quad , \quad t \ge 0$



$u(x,t)$ – הפונקציה שמתארת את הטמפרטורה בנקודה x בזמן t.

תנאי ההתחלה:

$t=0; \; u(x,0)=F(x) \quad F(0)=F(l)=0$

תנאי השפה:

$u(0,t)=u(l,t)=0$

$$\alpha^2 u''_{xx} = u'_t$$

α^2 – thermal diffusitivity

$$\alpha^2 = \left[\frac{cm}{sec}\right] = \begin{matrix} 0.00144 & \text{ברזל} \\ 0.12 & \text{עופרת} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \gamma_1 u'_x(0,t) + \delta_1 u(0,t) = 0 \\ \gamma_2 u'_x(l,t) + \delta_2 u(l,t) = 0 \end{cases}$$

פתרון: $u'_x(0)=u'_x(l)=0$

כאשר אין מקור חום.

שיטת ההפרדה (שיטת פורייה)

נחפש פתרון לא טריוויאלי מהצורה:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad , \quad u \neq 0$$

Функции Бесселя

$$J_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$$

$\Gamma(n+1) = n! \quad n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt$$

$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)}$$

$Y_\nu = \lim \frac{0}{0} \quad \Leftarrow \nu \in \mathbb{Z}$ особое

$J_\nu, J_{-\nu} \sim Y_\nu$ (сильно!) $\quad \nu \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$

$\nu > 0$

$$Y_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n+1} J_{-n-\frac{1}{2}}(x)$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n, \quad Y_{-n} = (-1)^n Y_n$$

Birkhoff, Rota

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \nu\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{2x}\right) + \frac{O(1)}{x^{\frac{5}{2}}}, \quad x \to \infty$$ особое

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(\ldots) + \frac{O(1)}{x^{\frac{5}{2}}}$$

$$\begin{pmatrix} J_\nu \\ Y_\nu \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \begin{matrix} \cos(x + \text{const}(\nu) + O(1)) + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ \sin(\ldots) + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{matrix}$$

$J_\nu = a x^\nu (1 + O(x)) \quad : x \to 0$ особое

$Y_\nu = b x^{-\nu}(1 + O(x)) \Leftarrow \nu \notin \mathbb{Z}, \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$

$Y_\nu = a \ln x\, J_\nu + x^{-\nu}(1 + \ldots) \quad \nu \in \mathbb{Z}, \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$

$\sim \ln x\, x^\nu \quad x \to 0$ особое $\quad \nu > 0$

$Y_\nu = \ln x\, J_0 + 1 + o(x) \quad \nu = 0$ особое

$\sim \ln(x) x^0$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 Y_\pi(x) = \lim_{x\to\infty} x^3\left[\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x+\alpha(x)\right)+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^3 Y_\pi(x) = \lim_{x\to 0^+} x^3 \cdot x^{-\pi}\left(a+O(1)\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\, Y_{\frac{3}{2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\sin\left(x+\alpha(x)\right)+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{3}} Y_{\frac{3}{2}} = 0$$

משוואת בסל הדיפרנציאלית

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0$$

משוואת פיינמל מסוג: $z'' + q(x)z = 0$; **נקבל** $z = h(x)\cdot y$

נפתרון ה- $h(x)$ **נוכל** לקבוע ;

מהמשוואה הקודמת נקבל את $h(x)=\sqrt{x}$.

נוכל לפתרון המשוואה:

$$z'' + \left(1 + \frac{\frac{1}{4}-\nu^2}{x^2}\right)z = 0$$

כש $x\to\infty$ **נקבל** $z''+z=0$ **- פתרון** .

נמצא את המרחק בין שתי אפסים עוקבים: $x_1 - x_0 = d > 0$;

$$\pi \leftarrow \frac{\pi}{\left(1-\frac{\frac{1}{4}-\nu^2}{x_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \leq d \leq \frac{\pi}{\sqrt{1}} = \pi \qquad 0 \leq \nu^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$y=\varphi(\lambda,x)$$

$$\varphi(\lambda,x)=x^{\lambda}(c_0(\lambda)+c_1(\lambda)x+\dots)$$

$c_0=1$,נניח

$$L\varphi=c_0\left(P_0(\lambda)x^{\lambda}+x^{\lambda+2}\right)+c_1\left(P_0(\lambda+1)x^{\lambda+1}+x^{\lambda+3}\right)+\dots$$

$$=c_0P_0(\lambda)x^{\lambda}+c_1P_0(\lambda+1)x^{\lambda+1}+\left(c_2P_0(\lambda+2)+c_0\right)x^{\lambda+2}+$$
$$+\left(c_3P_0(\lambda+3)+c_1\right)x^{\lambda+3}+\dots$$

$\lambda_1,\lambda_2=\pm V$ פתרונות אחרים $P_0(\lambda)=0$

$x^{\lambda+1}$	$c_1P_0(\lambda+1)=0$
$x^{\lambda+2}$	$c_2P_0(\lambda+2)=-c_0$
$x^{\lambda+3}$	$c_3P_0(\lambda+3)=-c_1$
$x^{\lambda+4}$	$c_4P_0(\lambda+4)=-c_2$
⋮	⋮

~~$\lambda=\pm V$ ok~~

$c_1=0 \quad \Leftarrow P_0(\lambda+1)\neq 0$ ok

$$c_2=\frac{-c_0}{(\lambda+2)^2-V^2} \quad \Leftarrow P_0(\lambda+2)\neq 0$$

$c_3=0 \quad \Leftarrow P_0(\lambda+3)\neq 0$

$\forall n,\ c_{2n+1}=0 \iff \lambda_1=\lambda_2=0 \iff \nu=0$ ①

$$c_2(0)=\frac{-c_0}{2^2},\ \dots,\ c_{2n}(0)=(-1)^n\cdot\frac{c_0}{2^2\cdot4^2\cdot\dots\cdot(2n)^2}=$$

$$=(-1)^n\frac{c_0}{2^{2n}\cdot(n!)^2}$$

$$y_1(x)=c_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}\cdot(n!)^2}x^{2n}\right]$$

$$y_1(x)=J_0(x) \iff c_0=1$$

$-J_0$ הפתרון עם ערך עצמי מעל 0.

$-J_0(x)$ – פתרון עם ערך עצמי מעל 0. ב. (כפול הפתרון הראשון).

עם $\nu\geq 0$, J_ν מציג ערך עצמי יחיד עם פתרון יחיד).

$x\to 0$. (כי כפי שנראה הוא יש פתרון יחיד).

$y_0(x)$ – הפתרון עם ערך עצמי – הפתרון עם מעל 0.

עם הפתרון: $y_0(x)=J_0\cdot\ln x+|x|^0(d_1x+d_2x^2+\dots)$

$\lambda_1-\lambda_2=1$ $\quad\lambda_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$ $\quad\nu=\frac{1}{2}$ ②

$$J_{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot Y_{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\sin x=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+O(x^{\frac{1}{2}})$$

$$J_{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\cos(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+O(x^{-\frac{1}{2}})$$

$x\to 0^+$

$y_2=2\ln x\,y_{\lambda_1}+x^{\lambda_2}(1+\dots)$ עם הפתרון,

עם $\lambda_2=0$ יש פתרון יחיד.

$$\lambda^2+(2-\alpha-\beta-2)\lambda+\alpha\beta=0$$

$$\lambda_{1,2}=\alpha,\beta$$

$x=0,1,\infty$

$$y(t)=Ay_1+By_2 \qquad \underline{x\to\infty}$$

$$\alpha\neq\beta,\ \alpha-\beta\notin\mathbb{Z}$$

$$y_1=|t|^{\alpha}(1+c_1t+\dots)$$

$$y_2=|t|^{\beta}(1+d_1t+\dots)$$

$$0<|t|<1$$

$$y_1=|x|^{-\alpha}\left(1+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\dots\right) \qquad |x|>1$$

$$y_2=|x|^{-\beta}\left(1+\frac{d_1}{x}+\frac{d_2}{x^2}+\dots\right)$$

$$|x|^{-\alpha}=o(|x|^{-\beta}) \iff \alpha>\beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty} x^{\beta-\varepsilon}y=0, & \forall\varepsilon>0\\ \lim\limits_{x\to\infty} x^{\beta}y=b\end{cases}$$

$$L=x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{d}{dx}+(x^2-\nu^2)\frac{I}{x^2}$$

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0 \qquad \nu=\text{const}$$

$x=0$ — $x=\infty$ —

$$P_0(\lambda)=\lambda^2+(1-1)\lambda-\nu^2=0$$

$$\lambda^2-\nu^2=0 \qquad \lambda_{1,2}=\pm\nu$$

$$Lx^{\lambda}=\lambda(\lambda-1)x^{\lambda}+\lambda x^{\lambda}+(x^2-\nu^2)x^{\lambda}$$

$$=(\lambda^2-\nu^2)x^{\lambda}+x^{\lambda+2}=(=P_0(\lambda)x^{\lambda}+P_1(\lambda)x^{\lambda+1}+\dots)$$

$$P_0(\lambda)=\lambda^2-\nu^2,\ P_1(\lambda)=0,\ P_2(\lambda)=1$$

מקרה סינגולרי באינסוף

$$x^2y'' + xa_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad |x| \to \infty \ ?$$

נבדוק מה קורה סביב $t=0$, $t=\frac{1}{x}$; נעבור למשתנה חדש

$t=0$ סינגולרי $\iff$ (מקרה סינגולרי) $x=\infty$ מקרה סינגולרי

$$\frac{d}{dx}(\cdot) = \frac{d}{dt}(\,)\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{d}{dt}(\cdot) = -t^2\frac{d}{dt}(\,) \qquad (\text{סינגולרי})$$

$$\boxed{y' = -t^2\dot{y}}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(\,) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(\,)\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\frac{d}{dt}(\,)\right) =$$

$$= \frac{2}{x^3}\frac{d}{dt}(\,) - \frac{1}{x^2}\frac{d^2}{dt^2}(\,)\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{2}{x^3}\frac{d}{dt}(\cdot) + \frac{1}{x^4}\frac{d^2}{dt^2}(\cdot)$$

$$= 2t^3\frac{d}{dt}(\,) + t^4\frac{d^2}{dt^2}(\cdot)$$

$$y' = 2t^3\dot{y} + t^4\ddot{y}$$

$$x^2y'' + xa_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

$$\frac{1}{t^2}\left(t^4\ddot{y} + 2t^3\dot{y}\right) + \frac{1}{t}a\left(\frac{1}{t}\right)\left(-t^2\dot{y}\right) + b\left(\frac{1}{t}\right)y = 0$$

$$t^2\ddot{y} + t\left(2 - a\left(\frac{1}{t}\right)\right)\dot{y} + b\left(\frac{1}{t}\right)y = 0$$

(Bessel) : דוגמא חשובה מאוד

$x=\frac{1}{t}$ $\quad x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ כאשר $\nu \in \mathbb{R}$

$$t^2\ddot{y} + t(2-1)\dot{y} + \left(\frac{1}{t^2} - \nu^2\right)y = 0 \qquad t \to \infty$$

$$\searrow \infty$$

לכן $x=\infty$ הוא נקודה סינגולרית.

Euler

$x^2y'' + x\alpha y' + \beta y = 0 \Rightarrow$

$t^2\dot{y} + t(2-\alpha)\dot{y} + \beta y = 0$

где особые точки.

$x = 0, \infty$

Гаусс

$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

где особые точки.

$x = 0, 1, \infty$

① $x=0$:

$x^2y'' + x\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{1-x}y' - \frac{x\alpha\beta}{1-x}y = 0$

где особые точки:

$x = 0$

$\lambda^2 + (\gamma-1)\lambda + 0 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 0, 1-\gamma$

② $x=1$:

$(x-1)^2y'' - (x-1)\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x}y' + \frac{x-1}{x}\alpha\beta y = 0$

$x \to 1$ ↓ $\gamma-(\alpha+\beta+1)$ ↓ 0

$\lambda^2 + (\alpha+\beta+1-\gamma-1)\lambda = 0$

$\lambda_{1,2} = 0, \gamma-\alpha-\beta$

③ $x=\infty, \quad x=\frac{1}{t}$

$\frac{1}{t}\left(1-\frac{1}{t}\right)\left[t^4\ddot{y} + 2t^3\dot{y}\right] - t^2\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)\frac{1}{t}\right]\dot{y} - \alpha\beta y = 0$

$1-\frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$

$\frac{1}{t^2}(t-1)\left[t^4\ddot{y} + 2t^3\dot{y}\right] - t^2\left[\gamma t-(\alpha+\beta+1)\right]\dot{y} - \alpha\beta y = 0$

$-(\alpha+\beta+1)+2$

$t^2\ddot{y} + t\left[\frac{\alpha+\beta+1-\gamma t}{t-1} + 2\right]\dot{y} - \frac{\alpha\beta}{t-1}y = 0$ → $\alpha\beta$

$$\lim_{x\to\pi} -\frac{1}{4}\frac{\sin(x)(x-\pi)}{\cos(x)+1} \overset{H}{=} \lim -\frac{1}{4}\frac{2\left(-(x-\pi)(x-\pi)\right)}{(x-\pi)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\pi} -\frac{(x-\pi)^2}{\cos(x)+1}\cdot\frac{x-\pi+\sin^2(x)}{4x-4\pi} = \lim -2\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

משוואת אופיינית $P_0(\lambda)=0$

$$\lambda^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)\lambda-\frac{1}{2}=0$$

$$\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)(\lambda-1)=0,\quad \lambda_1=-\frac{1}{2},\ \lambda_2=1$$

$$y_1=|x-\pi|^{-\frac{1}{2}}\left(1+c_1(x-\pi)+c_2(x-\pi)^2+\dots\right)$$

$$y_2=|x-\pi|\left(1+d_1(x-\pi)+d_2(x-\pi)^2+\dots\right)$$

$$y=Ay_1+By_2$$

$$(x-\pi)^{\frac{2}{3}}y_2\to 0 \qquad A=0 \Leftarrow (x)$$

$$y=By_2$$

$$(x-\pi)^{\frac{1}{3}}y_2\to 0$$

(ז) y לכן הפתרון הוא מהצורה:

$$y=Ay_1+By_2 \qquad y_2\to 0,\ A>0$$

$$\lim_{x\to\pi^+}(x-\pi)^{\frac{2}{3}}\cdot y=0$$

$$\lim_{x\to\pi^+}(x-\pi)^{\frac{1}{3}}y=\infty$$

29/05/08

5 שבוע – 2 שעות

$$x^2y'' + xa_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad , n=2 \quad \text{! סדר}$$

$$a_1 = a_{10} + a_{11}x + \dots + \quad , \quad a_2 = a_{20} + a_{21}x + \dots$$

$$0 < |x| < r$$

Indicial equation ! משוואת האינדקסים

$$\lambda^2 + (a_{10} - 1)\lambda + a_{20} = 0$$

. λ_1, λ_2 ! שורשים

: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ①

. $0 < |x| < r$.

$$y_{\lambda_1} = |x|^{\lambda_1}(1 + c_1x + \dots)$$

$$y_{\lambda_2} = |x|^{\lambda_2}(1 + d_1x + \dots)$$

$$y_1 = y_{\lambda_1} = x^{\lambda_1}(1 + c_1x + c_2x^2 + \dots) \quad ! \lambda_1 = \lambda_2 \quad ②$$

$$y_2 = \ln|x| \cdot y_{\lambda_1} + |x|^{\lambda_1}(d_1x + \dots)$$

$$y_1 = y_{\lambda_1} = |x|^{\lambda_1}(1 + c_1x + \dots) \quad \lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{N} \ , \ \lambda_1 > \lambda_2 \quad ③$$

$$y_2 = \alpha \ln|x| \, y_{\lambda_1} + |x|^{\lambda_2}(1 + d_1x + \dots)$$

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C} \quad ④$$

$$y_1 = |x|^{\alpha}\{\cos(\beta \ln|x|)(1 + c_1x + \dots) - \sin(\beta \ln|x|) \cdot (d_1x + \dots)\}$$

$$y_2 = |x|^{\alpha}\{\cos(\beta \ln|x|)(d_1x + \dots) + \sin(\beta \ln|x|) \cdot (1 + c_1x + \dots)\}$$

$$y = Ay_1 + By_2 = K|x|^{\alpha}\{\cos(\beta \ln|x| + \varphi)[1 + c_1x + \dots] + O(1)\}$$

שימוש בנוסחאות, $x < 0$ ו- $x > 0$, על מנת לקבל פתרון ממשי.

. סוף שבוע

: $n=2$ – סדר

$$x^2y'' + x a_1(x) y' + a_2(x) y = 0$$

$$a_1 = a_{10} + a_{11}x + \dots$$

$$a_2 = a_{20} + a_{21}x + \dots$$

(רשמים לפעמים) a_1, a_2 הם טורים סדר r_0

. λ_1, λ_2 פתרונות $\lambda^2 + (a_{10}-1)\lambda + a_{20} = 0$ משוואת אינדקסים

. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$ ① : מקרה

. $y_{\lambda_1}(x) = |x|^{\lambda_1}(1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$

$y_{\lambda_2}(x) = |x|^{\lambda_2}(1 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots)$ ②

, $0 < |x| < r_0$

; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$ ③

$$y_1 = |x|^{\alpha} \{ \cos(\beta \ln|x|)[1 + c_1 x + \dots] - \sin(\beta \ln|x|)[d_1 x + \dots] \}$$

$$y_2 = |x|^{\alpha} \{ \cos(\beta \ln|x|)[d_1 x + \dots] + \sin(\beta \ln|x|)[1 + c_1 x + \dots] \}$$

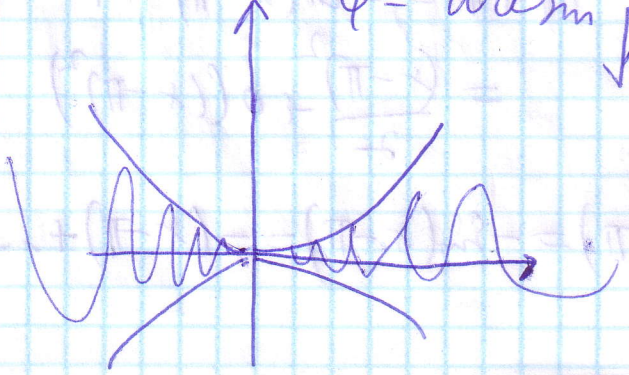
כאשר d_1, c_1 קיימים

$$y_1 = |x|^{\alpha}[\cos(\beta \ln|x|) + o(1)]$$

$$y_2 = |x|^{\alpha}[\sin(\beta \ln|x|) + o(1)]$$

$$y = Ay_1 + By_2 = \sqrt{A^2+B^2}\,|x|^{\alpha}(\sin(\beta \ln|x| + \varphi) + o(1))$$

$$\varphi = \arcsin \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$$



$y_1 = y_{\lambda_1} = |x|^{\lambda_1}(1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$; $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (3)

$y_2 = \ln|x|\, y_{\lambda_1} + |x|^{\lambda_1}(d_1 x + d_2 x^2 + \dots)$

$0 < |x| < r_0$

$\lambda_1 = \lambda_2 + k$, $k \in \mathbb{N}$ (4)

$y_1 = y_{\lambda_1} = |x|^{\lambda_1}(1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$

$y_2 = \alpha \ln|x|\, y_1(x) + |x|^{\lambda_2}(1 + d_1 x + \dots)$

$0 < |x| < r_0$

$\cos(x)$

$\left(\cos(x) - 1\right) y'' - \frac{1}{4} \sin x\, y' - \frac{x - \pi + \sin^2 x}{4x - 4\pi}\, y = 0$

$\lim_{x \to \pi + 0} (x - \pi)^{\frac{3}{2}} y$, $\lim_{x \to \pi + 0} (x - \pi)^{\frac{1}{3}} y$

$x = \pi$ (2)

(1)

$0 = (x - \pi)^2 y'' - (x - \pi) \frac{1}{4} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + 1} (x - \pi) y' - \frac{(x - \pi)^2}{\cos(x) + 1} \frac{x - \pi + \sin^2 x}{4x - 4\pi}\, y$

$\cos(x) + 1 = \cos(\pi + x - \pi) + 1 = -\cos(x - \pi) + 1 =$

$= \frac{(x - \pi)^2}{2} + o\left((x - \pi)^2\right)$

$\sin(x) = \sin(\pi + x - \pi) = -\sin(x - \pi) = -(x - \pi) + \dots$

: $n=2$ – סדר

$$x^2y'' + x a_1(x) y' + a_2(x) y = 0$$

$$a_1 = a_{10} + a_{11}x + \dots$$

$$a_2 = a_{20} + a_{21}x + \dots$$

(רגולרי) a_1, a_2 הם טורי חזקות סביב x_0

λ_1, λ_2 פתרונות $\lambda^2 + (a_{10}-1)\lambda + a_{20} = 0$ משוואת אינדקסים

$\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$ ① : מקרה

$$y_{\lambda_1}(x) = |x|^{\lambda_1}(1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$$

$$y_{\lambda_2}(x) = |x|^{\lambda_2}(1 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots)$$

$0 < |x| < r_0$

; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$ ②

$$y_1 = |x|^{\alpha}\{\cos(\beta \ln|x|)[1 + c_1 x + \dots] - \sin(\beta \ln|x|)[d_1 x + \dots]\}$$

$$y_2 = |x|^{\alpha}\{\cos(\beta \ln|x|)[d_1 x + \dots] + \sin(\beta \ln|x|)[1 + c_1 x + \dots]\}$$

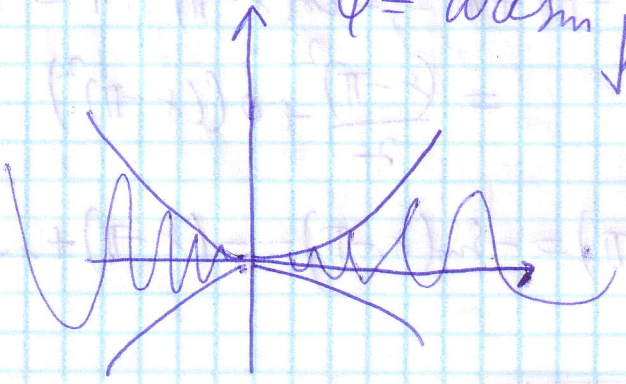
משוואה עם d_1, c_1 שונים

$$y_1 = |x|^{\alpha}[\cos(\beta \ln|x|) + o(1)]$$

$$y_2 = |x|^{\alpha}[\sin(\beta \ln|x|) + o(1)]$$

$$y = Ay_1 + By_2 = \sqrt{A^2+B^2}\,|x|^{\alpha}(\sin(\beta \ln|x| + \varphi) + o(1))$$

$$\varphi = \arcsin \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$$



$y_1 = y_{\lambda_1} = |x|^{\lambda_1}(1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$; $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (3)

$y_2 = \ln|x| y_{\lambda_1} + |x|^{\lambda_1}(d_1 x + d_2 x^2 + \dots)$

$0 < |x| < r_0$

$\lambda_1 = \lambda_2 + k$, $k \in \mathbb{N}$ (4)

$y_1 = y_{\lambda_1} = |x|^{\lambda_1}(1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$

$y_2 = \alpha \ln|x| y_{\lambda_1}(x) + |x|^{\lambda_2}(1 + d_1 x + \dots)$

$0 < |x| < r_0$

$\cos(x)$

$\left(\cos(x) - 1\right) y'' - \frac{1}{4}\sin x\, y' - \frac{x - \pi + \sin^2 x}{4x - 4\pi} y = 0$

$\lim_{x \to \pi + 0} (x-\pi)^{\frac{3}{2}} y$, $\lim_{x \to \pi + 0} (x-\pi)^{\frac{1}{3}} y$

$x = \pi$ (6)

(7)

$0 = (x-\pi)^2 y'' - (x-\pi)\frac{1}{4}\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1}(x-\pi) y' - \frac{(x-\pi)^2}{\cos(x)+1}\frac{x - \pi + \sin^2 x}{4x - 4\pi} y$

$\cos(x) + 1 = \cos(\pi + x - \pi) + 1 = -\cos(x - \pi) + 1 = 0$

$= \frac{(x-\pi)^2}{2} + o\left((x-\pi)^2\right)$

$\sin(x) = \sin(\pi + x - \pi) = -\sin(x - \pi) = -(x - \pi) + \dots$

$c_0 = (\lambda-\lambda_2)^{m_1}$ — ненулевой

$(\lambda-\lambda_2)^{m_1}$ — первые $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ — нулевые

$$P_0(\lambda+i)c_i = -\left(P_1(\lambda)c_0 + P_{i-1}(\lambda+1)c_i + \dots + P_1(\lambda+i-1)c_{i-1}\right)$$

$i = 1, \dots, k-1$

$\Rightarrow P_0(\lambda_2+i) \neq 0$

первые $c_i \Leftarrow$ первые $c_0, \dots, c_{i-1}$ — индукция

$$\varphi(\lambda,x) = x^\lambda\left((\lambda-\lambda_2)^{m_1} + c_1(\lambda)x + \dots + c_{k-1}(\lambda)x^{k-1}\right) + x^{\lambda+k}\left(c_k(\lambda) + c_{k+1}(\lambda)x + \dots\right)$$

$c_1, \dots, c_{k-1} = (\lambda-\lambda_2)^{m_1}(\dots)$

первые — $\varphi_m(\lambda_2, x)$ — база

$L\varphi = P_0(\lambda)\underbrace{(\lambda-\lambda_2)^{m_1}}_{\to 0} x^\lambda$ — старший

$\lambda = \lambda_2$

$$\varphi(\lambda_2,x) = 0 + x^{\lambda_2+k}(c_k(\lambda_2) + \dots) = x^{\lambda_1}(c_k(\lambda_2) + \dots) = c_k(\lambda_2)y_{\lambda_1}$$

$y = x^{\lambda_1}(1 + \dots)$; для всех решений: (2 вверху, 1 вверху)

$$L\varphi(\lambda,x) = P_0(\lambda)(\lambda-\lambda_2)^{m_1}x^\lambda = (\lambda-\lambda_2)^{m_1+m_2}\hat{P}_0(\lambda)x^\lambda$$

$\hat{P}_0(\lambda_2) \neq 0$

первые $\varphi(\lambda_2,x), \varphi'_\lambda(\lambda_2,x), \dots, \varphi^{(m_1+m_2-1)}_\lambda(\lambda_2,x)$ — старший $\Leftarrow$

m_1+m_2

$$\varphi(\lambda,x)=x^{\lambda}\left[(\lambda-\lambda_2)^{m_1}+c_1(\lambda)x+\dots+c_{k-1}(\lambda)x^{k-1}\right]+c_k(\lambda)\,\varphi_1(\lambda+k,x)$$

, $c_0=1$ ров/ооо - $\varphi_1(\lambda,x)$

, $\lambda_1=\lambda_2+k$ - δ ооо $\varphi(\lambda_2,x),\dots,\varphi_\lambda^{m_1-1}(\lambda_2,x)$ ооо

$\varphi_\lambda^{(m_1)}(\lambda_2,x),\dots,\varphi_\lambda^{(m_1+m_2-1)}(\lambda_2,x)$ (3) ! ооо

; ооо ооо ооо

$$\varphi_\lambda^{(m_1)}(\lambda_2,x)=x^{\lambda_2}(m_1!+\dots)+\left(x^{\lambda+k}(c_k+\dots)\right)'_{\lambda=\lambda_2}$$

; $m_1=m_2=1$, $n=2$; 3' ооо

$\lambda_1=\lambda_2+k$

$$y_1=y_{\lambda_1}=x^{\lambda_1}(1+c_1x+\dots)$$

$$y_2=\alpha\ln x\,y_{\lambda_1}(x)+x^{\lambda_2}(1+d_1x+\dots)$$

$$\varphi_\lambda^{(m_1)}(\lambda_2,x)=x^{\lambda_2}(m_1!+\dots)+\ln(x)\cdot x^{\lambda_2+k}(c_k(\lambda_2)+\dots)+x^{\lambda_2+k}(c_k'(\lambda_2)+\dots)=$$

($c_k(\lambda_2)$, $m_1!=1!$)

↓

$\lambda_2+k=\lambda_1$

$$=x^{\lambda_2}(m_1!+\dots)+c_k(\lambda_2)y_{\lambda_1}\ln x+x^{\lambda_2+k}(\dots)$$

$c_1, c_2, \dots$ (*) в ряде

λ в (*)

$$P_0(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^m \hat{P}_0(\lambda) \qquad \hat{P}_0(\lambda_1) \neq 0$$

$$L\varphi(\lambda,x) = (\lambda-\lambda_1)^m \hat{P}_0(\lambda) x^\lambda \qquad c_0 = 1$$

$$L\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(\lambda,x) = m(\lambda-\lambda_1)^{m-1}\hat{P}_0(\lambda)x^\lambda + (\lambda-\lambda_1)^m\left[\hat{P}_0'(\lambda)x^\lambda + \hat{P}_0(\lambda)(\ln x)x^\lambda\right]$$

$\lambda = \lambda_1$

$$L\frac{\partial}{\partial\lambda} = \frac{\partial}{\partial\lambda}L$$

$m > 1$

$$L\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_1}\varphi(\lambda,x) = 0$$

$\varphi_\lambda'(\lambda,x)$

$$P_0(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^m \hat{P}_0(\lambda); \quad \hat{P}_0(\lambda_1) \neq 0$$

2

$$\varphi(\lambda,x),\ \frac{\partial}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_1}\varphi(\lambda,x),\ \dots,\ \frac{\partial^{m-1}}{\partial\lambda^{m-1}}\Big|_{\lambda=\lambda_1}\varphi(\lambda,x)$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_1}\varphi(\lambda,x) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_1} x^\lambda(1+c_1(\lambda)x+\dots) =$$

$$= x^{\lambda_1}\ln x\,(1+c_1(\lambda_1)x+\dots) + x^{\lambda_1}(c_1'(\lambda_1)x+c_2'(\lambda_1)x^2+\dots)$$

$$y_{\lambda_1} = x^{\lambda_1}(1+c_1(\lambda_1)x+\dots)$$

$m=2$, $n=2$ 2'

$$y_1 = y_{\lambda_1} = x^{\lambda_1}(1+c_1x+\dots)$$

$$y_2 = (\ln x)\,y_{\lambda_1} + x^{\lambda_1}(d_1x+d_2x^2+\dots)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 + k$, $k \in \mathbb{N}$ — 3 שורות

$\Rightarrow P_0(\lambda_2 + k) = 0$

$\lambda_2+1, \lambda_2+2, \dots, \lambda_2+k-1, \lambda_2+k+1, \dots$

λ_2 הוא שורש יחיד של P_0

$$P_0(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1} \hat{P}_0(\lambda) = (\lambda-\lambda_2)^{m_2} \hat{P}_0(\lambda)$$

$\hat{P}_0(\lambda_1) \neq 0$, $\hat{P}_0(\lambda_2) \neq 0$

$$\varphi(\lambda, x) = x^{\lambda}(c_0(\lambda) + c_1(\lambda)x + \dots)$$

$$L\varphi(\lambda, x) = P_0(\lambda) x^{\lambda} c_0(\lambda)$$

$\Leftarrow$

$$P_0(\lambda+1)c_1 + g_1(\lambda, c_0) = 0$$

$$P_0(\lambda+i)c_i + g_i(\lambda, c_0, \dots, c_{i-1}) = 0$$

2 שורשים של P_0 הם λ_1 ו-

$$c_i = -\frac{g_i(\lambda, c_0, \dots, c_{i-1})}{P_0(\lambda+i)}$$

λ_2 ו- שורש P_0 הוא λ_2 אז:

$$c_k(\lambda, c_0) = -\frac{g_i(\lambda, c_0, \dots, c_{k-1})}{P_0(\lambda+k)}$$

$c_k(\lambda, c_0)$ - פתרון יחיד של P_0.

$\lambda_2 = \lambda_1 - k$ שורש יחיד, $\lambda = \lambda_2$ הוא שורש יחיד

$$P_0(\lambda+k) = (\lambda-\lambda_1+k)^{m_1} \hat{P}_0(\lambda+k)$$

$$= (\lambda-\lambda_2)^{m_1} \hat{P}_0(\lambda+k) \neq 0, \quad \hat{P}_0(\lambda_1) = \hat{P}_0(\lambda_2+k) \neq 0$$

m_1 שורש יחיד

$A(x)$ $L(x^\lambda A(x)) = x^\lambda Q(x)$.

$\exists Q(x) \iff A(x)$

$$x^k \left(\frac{d}{dx}\right)^k (x^\lambda A(x)) =$$

$$= x^k \sum \binom{k}{i} \left(\frac{d}{dx}\right)^i x^\lambda \left(\frac{d}{dx}\right)^{k-i} A(x)$$

$$x^k \cdot \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i+1) x^{\lambda-i} = x^{k-i}\, x^\lambda \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i+1)$$

$$\iff Ly(x) \equiv 0$$

$$\iff x^\lambda Q(x) = 0$$

$x^{\lambda+1}$ $\cdots$ $\cdots$ $\cdots

; $c_0 \to$ אילוץ $\Leftarrow c_0 \neq 0$: 1 שלב

$$y = x^\lambda (c_0 + c_1 x + \dots) \Rightarrow y = x^\lambda (1 + \frac{c_1}{c_0} x + \dots)$$

אילוץ שקול $P_0(\lambda) = 0 \Leftarrow c_0 = 1$ נבחר כך

$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, (שורש λ) $P_0(\lambda) = 0$ כך ④ : נשים

$y_\lambda = x^\lambda (1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$: נחשב פתרון מהצורה $P_0(\lambda + k) \neq 0$

כך ש-

: נחשב c_k באמצעות

$$P_0(\lambda + k) c_k + g_k(\lambda, c_0, c_1, \dots, c_{k-1}) = 0$$

(כאשר g_k פולינום)

נניח

$P(\lambda)$ יש בדיוק שורשים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ כך : נניח

שלכל $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ יש פתרון מהצורה $y_{\lambda_1}, \dots, y_{\lambda_n}$ בת"ל

כאשר $a_1(x), \dots, a_n(x)$ הם פולינומים.

שלב 2: $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^m \hat{P}_0(\lambda)$, $\hat{P}_0(\lambda_1) \neq 0$, $P_0(\lambda_1 + k) \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$

נראה שיש $m-1$ פתרונות בת"ל, y_{λ_1} כך ש-

נחפש פתרון מהצורה:

$$\psi(\lambda, x) = x^\lambda (c_0(\lambda) + c_1(\lambda) x + c_2(\lambda) x^2 + \dots)$$

כאשר $c_0 = 1$ נבחר כך

$y = \psi(\lambda, x)$ נציב $\lambda = \lambda_1$ נקבל פתרון $Ly = 0$ של

$$(*) \quad \psi(\lambda, x) = P_0(\lambda) c_0 x^\lambda + (P_0(\lambda+1) c_1 + g_1(\lambda, c_0)) x^{\lambda+1} + \dots$$

$$\psi(\lambda, x) = P_0(\lambda) c_0 x^\lambda$$ נקבל

$P_0(\lambda+1) c_1 + g_1(\lambda, c_0) = 0 \Rightarrow c_1 = c_1(\lambda, c_0)$, נציב

$P_0(\lambda+2) c_2 + g_2(\lambda, c_0, c_1) = 0 \Rightarrow c_2 = c_2(\lambda, c_0)$

$P_0(\lambda+i) c_i + g_i(\lambda, c_0, c_1, \dots, c_{i-1}) = 0 \Rightarrow c_i = c_i(\lambda, c_0)$

$y_{\lambda_1}^{(x)} = \psi(\lambda_1, x)$ $\Leftarrow \lambda = \lambda_1$, $c_0 = 1$ נקבל כך

$\lambda = const \in R$, $x = \pm 1$ שלושת מ'

$$y'' - \frac{2x}{(1-x)(1+x)} y' + \frac{\lambda}{1-x^2} y = 0$$

$x=1$: $\frac{2x}{(1+x)}$ / $\frac{*(x-1)^2\lambda}{1-x^2} = \frac{1-x}{1+x}\lambda$

שלושת מ' $x = \pm 1$ ב R, $x=1$ ← מתקבל

רגולרי.

(ch.4, Coddington, Levinson) משפט פרובניוס

.($x_i = x - x_0$ נסמן), סביב נקודה רגולרית $x=0$ ← נניח

; נחפש, לפחות, פתרון אחד מהצורה

$$x^n y^{(n)} + x^{n-1} a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = 0$$

$$a_1(x) = a_{10} + a_{11}x + a_{12}x^2 + \dots$$

$$a_2(x) = a_{20} + a_{21}x + a_{22}x^2 + \dots$$

. 0 מתכנס לפחות כאשר $a_1(x), \dots, a_2(x)$

. $y = x^\lambda (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$; נחפש פתרון מהצורה

$$= x^\lambda A(x)$$

$A(x)$

$$L = x^n \left(\frac{d}{dx}\right)^n + x^{n-1} a_1(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + \dots + a_n(x) I$$

$$L: C^\infty \to C^\infty$$

. $C^\infty \to R$ ב ∞ ל

$$L x^\mu = \mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)x^\mu + \mu(\mu-1)\dots(\mu-n+2)$$

$$\cdot (a_{10} + a_{11}x + \dots)x^\mu + \dots + (a_{n0} + a_{n1}x + \dots)x^\mu = 0$$

$$L x^\mu = [\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1) + a_{10}\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+2) + \cdots + a_{n0}]x^\mu + [\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+2)a_{11} + \mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+3)a_{21} + \cdots + a_{n1}]x^{\mu+1} +$$

$$+ [\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+2)a_{12} + \mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+3)a_{22} + \cdots + a_{n2}]$$

$$\cdot x^{\mu+2} + \cdots .$$

$$L x^\mu = P_0(\mu)x^\mu + P_1(\mu)x^{\mu+1} + P_2(\mu)x^{\mu+2} + \cdots$$

(Lemma) $\deg P_0(\mu) = n$, $\deg P_i(\mu) = n-1$, $\forall i > 0$

Задано уравнение Эйлера вида $\sum - P_0(\mu)$

$$x^n y^{(n)} + x^{n-1} a_{10} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n0} y = 0$$

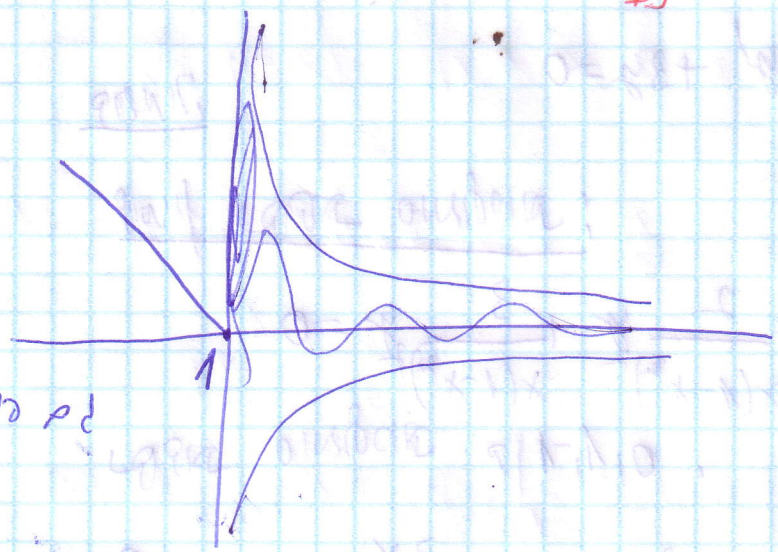
$$Ly = Lx^\lambda(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots) =$$

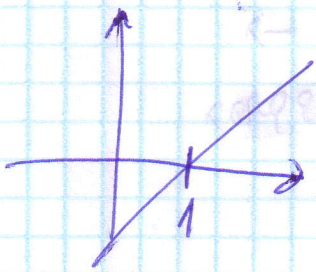
$$= L(c_0 x^\lambda + c_1 x^{\lambda+1} + c_2 x^{\lambda+2} + \cdots)$$

$$= P_0(\lambda)c_0 x^\lambda + [c_0 P_1(\lambda) + c_1 P_0(\lambda+1)]x^{\lambda+1} +$$

$$+ [c_0 P_2(\lambda) + c_1 P_1(\lambda+1) + c_2 P_0(\lambda+2)]x^{\lambda+2}$$

$$+ \cdots + [c_0 P_k(\lambda) + c_1 P_{k-1}(\lambda+1) + \cdots + c_k P_0(\lambda+k)]x^{\lambda+k} + \cdots$$





נקודה סינגולרית (Singular points) (ע"פ מיכאלי).

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\,y = 0$$

הגדרה: $x = x_0$ נקודה **רגולרית** אם $a_1, \dots, a_n$ כל מקדמי המשוואה רציונליות סביב x_0.
(כלומר אפשר לכתוב את כל אחד מהם כמנה של שני פולינומים שמתאפסים ב-x_0).

$x = x_0$ נקודה סינגולרית אם לפחות אחד מ- $a_1, \dots, a_n$ אינו רציונלי ב-x_0.

משפט שוויץ:

$$y^{(n)} + \frac{\alpha_1}{x - x_0}\,y^{(n-1)} + \dots + \frac{\alpha_n}{(x-x_0)^n}\,y = 0$$

נקודה x_0 היא נקודה סינגולרית רגולרית.

הגדרה: x_0 נקודה סינגולרית רגולרית אם
$a_1(x)(x-x_0),\ a_2(x)(x-x_0)^2, \dots, a_n(x)(x-x_0)^n$
כולם אינם רציונליים סביב x_0.

$$x(1-x^2)y'' + 2y' + 3y = 0$$

דוגמה:

נחלק בכל האגף:

$$y'' + \frac{2}{x(1-x^2)}y' + \frac{3}{x(1-x^2)}y = 0$$

נקודות סינגולריות: $0, 1, -1$.

$x=0$: $\frac{2}{(1-x^2)}$, $\frac{3x}{(1-x)^2}$ $x=0$ → נקודה סינגולרית

$x=1$: ~~$\frac{2}{x(x+1)}$~~

~~$\frac{2}{x}$~~ ~~$\frac{2}{(1+x)^2}$~~

$x=1$: $\frac{2}{x(x-1)}$, $\frac{3}{x}$ נקודה סינגולרית

~~$x=1$~~ → ~~סינגולרית~~ לא סינגולרית.

משפט נקודות סינגולריות

f, g אנליטיות ב $\Leftarrow$ $f \cdot g$; $\alpha f + \beta g$; $\frac{f}{g}$ $g \neq 0$

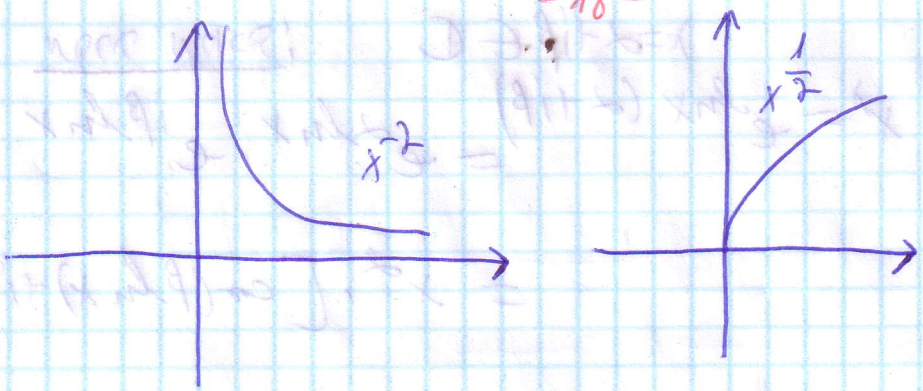
$\frac{f}{g}$ אנליטית ב x_0 $\Leftarrow$ $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = const$

כל זה נכון גם כאשר פרמטר הפונקציה אנליטית.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1$$

דוגמה: משוואת Legendre;

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$



$y = |x|^{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{sign} x$:דוגמא

$$y = \begin{cases} x^{\frac{1}{2}} & x > 0 \\ x^{-2} & x < 0 \end{cases}$$.זה פונקציה

$$y = c_1 |x|^{-2} + c_2 |x|^{\frac{1}{2}}$$

.$y \equiv 0$ -ש ~~ברור~~ פתרון קבוע הוא פתרון הומוגני.

.$x = 0$ -ב רציפים y -ו y' ,y'' ,c_1, c_2 לכל בחירת

דוגמא:

$$x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$$

$$y = x^\lambda$$

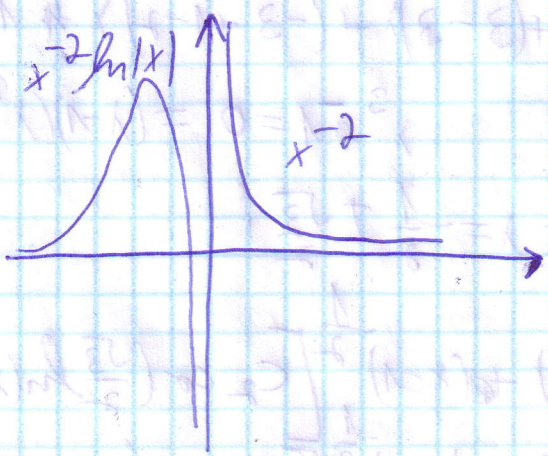
$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -2$$

$$y = c_1 x^{-2} + c_2 \ln(x)\, x^{-2} \qquad x > 0$$

$$y = d_1 x^{-2} + d_2 \ln|x|\, x^{-2} \qquad x < 0$$

.$y \equiv 0$ -ש כך c_1, c_2 ,d_1, d_2 ניתן לבחור



$\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ מקרה מורכב:

$x > 0 \quad x^\lambda = e^{\ln x (\alpha + i\beta)} = e^{\alpha \ln x} \cdot e^{i\beta \ln x}$

$= x^\alpha \cdot [\cos(\beta \ln x) + i \sin(\beta \ln x)]$

$\forall x \neq 0$, $|x|^\alpha \cos(\beta \ln|x|)$, $|x|^\alpha \sin(\beta \ln|x|)$

$\ln|x| |x|^\alpha \cos(\beta \ln|x|)$, ... — [illegible]

$(x-x_0)^2 y'' + a_1(x-x_0)y' + a_2 y = 0$ $n=2$ משוואת

$y = (x-x_0)^\lambda$ נציב

$\lambda^2 + (a_1 - 1)\lambda + a_2 = 0$ נקבל משוואה אופיינית

$(x-x_0)^3 y''' + (x-x_0)^2 y'' + (x-x_0) a_2 y' + a_3 y = 0$ $n=3$

$y = (x-x_0)^\lambda$

נקבל משוואה אופיינית

$\lambda^3 + (a_1 - 3)\lambda^2 + (a_2 - a_1 + 2)\lambda + a_3 = 0$

$(x-1)^3 y''' + 3(x-1)^2 y'' + (x-1)y' + y = 0$ אוילר

$y = (x-1)^\lambda$

$\lambda^3 + (3-3)\lambda^2 + (-3+1+2)\lambda + 1 = 0$

$\lambda^3 + 1 = 0 = (\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$

$\lambda = 1, \quad \lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$x > 1$, $y = c_1(x-1) + (x-1)^{\frac{1}{2}} \left[c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x-1)\right) + c_3 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x-1)\right) \right]$

$x < 1$, $y = d_1(x-1) + |x-1|^{\frac{1}{2}} [d_2 \cdot \ldots + d_3 \cdot \ldots]$

. כנדרש $r_1=r_2$ -ש נניח כעת

נגדיר העתקה לינארית $D: C^1 \to C$, כאשר C^1 היא מרחב הפונקציות

$$D=\frac{d}{dx} \qquad L(D)=x^n D^n + x^{n-1} a_1 D^{n-1} + \dots + a_n I$$

נתבונן במשוואה: $L(D)y=0$

נגדיר: $L(D)x^r = p(r)x^r$. (שים לב!)

. r -ו x משתנים שונים זה מזה

. r_1 -שורש כפולה לפחות פעמיים, כלומר $p(r)$ מתחלק ב $(r-r_1)^2$

$$p(r)=(r-r_1)^2 q(r) \;,\; q(r_1)\neq 0$$

$$L(D)x^r = p(r)x^r$$

$$L(D)\frac{\partial}{\partial r}x^r = \frac{\partial}{\partial r}L(D)x^r = p'(r)x^r + p(r)r x^{r-1}$$

נשים לב כי: $\frac{\partial}{\partial r}D = D\frac{\partial}{\partial r}$

נחשב:

$$\frac{\partial}{\partial r}x^r = \frac{\partial}{\partial r}e^{r\ln x} = (\ln x)x^r$$

$$L(D)(\ln x)x^r = p'(r)x^r + p(r)r x^{r-1}$$

נציב $r=r_1$:

$$p'(r) = 2(r-r_1)q(r) + (r-r_1)^2 q'(r)$$

נשים לב כי: $p(r_1)=p'(r_1)=0$ אם ורק אם $r=r_1$.

$$L(D)\left[\ln x \cdot x^{r_1}\right]=0$$

$\Leftarrow$ כלומר $\ln x \cdot x^{r_1}$ הוא פתרון עבור x^{r_1}.

נשים לב כי אם r_1 הוא שורש מרובה מסדר m אז הפתרונות הם:

$$x^r,\ \ln(x)x^r,\ \ln^2 x\, x^r,\ \dots,\ \ln^{m-1}x\, x^r$$

27/05/08

משוואת אוילר - 2 סדר

(Euler) שלה משוואת

$x^n y^{(n)} + x^{n-1} a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$ משוואת אוילר

$y = x^\lambda$ הפתרון הוא

$P(\lambda) = 0$ נקבל פולינום אופייני,

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k x^\lambda = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)x^{\lambda-k}$$

משפט: $x^{\lambda_1}, \dots, x^{\lambda_n}$ פתרונות

$x^{\lambda_1}, \ln x \cdot x^{\lambda_1}, \dots, \ln^{m_1-1} x \cdot x^{\lambda_1}$ אם λ_1 שורש בריבוי m_1

הוכחה: נציב $x = e^t$ ($x = \ln t$ ~~לא~~)

אזי נקבל מקדמים קבועים,

$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, t^{m_2-1}e^{\lambda_2 t}$ נקבל (מקדמים קבועים)

כדי לראות שזה עובד עבור $x<0$,

$\tilde{x} = -x = |x| > 0 \iff x < 0$ נשים

$$x^n \left(\frac{d}{dx}\right)^n = (-\tilde{x})^n \left(\frac{d}{d(-\tilde{x})}\right)^n = (\tilde{x})^n \left(\frac{d}{d\tilde{x}}\right)^n \cdot (-1)^{2n}$$

$$= (\tilde{x})^n \left(\frac{d}{d\tilde{x}}\right)^n$$

נשים לב שמספיק לדעת את הפתרון עבור $x>0$, $\psi(x)$ נסמן

$\psi(|x|)$ אז הפתרון עבור $x<0$ הוא $\iff$ נציב

דוגמה: נמצא את הפתרונות עבור $x>0$ ואז עבור $x<0$

$y = x^\lambda$ נציב

$x^2 y'' + \frac{5}{2} x y' - y = 0$ משוואת אוילר:

$$x^2 \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + \frac{5}{2} x \lambda x^{\lambda-1} - x^\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda-1) + \frac{5}{2}\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{3}{2}\lambda - 1 = 0$$

$$(\lambda+2)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2}, -2$$

$$|\dddot{x}| \le 1\cdot 1 + 2\cdot 8 + 1\cdot 11 + 8 + 2 \le 40$$

$$n = \frac{40}{4!} = \frac{40}{24} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}, \quad \varepsilon = \frac{1}{8}$$

$$|R| \le \frac{5}{3} t^4$$

(Frobenius) משוואת אוילר, נקראת גם משוואת

(Euler). משוואת קושי-אוילר

(equidimensional) $x^n y^{(n)} + x^{n-1} a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$

כאשר x משנה יחידות ו-y לא משנה,

$$[x^k, y^{(k)}] = \frac{m^k}{m^k} = m$$

$t = \ln x$, $x = e^t$.

① נחפש פתרון מהצורה: $y = x^r$

② נשתמש בנוסחה $\frac{d}{dx} x^r = r x^{r-1}$.

$r = 0$ נקבל פתרון $y = 1$, $x \neq 0$

$$0 = \frac{d}{dx} x^0 = \frac{0}{x}$$

נקבל $y^{(n)}$ כאשר $x = 0$ הוא פתרון יחיד

$y, y', \dots, y^{(n-1)}$ נקבל

נוסחת קיום ויחידות עבור $x = 0$.

נתון $\exists!$

$$\dot{x} = f(t, x)$$
$$x(t_0) = \xi$$

$$y_0 = y, \ y_1 = y', \ \dots, \ y_{n-1} = y^{(n-1)}$$

$$y_0' = y_1$$
$$\vdots$$
$$y_{n-1}' = \frac{1}{x^n}\left(-x^{n-1} a_1 y_{n-1} - \dots - a_n y_0\right)$$

$y^{(k)} = r(r-1)\cdots(r-k+1)x^{r-k}$, $y = x^r$

$x^n r(r-1)\cdots(r-n+1)x^{n-r} + \cdots + a_n x^r = 0$

$P(r)x^r = 0$

$P(r) = 0$

Indicial equation

$r_1, \ldots, r_n$

$x^{r_1}, \ldots, x^{r_n}$

$r_i \in \mathbb{C}$

$x^{r_1}, \ldots, x^{r_n}$ $r_1, \ldots, r_n$

$n = 1$

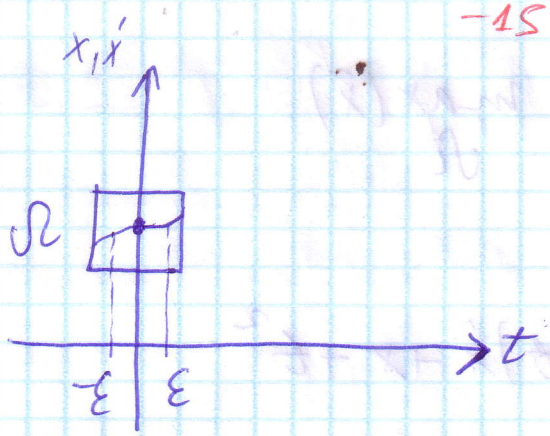
$n-1 \Rightarrow n$: $\alpha_1 x^{r_1} + \cdots + \alpha_n x^{r_n} = 0$

$\alpha_1 x^{r_1 - r_n} + \cdots + \alpha_{n-1} x^{r_{n-1} - r_n} + \alpha_n = 0$

$\alpha_1 (r_1 - r_n) x^{r_1 - r_n - 1} + \cdots + \alpha_{n-1}(r_{n-1} - r_n) x^{r_{n-1} - r_n - 1} = 0$

$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$

$\alpha_n = 0$



$x(0)=1,\ \dot{x}(0)=0$

$\exists \max |x|, |\dot{x}|, |f| \quad \Leftarrow$ משפט-f

$$\ddot{x} = f'_t + f'_x \dot{x} + f'_{\dot{x}} \ddot{x}$$

$$\dddot{x} = \frac{d}{dt} \ddot{x}$$

. Ω נגדיר את

$$\Omega = \{ (t,x,\dot{x}) \mid |t| \le 2,\ |x| \le 2,\ |\dot{x}| \le 1 \}$$

כך, Ω היא קבוצה סגורה וחסומה ולכן ε שנבחר כך
. Ω -> max היא, $\max_t |x^{(4)}|$ היא קבוע כך

① $|t| \le \varepsilon$ עבור $t \in [-2,2]$ -> נוכיח כי x

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)\,ds$$

$$1 \le 1 + \left| \int_{t_0}^{t} |\dot{x}|\,ds \right| \le 1 + |t| \cdot 1$$

t_0

$|t|, x \in [-2,2]$ -> כך שמתקיים $1+|t| \le 2$ -> נוכיח

. $\boxed{|t| \le 1}$ -> נוכיח

② $[-1,1]$ היא קבוצה $\dot{x}$ -> כך שמתקיים

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \ddot{x}\,dt$$

t_0

$$|\dot{x}(t)| \le |t| \cdot \max_{\Omega} |\ddot{x}|$$

~~$\dot{x} = x$~~

$$\ddot{x} = -(\cos t)\dot{x} + x + t^2$$

$$|\ddot{x}| \le 1 + 2 + 1 = 7$$

$$|\dot{x}(t)| \le |t| \cdot 7 \le 8|t|$$

$$|t| \le \frac{1}{8}$$

$|t| \le \frac{1}{8}$, $|t| \le 1$, $|t| \le 2$: ε פונקציה

$\varepsilon = \frac{1}{8}$ פונקציה של

Ω היא קבוצה סגורה וחסומה של $t \in [-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}]$ עבור

$$\Omega_1 = \left\{ (t, x, \dot{x}) \;\middle|\; \begin{array}{l} |t| \le \varepsilon = \frac{1}{8} \\ |x| \le 2 \\ |\dot{x}| \le 1 \end{array} \right\}$$ קבוצה סגורה

$$\Omega_2 = \left\{ \begin{array}{l} |t| \le \frac{1}{8} \\ |x| \le 1 + \frac{1}{8} \\ |\dot{x}| \le 1 \end{array} \right\}$$ חסומה

$\Omega_1 \to$ היא $t \in [-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}]$ עבור

$$\ddot{x} = -\sin t \dot{x} - \cos t \ddot{x} + \dot{x} + 2t$$

$$|\ddot{x}| \le 1 \cdot 1 + 1 \cdot 8 + 1 + 2 \cdot \frac{1}{8} \le 11$$

$$\{\dddot{x}\} = \cos t \ddot{x} + 2\sin(t)\dot{x} - \cos t \dddot{x} + 2 + \ddot{x}$$

דוגמה:

$$x'' + \cos(t)x' - x = t^2$$

$$x(0) = 1,\ x'(0) = 0$$

נחפש את הפתרון בצורה

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + o(t^4)$$

נציב את הנתון:

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + R(t)$$

$|t| \le \varepsilon$ כאשר $|R(t)| \le M t^4$

ε, M ב' מה הם.

כאשר $R(t) = \frac{x^{(4)}(\theta t)}{4!} \cdot t^4$ - נקודת לגראנז'

$0 < \theta < 1$.

$M \ge \max|x^{(4)}(t)|$, $|t| \le \varepsilon$ פתרון מספרי

שלב 1: מציאת $a_0, \dots, a_4$.

שלב 2: מציאת M, ε (מספיק שלב 2 מלא שלב 1).

טיילור של פונקציות:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots$$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots$$

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots$$

$x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \dots$ — ряд x Маклорена

$\alpha_0 = x(0) = 1$

$\dot{x}(t) = \alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2 + 4\alpha_4 t^3 + \dots$

$\alpha_1 = \dot{x}(0) = 0$

$\ddot{x}(t) = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 t + 12\alpha_4 t^2 + 20\alpha_5 t^3 + \dots$

$\left(2\alpha_2 + 6\alpha_3 t + 12\alpha_4 t^2 + \dots\right) + \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \dots\right) \cdot$

$\cdot \left(\alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2 + \dots\right)$

$- \left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \dots\right) = t^2$

$\underline{t^0}$: $2\alpha_2 + \alpha_1 - \alpha_0 = 0$ $\quad \alpha_2 = \frac{1}{2}$

$\underline{t^1}$: $6\alpha_3 + 2\alpha_2 - \alpha_1 = 0$ $\quad \alpha_3 = -\frac{1}{6}$

$\underline{t^2}$: $12\alpha_4 - \frac{\alpha_1}{2} + 3\alpha_3 + 2\alpha_2(-\alpha_2) = 1$

$\alpha_4 = \frac{1}{6}$

$x(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + o(t^4)$ ①

$x = 1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + R(t)$ ②

$|R(t)| \le M t^4 \subset \forall\, |t| \le \varepsilon$

$M, \varepsilon = ?$ для ②

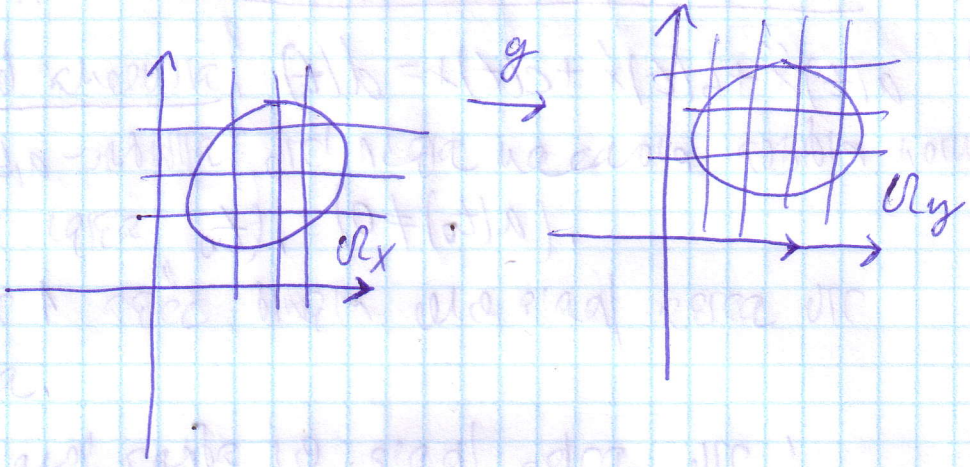
$\ddot{x} + (\cos t)\dot{x} - x = t^2$ $\quad \ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$

$M \ge \max\limits_{|t| \le \varepsilon} |x^{(4)}|$

$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2) \\ y_2 = g_2(x_1, x_2) \end{cases}$ $g: B^2 \to B^2$ взаимно-однозначно

$$\int_{\Omega_y} f(y)\, dy_1 dy_2$$

dV_y ← элемент площади



$dV_x = dx_1 dx_2$

$$\begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'_{1x_1} & g'_{1x_2} \\ g'_{2x_1} & g'_{2x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix}$$

$dx_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $dx_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: x единичные векторы

$$V_x = \begin{vmatrix} dx_1 & 0 \\ 0 & dx_2 \end{vmatrix} = dx_1 dx_2$$

$$V_y = \begin{vmatrix} g'_{1x_1} & g'_{1x_2} \\ g'_{2x_1} & g'_{2x_2} \end{vmatrix} = \det\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

$$V_y = \left| \begin{pmatrix} g'_{1x_1} \\ g'_{2x_1} \end{pmatrix} dx_1 \right| \left| \begin{matrix} g'_{1x_2} \\ g'_{2x_2} \end{matrix} dx_2 \right| = \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| dx_1 dx_2$$

~~תזכורת~~ על משפט:

$$\int_{\Omega_y} f(y)dy = \int_{\Omega_x} f(g(x)) \left| \det \frac{\partial g}{\partial x} \right| dx_1 dx_2$$

משוואות דיפרנציאליות רגילות מסדר שני

הגדרה: משוואה מהצורה $a(t)\ddot{x}+b(t)\dot{x}+c(t)x=d(t)$, $x \in \mathbb{R}$, a,b,c,d - פונקציות רציפות נתונות, נקראת משוואה לינארית מסדר שני בנקודה t_0, $(a(t_0)\neq 0)$.

* משפט 1 נקרא לפעמים משפט הקיום והיחידות למשוואות מסדר שני.

תנאי התחלה יהיו מהצורה:

$$x = \alpha_0 + \alpha_1(t-t_0) + \dots$$

כאשר המספרים α_0, α_1 נקראים תנאי התחלה.

לדוגמה:

נפתור את המשוואה $\ddot{x}+x=0$

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i t^i$$

$$x(t) = \alpha_0 \cos(t) + \frac{1}{2}\alpha_1 \sin(t).$$

מה יהיה הפתרון הכללי עבור a,b,c,d כלשהם?

$\Rightarrow$ יהיה קשה למצוא פתרון מדויק

$$x(t)=\sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^i + R_n(t)$$

כאשר $R_n(t)=o(t^n)$.

נחפש פתרון מקורב $x(t)$, כך שנוכל לחשב בקלות את הפתרון המדויק.

$\forall t \ \det \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t,t_0,x_0) > 0 \iff$ כל הפתרונות קיימים

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} dx_1 \dots dx_n = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_{t_0}} \det \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\, dx_{01} \dots dx_{0n}$$

$$= \int_{\Omega_{t_0}} \frac{d}{dt}\left(\det \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\right) dx_{01} \dots dx_{0n}$$

$$= \int_{\Omega_{t_0}} \operatorname{Tr} f'_x(t,\varphi(t,t_0,x_0)) \cdot \det\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\right) dx_{01} \dots dx_{0n}$$

$\det\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\right)\Big|_{t=t_0} = 1$: $t=t_0$ נגזרת של הפונקציה עבור

$$f'_x(t_0,\varphi(t_0,t_0,x_0)) = f'_x(t_0,x_0)$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}\int_{\Omega_t} dx_1 \dots dx_n = \int_{\Omega_{t_0}} \operatorname{Tr} f'_x(t_0,x_0)\, dx_{01} \dots dx_{0n}$$: נשים לב

$\boxed{\text{משוואה}}$ עבור t_0 כלשהו, נקבל

$$= \int_{\Omega_{t_0}} \operatorname{Tr} f'_x(t,x)\, dx_1 \dots dx_n$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 x_3 - x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - x_3 \end{cases}$$

Якобиан

$|x_i| \le 0.5$ найти что было равно на нем бы

? μ_3 при $i = 1,2,3$

$$f'_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$Tr f'_x = f_{1x} + f_{2x} + f_{3x}$$

$$Tr f'_x = -3 = -1 - 1 - 1$$

Что знаем

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} dx_1 \dots dx_n = \int_{\Omega_t} Tr f'_x \, dx_1 \dots dx_3$$

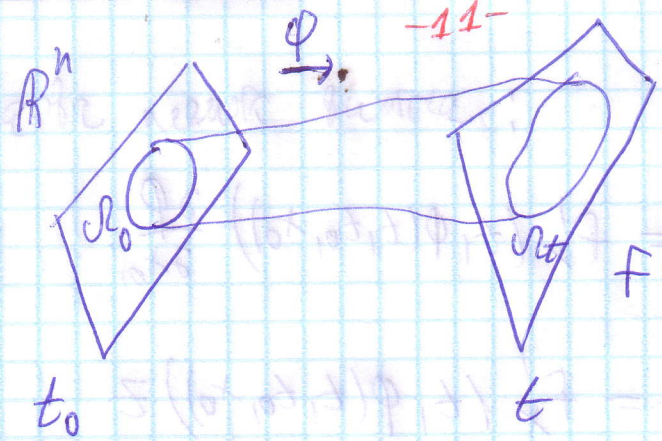
$$= -3 \int_{\Omega_t} dx_1 dx_2 dx_3$$

это $-V$

$$\dot{V} = -3V$$

$$V = V(0) e^{-3t}$$

$$V(0) = 1, \quad V(t) = 1 \cdot e^{-3t} \Rightarrow V(2) = e^{-6}$$



$$f = \begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ \vdots \\ f_n(t,x) \end{pmatrix}$$

נוסחת מעבר:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \quad$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{\Omega_{t_0}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n$$

$$\mathbb{R}^n : \{(x_1, \dots, x_n)\}$$

$$x_0 \in \mathbb{R}^n$$

נוסחת גאוס:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} dx_1 \dots dx_n = \int_{\Omega_{t_0}} \operatorname{div} f(t,x)\, dx_1 \dots dx_n$$

(Arnold של ספרו מתוך) הוכחה:

$x = \varphi(t, t_0, x_0)$: נסמן את פתרון המשוואה

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, t_0, x_0) = f(t, \varphi(t, t_0, x_0))$$

נקח את t_0 ונשנה את x_0.

נגזור לפי Jacobi:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_{01}} \dots \frac{\partial \varphi}{\partial x_{0n}}\right)$$

נגזור.

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_{0i}} = \frac{\partial}{\partial x_{0i}}\left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi\right) = \frac{\partial}{\partial x_{0i}} f(t, \varphi(t, t_0, x_0))$$

$$= f'_x(t, \varphi(t, t_0, x_0)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_{0i}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_{0i}} = f'_x(t,\varphi(t,t_0,x_0))\frac{\partial \varphi}{\partial x_{0i}}$$

$$\frac{d}{dt}z = f'_x(t,\varphi(t,t_0,x_0))z$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_{01}}(t,t_0,x_0),\ \dots,\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_{0n}}(t,t_0,x_0)$$

$$W = \det \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$$

$$\dot{W} = \operatorname{tr} f'_x(t,\varphi(t,t_0,x_0))\,W$$

x_0 – фиксированное начальное состояние.

$$\int_{\Omega_t} dx_1 \dots dx_n = \int_{\Omega_{t_0}} \left|\det \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\right| dx_{01}\dots dx_{0n}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} dx_1 \dots dx_n = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_{t_0}} \left|\det \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\right| dx_{01}\dots dx_{0n}$$

$\varphi(t_0,t_0,x_0) = x_0$ (очев.)

$$\frac{\partial \varphi(t_0,t_0,x_0)}{\partial x_0} = I$$

$$\det\left(\frac{\partial \varphi(t_0,t_0,x_0)}{\partial x_0}\right)\Big|_{t=t_0} = 1$$

$$\ddot{z} + \left(\frac{4t+3}{t+2} - 1\right) z = 0$$

$$\ddot{z} + \left(\frac{3t+1}{t+2}\right) z = 0$$

$$2 < \frac{3t+1}{t+2} = 3 - \frac{5}{t+2} < 3$$

$t \in [100, 105]$

:Δ פתרון ראשון

$\sqrt{3} = 1.7$

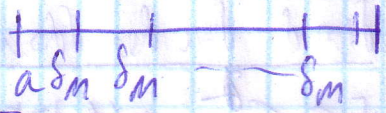
$\sqrt{2} = 1.4$

$$\delta_m = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \le \Delta \le \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \delta_M$$

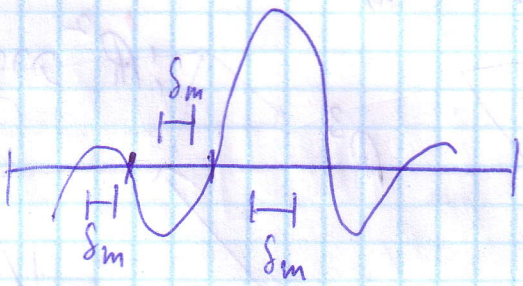
$t \in [a, b]$ $\quad \delta_m \le \Delta \le \delta_M$

:שלב הבא

$\ddot{x} + mx = 0$



מספר הפתרונות $N \ge \left[\frac{b-a}{\delta_M}\right]$ <= מספר הפעמים ש δ_M נכנס



$$N \le \left[\frac{b-a}{\delta_m}\right] + 1$$

$$2 = \left[\frac{5}{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}\right] \le N \le \left[\frac{5}{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}\right] + 1 = 3$$

שלושה

20/05/08

3 שעות - 2 שבועיים

$$\dot{x} = A(t)x \quad , \quad A(t) \in C$$

(Abel-Liouville) משפט - פתרונות בסיס

$$\dot{W} = Tr(A(t))W$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t) \in \mathbb{R}^n$

, נגדיר

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t) \; \varphi_2(t) \; \dots \; \varphi_n(t))$$

(עמודות)

$$W(t) = \det \Phi(t)$$

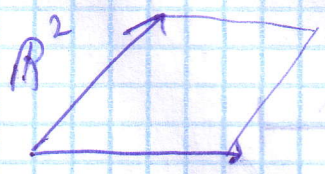
$\dot{\Phi} = A(t)\Phi$ <= $\dot{\varphi}_i = A(t)\varphi_i$ לכל

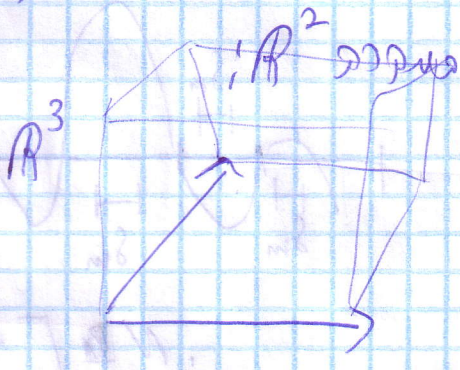
. עמודות מקיימות זאת Φ

משפט - קיום ויחידות בסיס

$$\dot{x} = f(t,x) \quad , \quad f \in C^1 \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

$\det(\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n) =$ נפח של





. $\varphi \in C^1$, $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$:נוסחת הזזה

$$\ddot{x} + \frac{1}{4(t^2-1)}x = 0$$

$(t>0)$ כאשר $t=0$ היא נקודה סינגולרית

$$\frac{1}{4(t^2-1)} \le \frac{1}{4t^2}$$

$$\ddot{x} + \frac{1}{4t^2}x = 0$$ משוואת אוילר:

$$t^2\ddot{x} + \frac{1}{4}x = 0$$

נציב $x = t^r$ ונקבל:

$$t^2 r(r-1)t^{r-2} + \frac{1}{4}t^r = 0$$

נכפול ב t^{-r}:

$$r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$$

$$4r^2 - 4r + 1 = 0$$

$$4(r-\tfrac{1}{2})^2 = 0$$

$$r = \frac{1}{2}$$

נקבל: $x = t^{\frac{1}{2}}$ (כפול).



נקודת שיווי משקל

משפט: $q \in C$, $\ddot{x} + q(t)x = 0$, $0 < m \le q(t) \le M$

אזי בין כל שני אפסים t_1, t_2 של פתרון שאינו טריוויאלי,

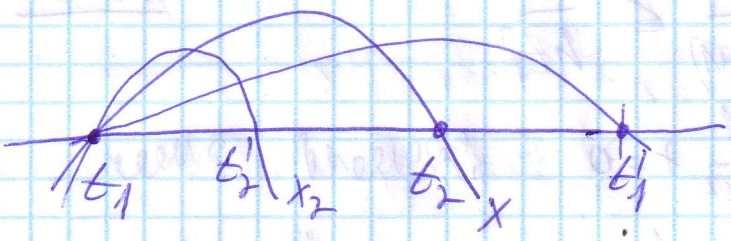
$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \le t_2 - t_1 \le \frac{\pi}{\sqrt{m}}$$

דוגמה: שתי משוואות:

$$\ddot{x}_1 + mx_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + Mx_2 = 0$$

$x_1 = \cos(\sqrt{m}t + \varphi_1)$ $\quad x_1(t_1) = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \sqrt{m}t_1$

$x_2 = \cos(\sqrt{m}t + \varphi_2)$ $\quad x_2(t_1') = 0 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \sqrt{m}t_1'$



~~$q(t) \geq m$~~

$q(t) \leq M \Rightarrow t_2' \leq t_2$

$m \leq q(t) \Rightarrow t_2 \leq t_1'$

סעיף ג

נתונה: משוואת מסלול של חלקיק נקודתי

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + \frac{4t+3}{t+2}x = 0$$

נסמן $\ddot{z} + q(t)z = 0$ ומתקיים $[100, 105]$ בתחום

$\mu(t) > 0$, $\mu(t) \to$

$$\mu\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \dot{\mu}x - \dot{\mu}x + \frac{4t+3}{t+2}\mu x = 0$$

$$\ddot{z}$$

$$\mu\ddot{x} + 2\dot{\mu}\dot{x} + \ddot{\mu}x = (\mu x)'' = \ddot{z}$$

$$\Rightarrow \ddot{\mu} = \mu \Rightarrow \mu = e^t$$

נסמן כך כיוון שזהו מעגל:

$$z = e^t x$$

$$\ddot{z} - \frac{\ddot{\mu}}{\mu}\mu x + \frac{4t+3}{t+2}z = 0$$

$$= 1$$

$$\dot\theta = -\left(\frac{1}{p}\sin^2\theta + q\cos^2\theta\right) \neq F(t,\theta)$$

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{x(t)}{p(t)\dot x(t)}$$

$$p_1 \geq p_2 > 0 \qquad \dot\theta_1 = -\left(\frac{1}{p_1}\sin^2\theta_1 + q_1\cos^2\theta_1\right) = F_1(t,\theta_1)$$

$$q_1 \leq q_2 \qquad \geq -\left(\frac{1}{p_2}\sin^2\theta_1 + q_2\cos^2\theta_1\right)$$

$$\dot\theta_2 = -\left(\frac{1}{p_2}\sin^2\theta_2 + q_2\cos^2\theta_2\right)$$

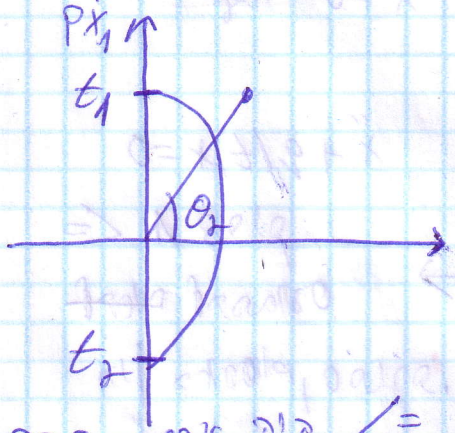
$$\dot\theta_2 \leq F_1(t,\theta_2)$$

$$\dot\theta_1 \leqq F_1(t,\theta_2) \qquad \dot\theta_1 = F_1(t,\theta_1)$$

$x_2(t_1) > 0$ и $x_2(t_1) \neq 0$ тогда $\pm 1 \to$ здесь θ

$$\theta_1(t_1) = \frac{\pi}{2} \qquad \dot x_1(t_1) > 0$$

$$\theta_2(t_1) < \frac{\pi}{2}$$



$\left(\theta_2 = -\frac{\pi}{2}\right)$ тогда $\dot x_2 < 0$ $\Leftarrow$ $\theta_2(t_2) < \theta_1(t_2) = -\frac{\pi}{2}$ что невозможно

$x_1(t_1) = x_2(t_1) = 0$, $\dot x_1(t_1) > 0$, $\dot x_2(t_1) > 0$ в этом

случае $\dot x_2 < 0$ $\Leftarrow$ $\theta_2(t_2) < -\frac{\pi}{2}$ (1) противоречие с θ_1

$\forall t \in [t_1, t_2]\ \theta_1(t) = \theta_2(t) \Leftarrow \theta_1(t_2) = \theta_2(t_2) = -\frac{\pi}{2}$ (2)

$$\Rightarrow \dot\theta_1 = \dot\theta_2$$

$$\theta_1 = -\frac{1}{p_1}\sin^2\theta_1 - q_1\cos^2\theta_1 \qquad \theta_2 = -\frac{1}{p_2}\sin^2\theta_1 - q_2\cos^2\theta_1$$

$$\frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{p_2}, \quad q_1 \leq q_2$$

$\Leftarrow q_1 = q_2$, when $\sin\theta_1 \neq 0$. then and $\Leftarrow$

then $[t_1, t_2] \to q_1 \equiv q_2 \Leftarrow \forall t \neq t_1, t_2,\ q_1 = q_2$

$\Leftarrow$ ~~$q_1 = q_2 \neq 0$~~

$p_1 \equiv p_2 \Leftarrow \sin\theta_1 \neq 0$

$\Leftarrow \dot{\theta}_1 \neq 0 \Leftarrow q_1 \neq 0$ or, $\theta_1 = 0. \Leftarrow \sin\theta_1 = 0$

. $p_1 = p_2$ then $\Leftarrow$ then case

$\ddot{x} + q(t)x = 0$ remark

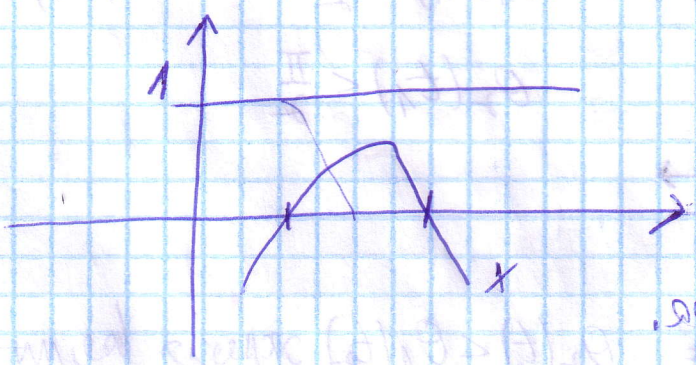
$q(t) \leq 0$ case,

~~$x \not\equiv 0$~~ proof, then then

then

$(q = 0)$ $\ddot{x} = 0$ remark

$x \equiv 1$; then $\ddot{x} = 0$ case



$\ddot{x} + q(t)x = 0$

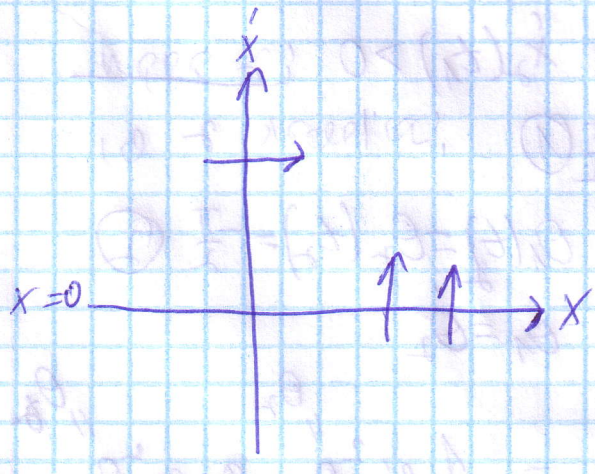
$\Leftarrow$ then

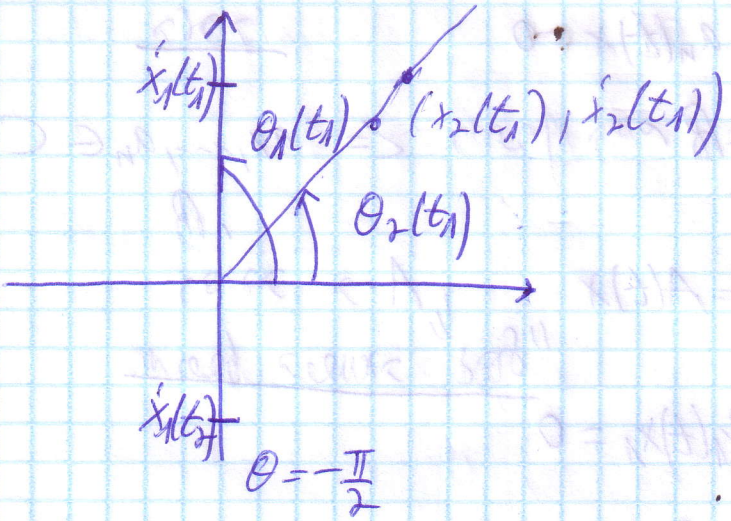
~~def~~ proof

then, then.

$q \leq 0$

$\ddot{x} = -q(t)x$





[illegible] $\theta = -\frac{\pi}{2}$ [illegible] θ_2 $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$ [illegible]

[illegible] (Arnold [illegible]

[illegible]

$$\ddot{x}_1 + q_1(t)x_1 = 0 \quad , \quad \ddot{x}_2 + q_2(t)x_2 = 0$$

$q_1(t) \le q_2(t)$ – $q_1, q_2 \in C$

[illegible] t_1, t_2 , $x_1(t_1) = x_1(t_2) = 0$ $x_2(t) \neq 0$

$\forall t \in (t_1, t_2): \; x_1(t) \neq 0$

$\exists t_* \in (t_1, t_2); x_2(t_*) = 0$ (1) ; [illegible]

$$0 = x_2(t_1) = x_2(t_2) = x_1(t_1) = x_1(t_2) \quad (2)$$

$\exists \lambda \neq 0 \; ; \; x_2(t) = \lambda x_1(t) \; \forall t, \; q_1(t) \equiv q_2(t)$ $\in [t_1, t_2]$

$\ddot{x} + x = 0$

$\ddot{x} + qx = 0$

[illegible]

$q = const > 1$



$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0$ — נסמן

כל פתרון מקיים $x \in \mathbb{R}$ אז $\iff a_1, \dots, a_n \in C$

$x \in \mathbb{R}^n$, $\dot{x} = A(t)x$ — A רציפה

"מקרה פרטי חשוב"

$$(p_1(t)\dot{x}_1) + q_1(t)x_1 = 0$$

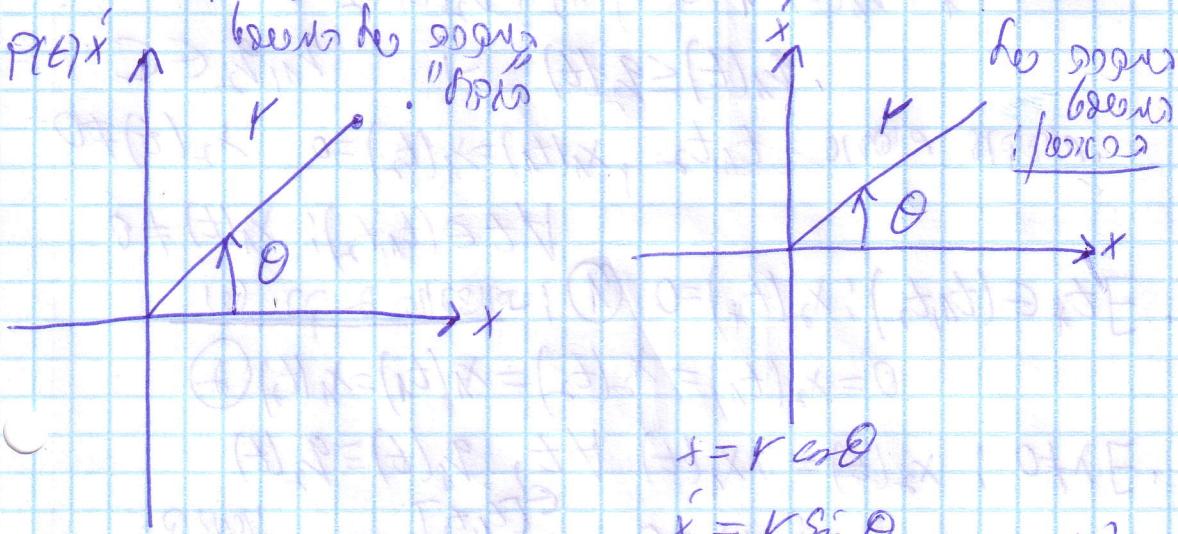
$$(p_2(t)\dot{x}_2) + q_2(t)x_2 = 0$$

$p_1 \geq p_2 > 0$, $q_1 \leq q_2$

$p_1, p_2 \in C^1$, $q_1, q_2 \in C$

(לא כולם) פתרון שווה לאפס בכל נקודה

(2) $q_1 = q_2 \neq 0$ ו $p_1 \equiv p_2$



$x = r\cos\theta$

$\dot{x} = r\sin\theta$

$p(t)\dot{x}(t) = r\sin\theta$ } פולרי

$x(t) = r\cos\theta$ } Prüfer

$p\dot{x}^2 = \frac{(p\dot{x})^2}{p}$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{p(t)\dot{x}(t)}{x(t)} \qquad \operatorname{ctg}\theta = \frac{x(t)}{p(t)\dot{x}(t)}$$

נגזור לפי t

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\dot{\theta} = \frac{(p\dot{x})x - p\dot{x}^2}{x^2}$$

$$= \frac{-qxx - p\dot{x}^2}{x^2} = -\frac{q\cos^2\theta + \frac{1}{p}\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\dot{x}(t_*)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(t_n)-x(t_*)}{t_n-t_*}=0$$

מסקנה (1) $\Leftarrow$ מ.ש.ל.

מישור פאזה

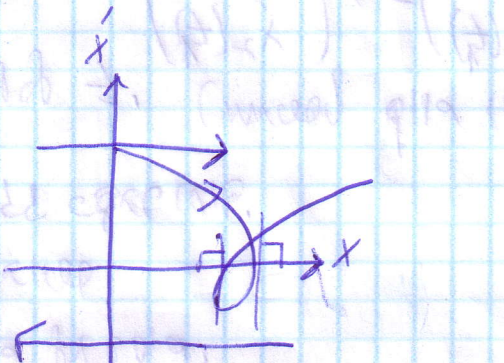
$$\ddot{x}=f(t,x,\dot{x})$$

$$\dot{x}=y_2$$

$$\dot{y}_1=y_2$$

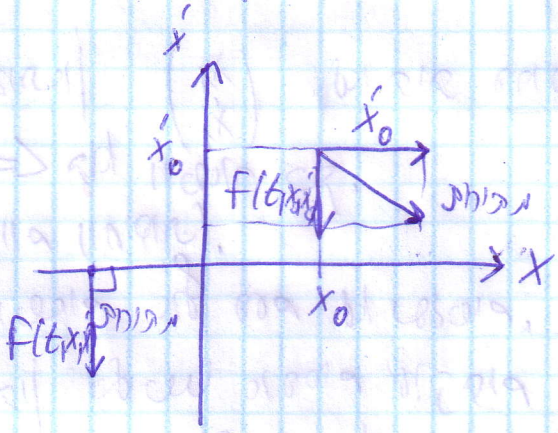
$$\dot{y}_2=f(t,y_1,y_2)$$

$x=y_1$

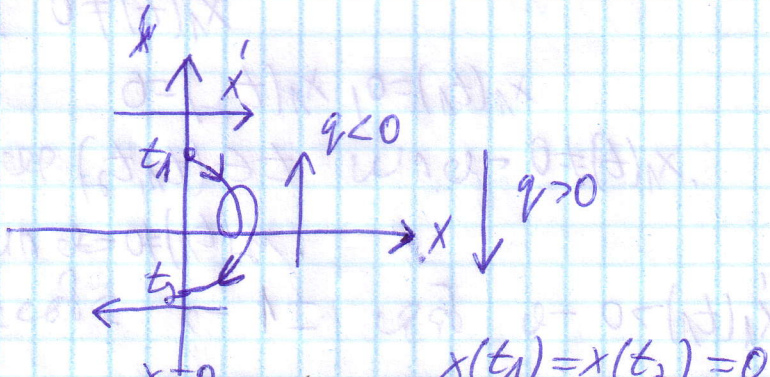


$\dot{x}>0 \Leftarrow$ x עולה.

$\dot{x}<0 \Leftarrow$ x יורד.



$$\ddot{x}+q(t)x=0$$



$x(t_1)=x(t_2)=0$

אנרגיה שלילית. $\dot{x}(t_1)>0$ כיוון תנועה כלפי ציר ה-x.

משפט קיום ויחידות לינארי

אם $x(t)$ פתרון $\Rightarrow \lambda x(t)$ פתרון $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

.

t_1 נקח נקודה כלשהי

$$\begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ \dot{x}_1(t_1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_2(t_1) \\ \dot{x}_2(t_1) \end{pmatrix}$$

יש פתרון עבור λ. (משפט קיום ויחידות).

נקח נקודה שלא נמצאת על הישר.

θ מקיים את הישר

$\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ מספיק לבדוק,

אם הפתרון $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix}$ פתרון שמתחיל ב- $\begin{pmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$ אזי

מהיות $\Rightarrow$ לא נחתכים.

$\Rightarrow$ הישרים לא יכולים להיות מקבילים.

טענה: אין שום נקודה מלבדה על הישר שנמצאת בקבוצה שמקיימת תנאי זה שום שני פתרונות שונים לא יכולים להתחיל באותה נקודה.

הוכחה: $x_1(t) \neq 0$

$x_1(t_1) = 0,\ x_1(t_2) = 0$

קיימת $t \in (t_1, t_2)$ עבורה $x_1(t) \neq 0$.

עבור $x_2(t_1) \neq 0$ עבור θ.

על ידי כפל ב- ± 1 אפשר להניח $\dot{x}_1(t_1) > 0$.

$x_2(t_1) > 0$

$$\mu\ddot{x}+\mu a\dot{x}+\dot{\mu}\dot{x}-\ddot{\mu}x+b\mu x=0$$

$$2\dot{\mu}\dot{x}=\mu a\dot{x}$$

נבנה פתרון:

$$(b-\frac{\ddot{\mu}}{\mu})z$$

$$2\dot{\mu}=\mu a$$

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu}=\frac{1}{2}a(t)$$ נפתרון משוואה:

$$\int\frac{\dot{\mu}}{\mu}dt=\frac{1}{2}\int a(t)dt$$

$$\int\frac{d\mu}{\mu}=\ln|\mu|+C \Rightarrow$$

$$=\ln(\mu)+C \Leftarrow \mu>0$$ מכיוון ש

$$\ln\mu=\frac{1}{2}\int_0^t a(s)ds-C_1$$

(כדי שיהיה $C_1=0$ נבחר $t_0=0$).

$$\mu(t)=e^{\frac{1}{2}\int_0^t a(s)ds}$$

$$z=x(t)\cdot e^{\frac{1}{2}\int_0^t a(s)ds}$$

$$\ddot{z}+(b-\frac{\ddot{\mu}}{\mu})z=0$$

$$\dot{\mu}=\frac{1}{2}a(t)\mu(t)\Rightarrow \ddot{\mu}=\frac{1}{2}\dot{a}\mu+\frac{1}{2}a\dot{\mu}$$

$$\frac{\ddot{\mu}}{\mu}=\frac{1}{2}\dot{a}+\frac{1}{2}a\frac{\dot{\mu}}{\mu}=$$

$$=\frac{1}{2}\dot{a}+\frac{1}{4}a^2$$

$$\ddot{z}+(b-\frac{1}{2}\dot{a}-\frac{1}{4}a^2)z=0$$

פתרון עבור z הוא פתרון, $a\in C^1$ - ניתן עבור משוואה

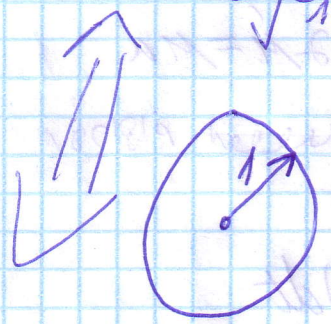
$z=\mu(t)x(t)$, $\mu>0$ - ש"ו פתרון x הוא

משוואה מהצורה: $\ddot{x}+q(t)x=0$

נפתור: $\ddot{x}+x=0$

$$x=c_1\cos(t)+c_2\sin(t)$$

$$=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos t+\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\sin t\right)$$



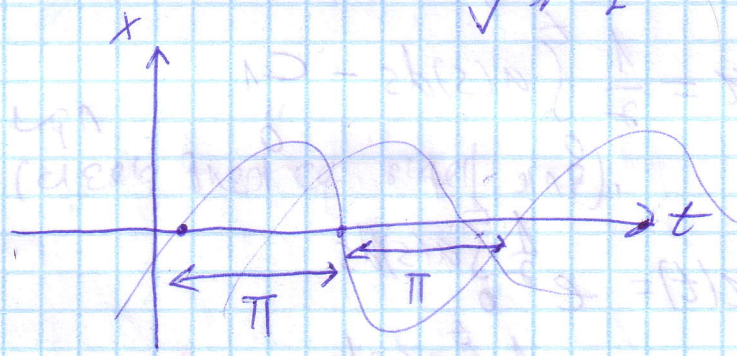
כאשר $\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}},\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)$ מקבלים נקודה על מעגל היחידה.

כאשר עוברים על כל המעגל.

$$\cos(t+\psi)=\cos t\cos\psi-\sin t\sin\psi$$

$$x(t)=A\cos(t+\psi)$$

$$A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\ ,\ \psi=-\arccos\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cdot\operatorname{sgn}(c_2)$$



כל פתרון מחזורי של המשוואה הוא כפולה של הפתרון הנ"ל.

מהו הקשר בין זה לבין הפתרונות שלנו?

נניח: ① כי $x(t_0)=0$, $x(t)\neq 0$ (לא הפתרון הטריוויאלי)

אז $\dot{x}(t_0)\neq 0$, כלומר הפתרון חותך את ציר ה-t.

הוכחה: מכיוון שלא יתכן ש: $x(t_0)=\dot{x}(t_0)=0$

$\Rightarrow x(t)=0$ (כי $x=0$ פתרון).

נניח ②: פתרון של $x(t)$ כלשהו שאינו טריוויאלי, (כלומר שאינו זהותית אפס)

בעל אינסוף שורשים $t_0,t_1,t_2,\ldots\to t_*$ כך ש- $x(t_0)=x(t_1)=\ldots=0$.

מסקנה: קבוצת השורשים של $x(t)$ היא בת מניה.

מסקנה: $x(t_*)=\lim_{n\to\infty}x(t_n)=0$

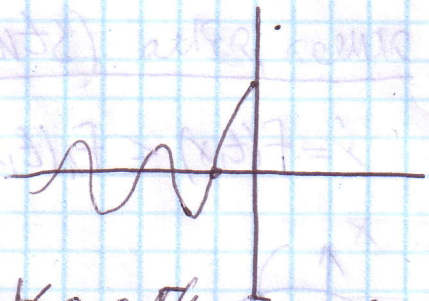
$x(t_*)>0$ – в силу непрерывности $x(t_*)=0$

t_* – точная нижняя грань $x>0$ на $(0,+\infty)$.

$\Leftarrow \dot{x}\geq 0 \quad \Leftarrow x(t)>0$ при $t\in[0,t_*),\ x(t_*)=0$

$x\geq 1$ – решение, $x(t_*)\geq 1$, что неверно.

$x(t_*)\geq e^t>0$ – что верно при $t<0$ тоже



$$t_*=\inf\{t \mid \forall s\in[t,0],\ x(s)>0\}$$

$$0\leq \dot{x}=\cos^2 t\cdot x\leq x \Leftarrow x>0$$

$x=1$, т.к. $x(0)=1,\ \dot{x}=0$ – для него

$x=e^t$, т.к. $x(0)=1,\ \dot{x}=x$ – для него

$t>0 \quad 1\leq x(t)\leq e^t$ – 2,1 выполнено

$t<0 \quad e^t\leq x(t)\leq 1$

$x(t_*)=e^{t_*}$ – что и требовалось доказать

$x(t)=e^t,\ t\in[0,t_*]$ (3 фото) – выполнено $\Leftarrow$

$\dot{x}=(e^t)'=e^t$, что и требовалось

$\dot{x}=(\cos^2 t)e^t$

$e^t=(\cos^2 t)e^t$

$\cos^2 t=1 \quad \forall\ t\in[0,t_*]$

что верно для $t_*>0$, что и требовалось доказать.

$0 = \dot{x} = \cos^2 t \cdot 1$ סתירה, $x(t_1) \neq 1$ אז קיים

$\cos^2 0 \neq 0$ ו $|$ קיים $\cos^2 t = 0$

$\| \quad$ סתירה

1

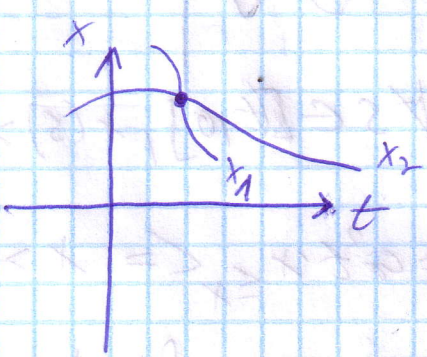
□ מ.ש.ל

13/05/08

משפט 2 - הכללה 2

משפט ההשוואה (Sturm) והוכחתו.

$$\dot{x} = f(t,x) \leq f_1(t,x)$$



$$\ddot{x} = f(t,x,\dot{x}) \iff \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = f(t,y_1,y_2) \end{cases}$$

$y_1 = x, y_2 = \dot{x}$

משוואה: $\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0$

מציאת פונקציה עזר כדי למצוא את $x(t)$?

מציאת פתרון כללי למשוואה הבאה: $\ddot{z} + a(t)z = 0$

אם $a(t) \in C^1$, $b(t) \in C$ רציפה, קיים פתרון שאינו מתאפס.

נסמן פתרון זה כ $\mu(t)$, נסמן $\mu > 0$ ← קיים μ

$$z = \mu(t)x(t)$$

$$\ddot{z} = \mu\ddot{x} + 2\dot{\mu}\dot{x} + \ddot{\mu}x$$

$M \le L \cdot M(t_2 - t_1)$ ומכאן

$1 \le L(t_2 - t_1)$

$t_1 < \tilde{t}_2 \le t_2$, $\tilde{t}_2$ קיים מהרציפות משמאל

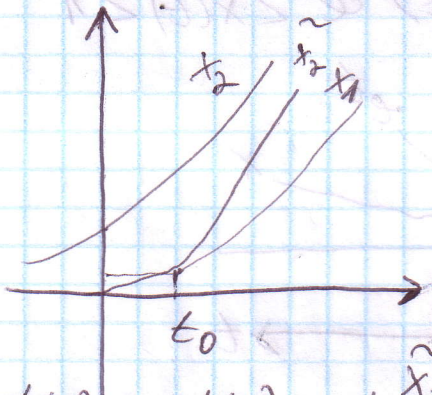
$t_2 - t_1 < \frac{1}{2L}$ כך ש t_1-ל קרוב $\tilde{t}_2$ ניתן

$1 \le L \cdot \frac{1}{2L} = \frac{1}{2}$ -ב קיבלנו סתירה ומכאן

הוכחנו.

$x_1(t_0) < x_2(t_0)$ ②

$\forall t > t_0$, $x_1(t) < x_2(t)$ נניח ש



נגדיר פונקציה $\tilde{x}_2(t)$, $\tilde{x}_2(t_0) = x_1(t_0) < x_2(t_0)$

$\dot{\tilde{x}}_2 = F(t, \tilde{x}_2)$.

$\forall t \neq t_0 \ \tilde{x}_2(t) \neq x_2(t)$ ⇐ מהוכחת יחידות הפתרון

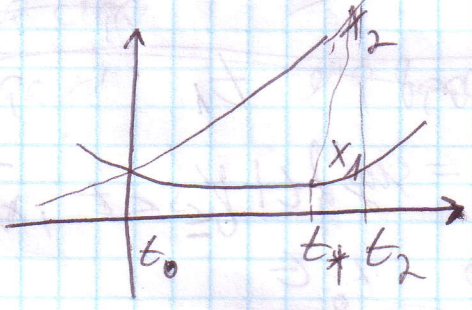
(ראינו קודם שאם $\tilde{x}_2(t) < x_2(t)$ אז $\forall t$ ⇐

בסתירה להנחת יחידות הפתרון!

$\forall t > t_0, \ x_1(t) \le \tilde{x}_2(t) < x_2(t)$

$x_1(t) = x_2(t)$ ③ נניח בשלילה $x_1(t_0) = x_2(t_0)$, $x_1(t_1) = x_2(t_1)$

$\forall t \in [t_0, t_1]$



. $t_* \in (t_1, t_2)$ שקיים $x_1(t_*) \neq x_2(t_*)$ אז יש

. 1 משפט $x_1(t_*) < x_2(t_*) \iff t_* \in (t_1, t_2)$ ⊛

$x_1(t) < x_2(t) \quad \forall t > t_* \iff$ 2 משפט ⊛

. שקול ל

דוגמה:

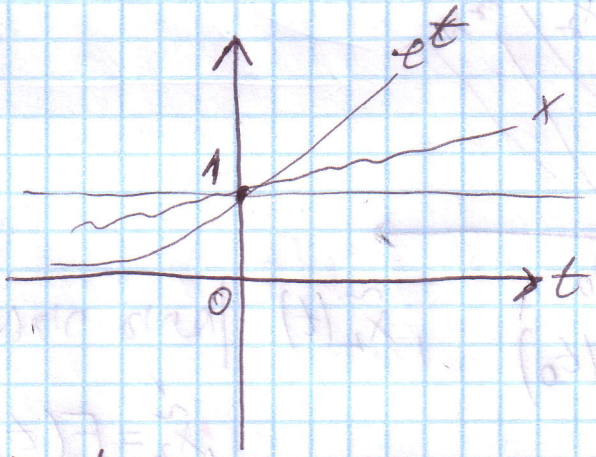
$$\dot{x} = (\cos^2 t) \cdot x$$

$$x(0) = 1$$

. נמצא

$\forall t \neq 0$, $t > 0 \Rightarrow 1 < x(t) < e^t$

$t < 0 \Rightarrow e^t < x(t) < 1$



$x(t) \approx 1$, $t \approx 0$ שכן $\forall$, $0 \leq \cos^2(t) \leq 1$

$\Rightarrow$

$$0 \leq \dot{x} = \cos^2 t \cdot x \leq x$$

. $\forall t \in \mathbb{R}\ x(t) > 0$ כלומר

. $= t_*$ ← נמוך, $\exists t_1 > 0$, $x(t_1) \leq 0$ – נמצא

~~$\forall s \leq t$~~
~~$\geq t$, $x(s) \geq 0$~~

~~. t_1 שקיים ~~

$t_* = \sup\{t \mid \forall 0 \leq s < t, x > 0\}$ ← נמוך

. t_* שקיים $t_0 \in$

הערה: $x_1(t)$ פתרון מקסימלי יחיד של $\dot{x}=F(t,x)$.

הוכחה: (של משפט ההשוואה) נניח בשלילה ש F רציפה, $\dot{x}_1 \le F(t,x_1)$, $\dot{x}_2=F(t,x_2)$ ו $x_1(t_0)=x_2(t_0)$ ①. צ"ל: $t>t_0$ מקיים $x_1 \le x_2$; ו $t<t_0$ מקיים $x_1 \ge x_2$.

$x_1<x_2$ ו $t>t_0$ מקיים $\Leftarrow$ $x_1(t_0)<x_2(t_0)$ מתקיים ②

$x_1>x_2$ ו $t<t_0$ מקיים $\Leftarrow$ $x_1(t_0)>x_2(t_0)$ מתקיים

$x_1(t_0)=x_2(t_0)$, $x_1(t_1)=x_2(t_1)$ כך ③
t_1 קרוב ל t_0 ככל שרוצים. $x_1 \equiv x_2$.

צ"ל: $\dot{x}_1 \ge F(t,x_1)$
$\dot{x}_2 = F(t,x_2)$

$x_1 \ge x_2$, $t>t_0$ $\Leftarrow$ $x_1(t_0)=x_2(t_0)$ כך ①
$x_1 \le x_2$ $t<t_0$

$x_1(t_0)>x_2(t_0) \Rightarrow$, $t>t_0$, $x_1>x_2$ ②

$x_1(t_0)<x_2(t_0) \Rightarrow$ $t<t_0$, $x_1<x_2$

$x_1(t_0)=x_2(t_0)$, $x_1(t_1)=x_2(t_1)$ ③
$t_0<t_1$ $\forall t \in [t_0,t_1]$, $x_1(t)=x_2(t)$

הוכחה: נסתכל על הבעיה כאשר $t>t_0$ ונראה שהיא שקולה לבעיה כאשר $t<t_0$.

$\tau \overset{def}{=} -t$, $\tau_0=-t_0$, $\tilde{x}_1(\tau)=x_1(-\tau)$; $\tilde{x}_1(\tau)=x_1(t)$
$\tilde{x}_2(\tau)=x_2(-\tau)=x_2(t)$

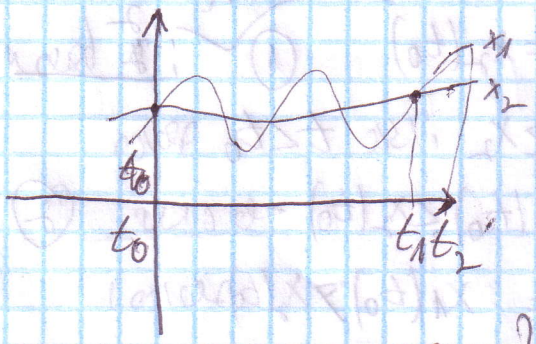
$$\tilde{x}_1'(\tau)=\frac{d\tilde{x}_1}{d\tau}=-\dot{x}_1(-\tau)=-\dot{x}_1(t) \ge -F(t,x_1(t))$$

נסמן: $\phi(\tau,x)=-F(-\tau,x)$

ומקבלים $\tilde{x}_1' \ge \phi(\tau,\tilde{x}_1)$
$\tilde{x}_2' = \phi(\tau,\tilde{x}_2)$

$x_1(t_0) = x_2(t_0)$ — נניח בשלילה ① נכון

$\exists\ t_2 > t_0 \quad x_1(t_2) > x_2(t_2)$



$$t_1 = \sup\{t \in [t_0, t_2] \mid x_1(t) = x_2(t)\}$$

$t_0 \in$

נסמן t_1 כנקודה הראשונה בה הגרפים נפגשים.

$x_1(t_1) = x_2(t_1)$ מכאן:

$t \in (t_1, t_2]$ כך ש $t_1 \in [t_0, t_2)$ קיים $x_1(t) > x_2(t)$ כי:

$[t_1, t_2]$ — נתבונן בפונקציה $x_1(t) - x_2(t) \geq 0$ כי:

$$t_* = \arg\max_{[t_1, t_2]} (x_1(t) - x_2(t))$$

$$x_1(t_*) - x_2(t_*) = M > 0$$

$$|M| = \underbrace{|x_1(t_1) - x_2(t_1)|}_{0} + \int_{t_1}^{t_*} [\dot{x}_1(s) - \dot{x}_2(s)]\, ds \leq$$

$$\leq \left| \int_{t_1}^{t_*} [F(s, x_1(s)) - F(s, x_2(s))]\, ds \right|$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_*} L\, |x_1(s) - x_2(s)|\, ds \leq L \cdot M (t_* - t_1)$$

$$\leq L \cdot M \cdot (t_2 - t_1)$$

6/5/08

מבחן 2 - תרגיל 1

שעות קבלה: יום 320 חדר 2!

שעות קבלה: יום ב' 14:10 - 15:00.

ספרות: Arnold (ODE)

משפט השוואה (Birkhoff, Rota).

① נתון: שני פתרונות $x_1 \le x_2$ ו- $x_1(t_0) = x_2(t_0)$.

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $\forall t > t_0,\ x_1(t) \le x_2(t)$

$t < t_0,\ x_1(t) \ge x_2(t)$ הפוך

$t > t_0$: $x_1(t) = x_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{x}_1(s)\,ds \le x_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{x}_2(s)\,ds = x_2(t)$

$x_1(t_0) = x_2(t_0)$

$t < t_0$ אותו דבר

$$x_1(t) = x_1(t_0) + \int_{t}^{t_0} \dot{x}_1(s)\,ds = x_1(t_0) - \int_{t}^{t_0} \dot{x}_1(s)\,ds \le x_2(t_0) - \int_{t}^{t_0} \dot{x}_2(s)\,ds = x_2(t)$$

② נתון: שני פתרונות $\dot{x}_1 \le F(t, x_1)$, $\dot{x}_2 = F(t, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$F(t,x)$ רציפה וליפשיץ לפי x.

משפט קיום ויחידות

$\dot{x} = f(t,x)$

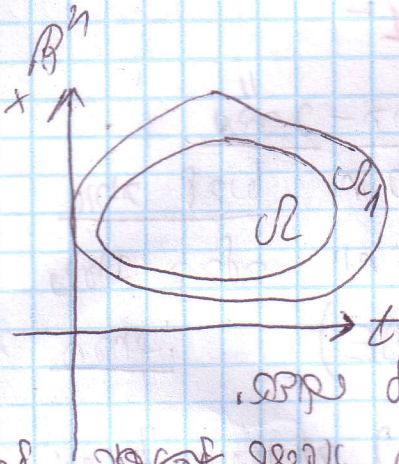
$x(t_0) = \xi$ $\quad t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$

① אם f מקיימת תנאי $\Rightarrow$ קיום פתרון מקומי.

② אם f ליפשיץ ב-x $|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le L|x_1 - x_2|$

$\Rightarrow$ פתרון יחיד (גלובלי).

מושג קבוצה משמרת



Ω – קבוצה סגורה וחסומה (קומפקטית).

Ω_1 – קבוצה פתוחה המכילה את Ω.

משפט קיום ויחידות בסיסי נקבל,

אם קבוצה Ω משמרת ביחס למערכת

מערכת אוטונומית

$\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$

כאשר f דיפרנציאבלית

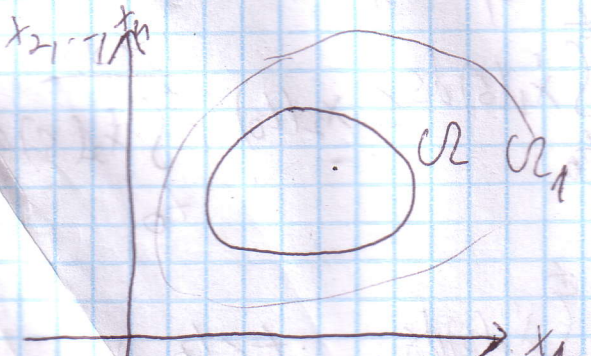
ב-Ω_1

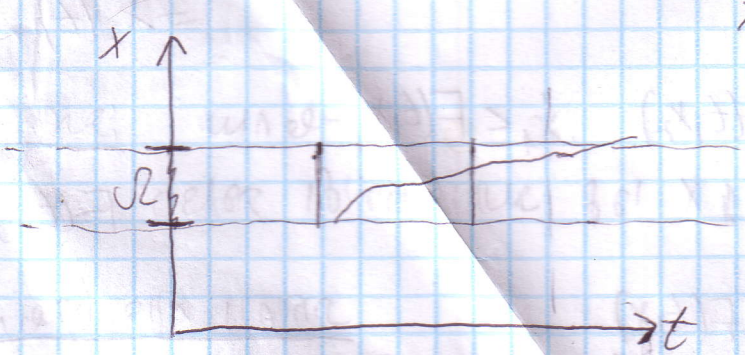
$x(t_0) = x_0$

קבוצה סגורה Ω נקראת משמרת ביחס למערכת $\dot{x} = f(x)$,

אם עבור $t_0 \in (-\infty, \infty)$ כלשהו עבור כל $x_0 \in \Omega$,

הפתרון $x(t)$ המקיים $x(t_0) = x_0$ מקיים $x(t) \in \Omega$ לכל $t \geq t_0$.





* **משפט השוואה 2:** $\dot{x}_1 = F(t, x_1)$, $\dot{x}_2 = F(t, x_2)$, $x_1 \leq x_2$

$F(t,x)$ דיפרנציאבלית פעמיים ברציפות לפי x,t.

