

סמסטר ב', מועד ב', תשס"ז  
 תאריך הבחינה: 12.10.2007  
 מספר קורס: 0365-2111

**בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים**  
 המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3.5 שעות.  
 מותר להשתמש בדף סכום אישי ובמחשב כיס.  
 סה"כ הנקודות הוא 120. רצוי לענות על כל השאלות.

בהצלחה!

**שאלה 1**

=50

בכד ראשון יש  $i$  כדורים, ובכד שני  $N - i$  כדורים. בוחרים באקראי אחד מ- $N$  הכדורים ומעבירים אותו לכד האחר. חוזרים על זה עד שמספר הכדורים בכד הראשון יגיע ל-0 או ל- $\frac{N}{8}$ . ( $N$  מתחלק ב-8,  $0 < i < \frac{N}{8}$ ). נגדיר מאורעות

$A$ : מספר הכדורים בכד הראשון יגיע ל-0;  
 $B$ : מספר הכדורים בכד הראשון יגיע ל-0 ב- $i$  שלבים (כלומר,  $0 \leftarrow 1 \leftarrow \dots \leftarrow i - 1 \leftarrow i$ ).

(א) הוכח שהתהליך יסתיים כמעט בטוח.

10

.....

(ב) מצא את ההסתברות של  $B$ .

10

(ג) הוכח שהתהליך  $M_n = h(X_n)$  הוא supermartingale; כאן  $X_n$  הוא מספר הכדורים בכד הראשון בשלב ה- $n$ , והפונקציה  $h$  מוגדרת ע"י

10

$$h(x) = x!(N - x)! \left(1 + \frac{4x}{N}\right), \quad x = 0, 1, \dots, \frac{N}{8}.$$

.....

(ד) בעזרת (ג) הוכח ש-

10

$$\mathbb{P}(A) \leq \frac{1 + \frac{4i}{N}}{\binom{N}{i}}.$$

.....

(ה) האם ההסתברות המותנה  $\mathbb{P}(B|A)$  שואפת ל-1 כאשר  $N \rightarrow \infty$ ?

10

## שאלה 2

- (א) צופה טלוויזיה צופה באחד משני ערוצים. כשמתחילה הפסקת פרסומות הוא מעביר לערוץ האחר. בממוצע יש בשעה  $\lambda_1$  הפסקות כאלה בערוץ 1,  $\lambda_2$  הפסקות בערוץ 2. ברגע נתון, מה הסיכוי לצפיה בערוץ 1? הפסקות פרסומות הן קצרות, ומהוות זרמי פואסון ב"ת. התפלגות הערוצים הנצפים היא סטציונרית.
- .....
- (ב) כמו (א), אבל יש שלושה ערוצים (1, 2, 3), וכל מעבר הוא לערוץ הבא (כלומר,  $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 1 \leftarrow \dots$ ). הקצבים  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ידועים. מצא את ההתפלגות הסטציונרית.
- .....
- (ג) כמו (ב), אבל כל מעבר הוא קדימה או אחורה בסיכויים 0.5, 0.5 ללא תלות באחרים. (קדימה זה  $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 1 \leftarrow \dots$ , אחורה זה  $3 \leftarrow 2 \leftarrow 1 \leftarrow 3 \leftarrow \dots$ ).
- .....
- (ד) כמו (ב), אבל מעבר אחורה קיים מערוץ 3 בלבד (כלומר,  $2 \leftarrow 1$ ,  $3 \leftarrow 2$ , אך  $1 \leftarrow 3$  או  $2 \leftarrow 3$ ).
- 
- 

## שאלה 3

- (א) האם יתכן שתהליך  $X_n$  הוא שרשרת מרקוב, אך תהליך  $Y_n = X_n^2$  אינו שרשרת מרקוב? (הוכח או תן דוגמת נגד).
- .....
- (ב) האם יתכן שתהליך  $X_n$  אינו שרשרת מרקוב, אך תהליך  $Y_n = X_n^2$  הוא שרשרת מרקוב? (הוכח או תן דוגמת נגד).
- .....
- (ג) האם יתכן שתהליך  $X_n$  הוא שרשרת מרקוב, אך תהליך  $Y_n = X_n^3$  אינו שרשרת מרקוב? (הוכח או תן דוגמת נגד).
- 
-