

סמסטר א', מועד א', תשס"ו
 תאריך הבחינה: 21.02.2006
 מספר קורס: 0365-1102

מספר מחברת _____
 מספר ת.ז. _____

בחינה במבוא להסתברות

המורים: פרופ' יצחק מלכסון, פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.

מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.

השאלון מורכב מ-18 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. רצוי לענות על כולן.

לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.

באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).

סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות

זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.

הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

דוגמה:

0 -2 6 -2 -2 -4 4 0

סה"כ הנקודות האפשרי הוא 108.

לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות וטבלת ההתפלגות הנורמלית.

בהצלחה!

	1	2	3	4
א	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ב	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ג	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ד	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	5	6	7	8	9
א	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ב	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ג	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ד	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	10	11	12	13	14	15	16	17
א	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ב	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ג	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ד	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	18
א	<input type="checkbox"/>
ב	<input type="checkbox"/>
ג	<input type="checkbox"/>
ד	<input type="checkbox"/>

סוגיה 1

באולימפיאדה לפירות משתתפות נבחרות מ-10 מדינות (בינהן ישראל וצרפת). בכל נבחרת 4 נציגים: בננה, אבוקדו, שסק ותפוז. סה"כ משתתפים באולימפיאדה 40 פירות. בוחרים באופן מקרי 10 משתתפים ונותנים להם תעודת מצטיינות. נגדיר את המ"מ הבאים:

X : מספר הישראלים מבין עשרת המצטיינים;

Y : מספר הצרפתים מבין עשרת המצטיינים;

Z : מספר הבננות מבין עשרת המצטיינים.

1. ההתפלגות של X היא:

(א) בינומית (ב) גאומטרית (ג) היפרגאומטרית

2. X ו- Y הם:

(א) ב"ת ולא ש"ה (ב) ב"ת וש"ה (ג) תלויים וש"ה

3. מה ניתן לומר על $\mathbb{E}(Z|X)$?

(א) $\mathbb{E}(Z|X) = \mathbb{E}(Z)$

(ב) $\mathbb{E}(Z|X) = \frac{X}{4}$

(ג) $\mathbb{E}(Z|X) = \mathbb{E}(X)$

4. מה ניתן לומר על X ו- Z ?

(א) $\text{Cov}(X, Z) < 0$

(ב) בלתי תלויים.

(ג) $\text{Cov}(X, Z) > 0$

סוגיה 2

בתהליך יצור של עכברים למחשב, הסיכוי למוצר פגום הוא 0.002, ללא תלות באחרים. חבילה של 2000 עכברים נבדקה ע"י שני בקרי איכות, כל אחד בדק 1000. מוצר תקין ימצא תקין בודאות, אך מוצר פגום יתגלה כפגום בסיכוי 0.9 אצל בקר א' ובסיכוי 0.6 אצל בקר ב'. יהי X מספר העכברים הכולל שנמצאו בלתי תקינים.

5. ההתפלגות של X היא

(א) בינומית (בדיוק).

(ב) נורמלית בקירוב סביר.

(ג) פואסונית (בדיוק).

6. מצא $\mathbb{E}(X)$.

(א) 3 (ב) 2.16 (ג) 2.4

7. מצא $\text{Var}(X)$.

(א) 3 (ב) 2.991 (ג) 2.995...

8. מצא בקירוב את $p = \mathbb{P}(X < 2)$.

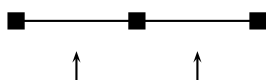
(א) $p < 0.05$ (ב) $0.15 < p < 0.25$ (ג) $0.05 < p < 0.15$

9. אם הסיכוי לעכבר פגום היה 0.1 במקום 0.002, מצא בקירוב את ההסתברות p שבקר א' יגלה לפחות 100 עכברים פגומים.

(א) $0.2 < p < 0.3$ (ב) $p < 0.2$ (ג) $0.3 < p < 0.4$

סוגיה 3

בגדר שלשה גלאי פריצה (ראה ציור). כל גלאי תקין בהסתברות $2/3$ ללא תלות באחרים. שני עבריינים מנסים לפרוץ את הגדר, דרך חצאים שונים בגדר. פריצה מצליחה אם ורק אם שני הגלאים הסמוכים מקולקלים.



10. מה ההסתברות לפריצה מוצלחת אחת לפחות?

(א) $\frac{5}{27}$ (ב) $\frac{2}{9}$ (ג) $\frac{4}{27}$

11. מה הסיכוי המותנה לכך ששתי הפריצות מוצלחות, בהנתן שלפחות אחת הפריצות הצליחה?

- (א) $\frac{1}{5}$ (ב) $\frac{1}{3}$ (ג) $\frac{1}{4}$

כעת הגדר ארוכה יותר, בת 8 גלאים, ויש 7 עבריינים המנסים לפרוץ אותו (ראה ציור). יהי X מספר הגלאים המקולקלים ו- Y מספר הפריצות המוצלחות.



12. מצא $\mathbb{E}(Y)$.

- (א) $\frac{8}{3}$ (ב) $\frac{28}{9}$ (ג) $\frac{7}{9}$

13. מצא $\text{Var}(Y)$.

- (א) $\frac{80}{81}$ (ב) $\frac{140}{81}$ (ג) $\frac{68}{81}$

14. מצא $\mathbb{P}(Y \neq 0 | X = 2)$.

- (א) $\frac{1}{4}$ (ב) $\frac{3^5}{2^8}$ (ג) $\frac{2}{7}$

15. מצא $\mathbb{P}(Y \neq 0 | X = 3)$.

- (א) $\frac{9}{14}$ (ב) $\frac{2}{3}$ (ג) $\frac{3^5}{2^8}$

16. מצא $\mathbb{P}(X = 3 | Y \neq 0, X \leq 3)$.

- (א) $\frac{7}{10}$ (ב) $\frac{18}{25}$ (ג) $\frac{1}{2}$

17. האם $\mathbb{P}(X - 2 \leq Y \leq X - 1) > 0.5$?
 (א) כן; זה נובע מאי-שוויון צ'בישב (אך לא מרקוב).
 (ב) כן; זה נובע מאי-שוויון מרקוב.
 (ג) לא; זה סותר את אי-שוויון מרקוב.

סוגיה 4

18. יהיו A, B מאורעות ו- $1_A, 1_B$ המציניים (האינדיקטורים) שלהם.

- (א) אם A, B זרים אז $1_A, 1_B$ ב"ת.
 (ב) אם A, B זרים אז $1_A, 1_B$ בלתי מתואמים.
 (ג) אם $1_A, 1_B$ ב"ת אז A, B זרים.

רשימת נוסחאות

Var (X)	E (X)	P (X = k)	ההתפלגות	
$np(1 - p)$	np	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$B(n, p)$	בינומית
λ	λ	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$P(\lambda)$	פואסון
$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	$p(1-p)^{k-1}$	$G(p)$	גיאומטרית
$\frac{n^2 - 1}{12}$	$\frac{n + 1}{2}$	$\frac{1}{n}$	$U(n)$	אחידה ב- $\{1, \dots, n\}$
$n \frac{1-p}{p^2}$	$\frac{n}{p}$	$\binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$	$NB(n, p)$	בינומית-שלילית
$n \frac{RW}{(R+W)^2} \left(1 - \frac{n-1}{R+W-1}\right)$	$n \frac{R}{R+W}$	$\frac{\binom{R}{k} \binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$H(n; R, W)$	היפרגיאומטרית

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y | X))$$

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(\text{Var}(Y | X)) + \text{Var}(\mathbb{E}(Y | X))$$

$$\hat{Y} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - \mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(Y)$$

λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$e^{-\lambda}$	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001