

סמסטר א', מועד א', תשס"ז
תאריך הבחינה: 20.02.2007
מספר קורס: 0365-4212

בחינה בהסתברות מתקדמת
המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3.5 שעות.
מותר להשתמש בכל חומר שהו.
סה"כ הנקודות הוא 125. רצוי לענות על כל השאלות.

בהצלחה!

שאלה 1

יהי $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ ההילוך המקרי התקני בממד 1 (כלומר, $S_0 = 0$ ומ"מ $S_{n+1} - S_n$ הם ב"ת ש"ה, ± 1 בסיכויים $0.5, 0.5$).

1. מצא (אם קיים) את

25

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \mathbb{P} (S_{2n^2} = 2n, \max(S_0, S_1, \dots, S_{2n^2}) = 3n).$$

שאלה 2

2. האם קיימים $s_1, s_2, \dots \in \{-1, +1\}$ כאלה שלכל $k = 0, 1, 2, \dots$ הטור

25

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} s_n s_{n+1} \dots s_{n+k}$$

מתכנס?

שאלה 3

נגדיר

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sgn} \sin(2^n \pi x)$$

(כאן $\operatorname{sgn} u$ הוא $+1$ עבור $u > 0$, -1 עבור $u < 0$, ו- 0 עבור $u = 0$).

3. האם

25

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}: 0 < x + 3^{-n}k < 1} f(x + 3^{-n}k) = o(3^{-n})$$

עבור כמעט כל $x \in (0, 1)$, או לא?

4. נגדיר $k_n(y)$ ע"י $\frac{k_n(y)}{3^n} \leq y < \frac{k_n(y) + 1}{3^n}$. האם

25

$$\int_{k_n(y)/3^n}^{(k_n(y)+1)/3^n} f(x) dx = o(3^{-n})$$

עבור כמעט כל $y \in (0, 1)$, או לא?

שאלה 4

5. יהיו X_1, X_2, \dots מ"מ חליפים (exchangeable). האם יתכן שהמאורע " $X_n \rightarrow \infty$ " בעל הסתברות 0.5 ?

25